

β -Zerfall, radioaktives Gleichgewicht und γ -Spektroskopie

Institut für Kernchemie
Universität Mainz

Tröpfchenmodell / Weizsäckerformel

Idee:

- Kerne verhalten sich wie Tropfen einer geladenen Flüssigkeit
- Kernmaterie hat eine konstante Dichte:
 $\rho \approx 2.8 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3 \approx 0.17 \text{ Nukleonen/fm}^3$
 $\Rightarrow \text{Volumen} \propto A, \text{ Radius} \propto A^{1/3}, \text{ Oberfläche} \propto A^{2/3}$

Bindungsenergie eines Kerns (Weizsäcker):

$$E_B = a_V \cdot A - a_O \cdot A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_S \frac{(N - Z)^2}{A} + a_P$$

Volumenterm:

Bindungsenergie $\propto A$, nicht $\propto A^2$

\Rightarrow Sättigungscharakter der Kernkraft

\Rightarrow Bindungsenergie eines Nukleons ist unabhängig von der Gesamtzahl an Nukleonen

Oberflächenterm:

Schwächere Bindung der Nukleonen an der Oberfläche

\Rightarrow negativer Korrekturterm $\propto A^{2/3}$

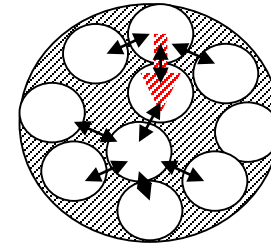
\Rightarrow "Oberflächenspannung"

Tröpfchenmodell / Weizsäckerformel

- Nukleonen am Kernrand \Rightarrow resultierende Kraft in Richtung Kernmitte,
- Nukleonen im Kerninneren \Rightarrow gleichmäßige Kraft in alle Richtungen

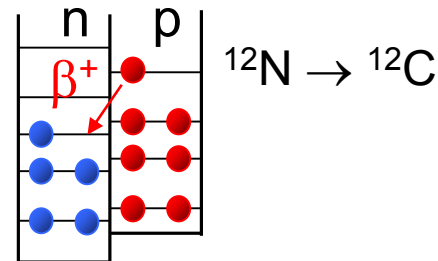
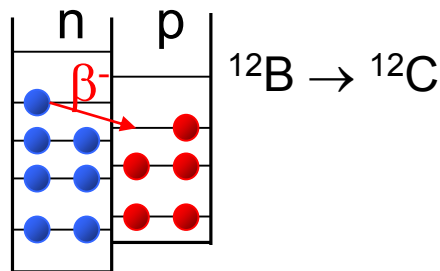
Coulombterm

- Abstoßende Coulombkraft der Protonen
- Negativer Korrekturterm $\propto Z^2/A^{1/3}$



Asymmetrieterm

- innerhalb des Tröpfchenmodells zunächst empirische Korrektur
 - Kerne mit hohem Neutronenüber- oder Neutronenunterschuss sind instabil
- \Rightarrow β -Instabilität, negativer Korrekturterm $\propto (N-Z)^2$



Paarungsterm

- empirische Korrektur innerhalb des Tröpfchenmodells
- gepaarte Nukleonen derselben Sorte haben besonders hohe Bindungsenergie (zwei getrennte Potentialtöpfe für Protonen und Neutronen, die nach dem Pauli-Prinzip besetzt werden)

⇒ Kerne mit gerader Neutronen- und Protonenzahl (gg-Kerne) sind besonders stabil

⇒ $a_p = +\delta$ für gg-Kerne

$a_p = 0$ für gu- und ug-Kerne

$a_p = -\delta$ für uu-Kerne

Zerfall und Nachbildung radioaktiver Kerne

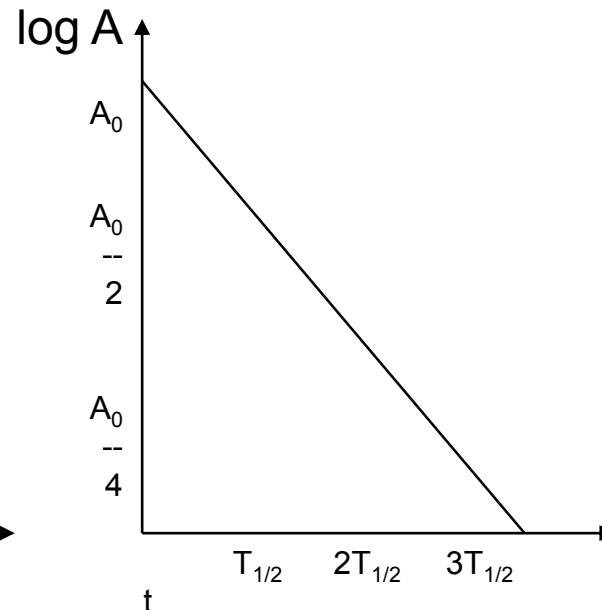
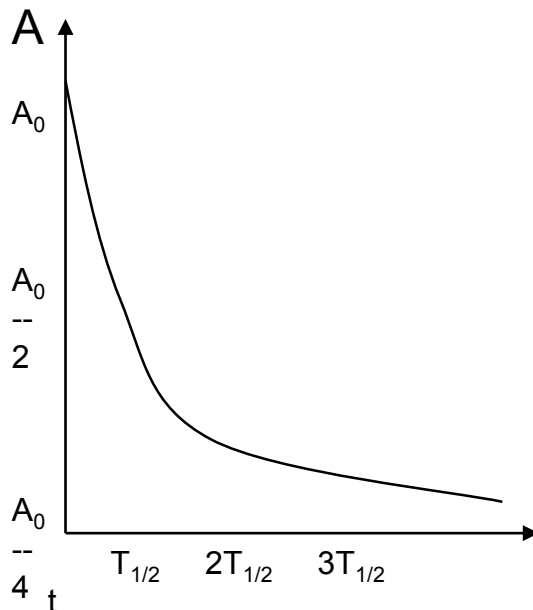
Zerfall einer einzelnen Komponente

⇒ Anzahl der vorhandenen Kerne:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

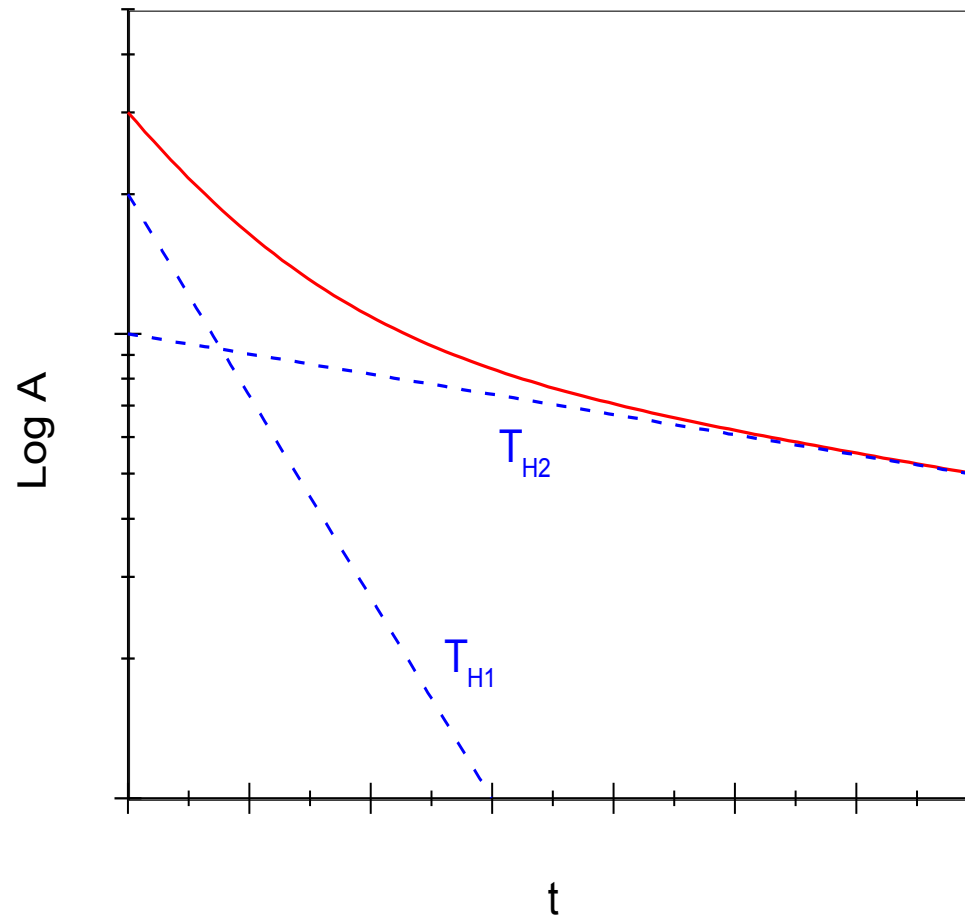
⇒ Anzahl der zerfallenden Kerne pro Zeiteinheit:

$$A(t) = -\frac{dN}{dt} = \lambda N(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t}$$



Zerfall und Nachbildung radioaktiver Kerne

- Zerfall zweier unabhängiger Komponenten



Zerfall und Nachbildung radioaktiver Kerne

Mutter – Tochter – Zerfall

Mutter $\xrightarrow{\lambda_1}$ Tochter $\xrightarrow{\lambda_2}$ Enkel

Zeitgesetz der Mutter bleibt unverändert:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1; N_1(t=0) = N_{10} \Rightarrow N_1(t) = N_{10} e^{-\lambda_1 t}$$

Zeitgesetz der Tochter wird durch Speisung aus dem Zerfall der Mutter modifiziert:

$$N_2(t) = N_{20} e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

Aktivität der Tochter:

$$\Rightarrow A_2(t) = A_{20} e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} A_{10} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

Zerfall und Nachbildung radioaktiver Kerne

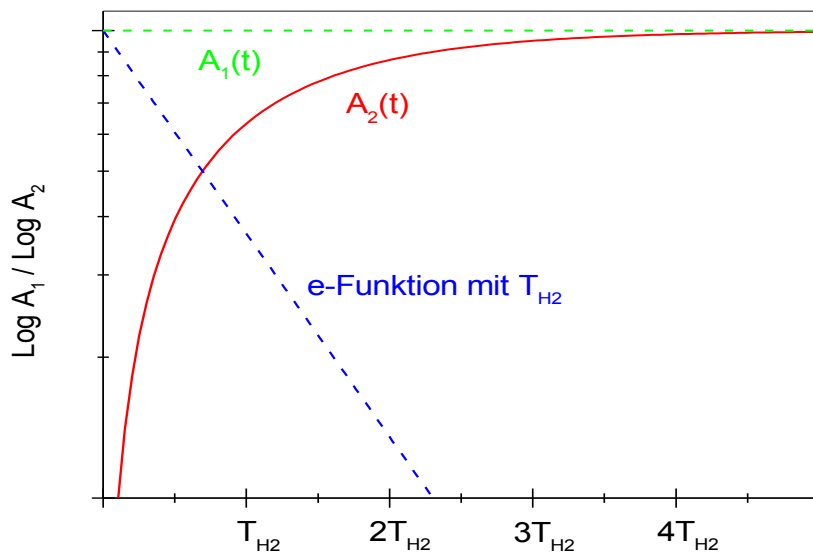
Grenzfallbetrachtung

1.) Sehr langlebige Mutter:

Ist bei natürlicher Radioaktivität gegeben

$$\lambda_1 \ll \lambda_2 \Leftrightarrow T_{H1} \gg T_{H2}; \lambda_1 t \ll 1 \rightarrow A_1(t) = A_{10} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow A_2(t) = A_{10}(1 - e^{-\lambda_2 t})$$



Säkulares Gleichgewicht
(Dauergleichgewicht)

bei $t \approx 10T_{H2}$ ist GG eingestellt

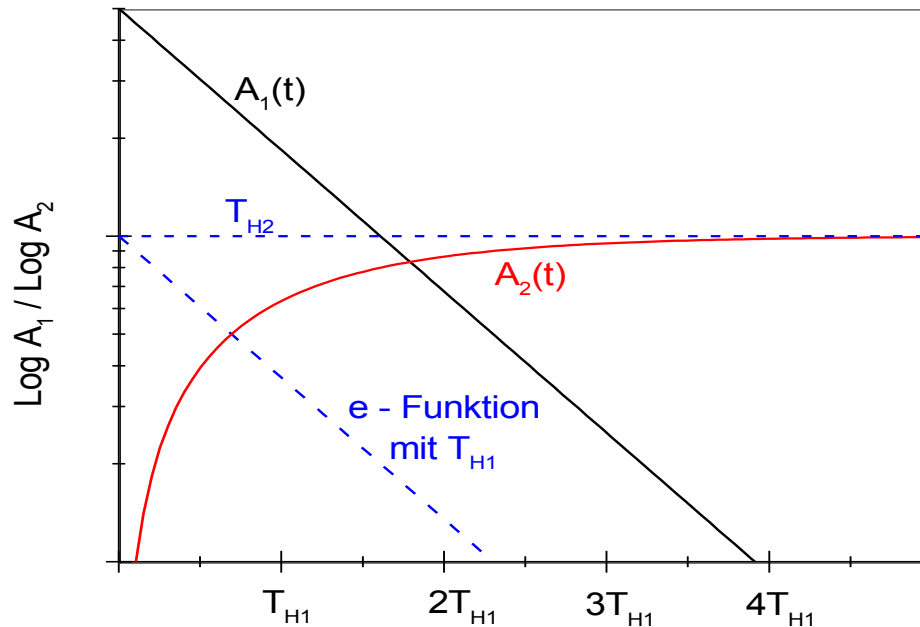
$$A_2(t) \approx A_{10} = \text{const.}$$

Grenzfallbetrachtung

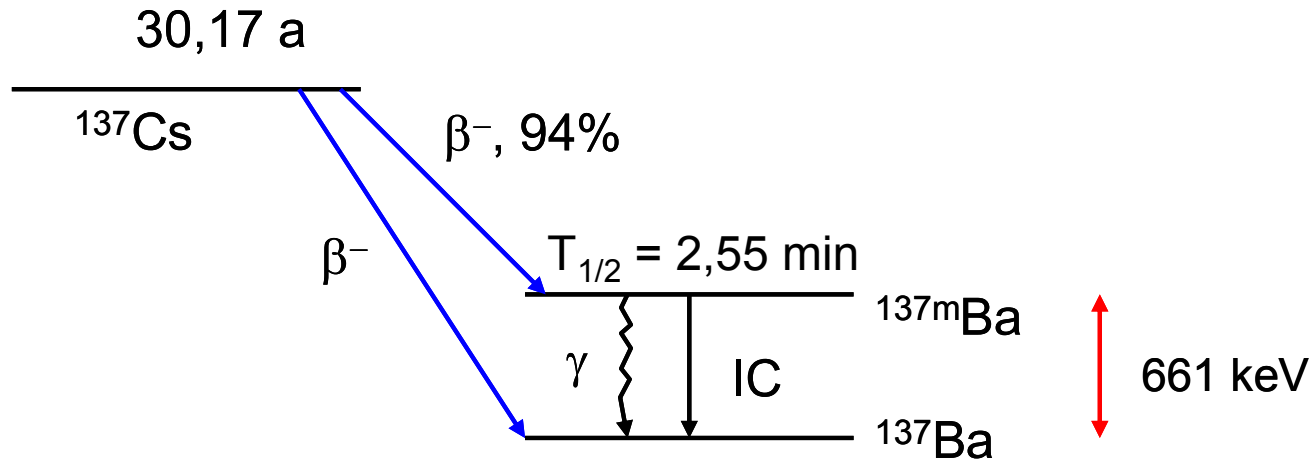
2.) Sehr langlebige Tochter:

$$\lambda_1 \gg \lambda_2; T_{H1} \ll T_{H2}; \lambda_2 \cdot t \ll 1$$

$$A_2(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} A_{10} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}) \approx \frac{\lambda_2}{\lambda_1} A_{10} (1 - e^{-\lambda_1 t})$$



Zerfall und Nachbildung von $^{137\text{m}}\text{Ba}$ (säkulares Gleichgewicht)



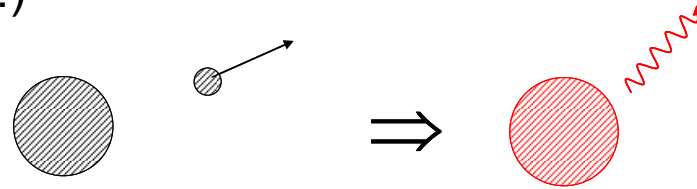
- V1: - Abtrennung von $^{137\text{m}}\text{Ba}$ aus dem GG (Fällung als BaSO_4)
- γ -Messung des Filtrats
- Beobachtung der Nachbildung von $^{137\text{m}}\text{Ba}$ (indirekte HWZ-Bestimmung)
- V2: - Abtrennung von $^{137\text{m}}\text{Ba}$ aus dem GG (Fällung als BaSO_4)
- γ -Messung des Niederschlags
- direkte Bestimmung der HWZ von $^{137\text{m}}\text{Ba}$

Entstehung von γ -Strahlung

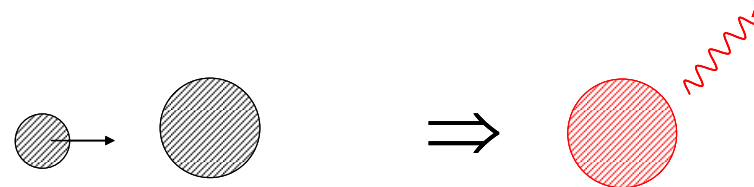
Emission von Photonen aus angeregtem Kern

Anregung des Kerns durch:

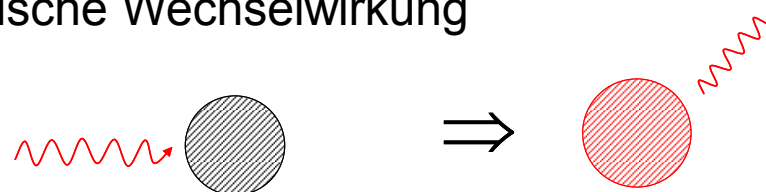
1. Zerfall ($\alpha, \beta, sf \dots$)



2. Kernreaktion

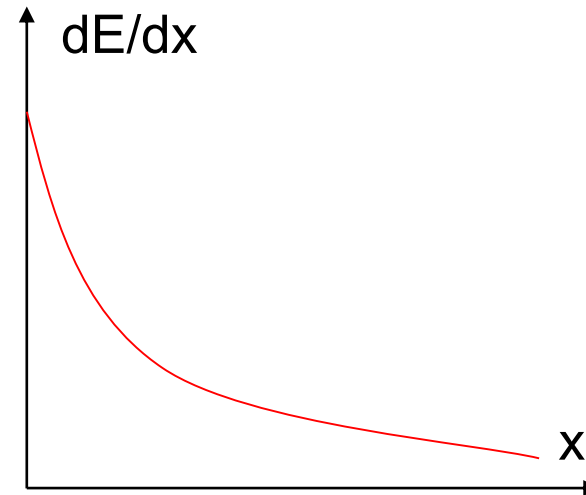
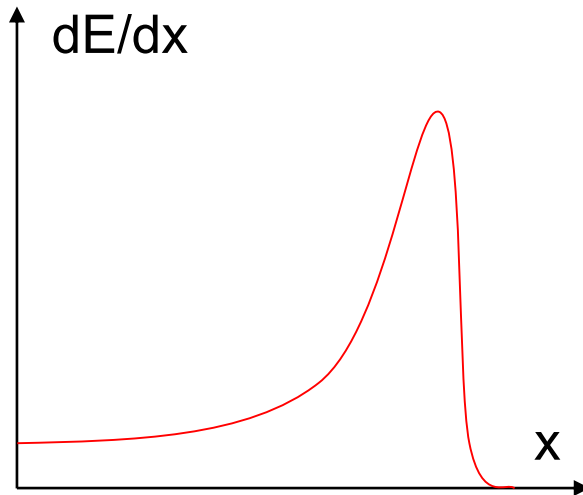


3. elektromagnetische Wechselwirkung



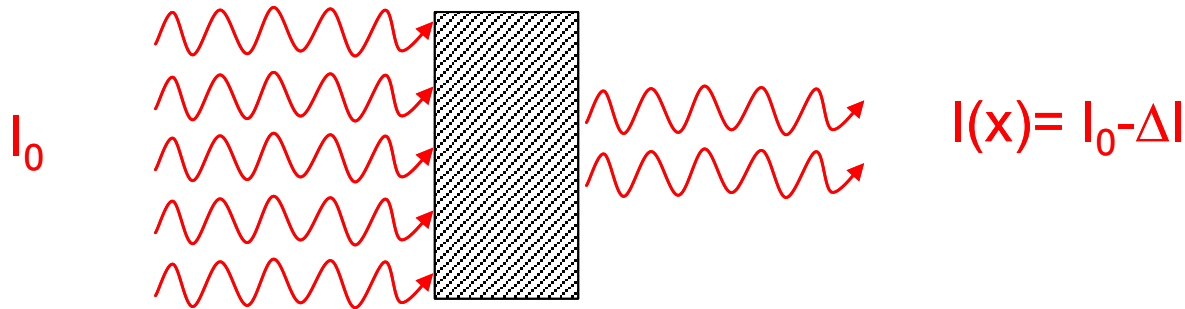
Wechselwirkung mit Materie

Geladene Teilchen (α, β, p)	Ungeladene Teilchen (γ, n)
Energieabgabe kontinuierlich (durch Wechselwirkung mit elektrischem Feld ca. 30 eV Energieverlust pro Ionisation)	Energieabgabe diskontinuierlich (Energieverlust durch Stoß, statistisch bestimmt)
\Rightarrow maximale Reichweite	\Rightarrow Reichweite nicht definiert
Energieabgabe pro Wegstrecke: \rightarrow Anwendung von ^{12}C - Strahl in der Tumor-therapie (GSI)	Energieabgabe pro Wegstrecke:



Wechselwirkung mit Materie

Wechselwirkung mit Materie



$$\Delta I \propto I_0$$

$$\Delta I \propto \Delta x$$

$$\Rightarrow \Delta I = -\mu \cdot I_0 \cdot \Delta x \quad (\text{Mit Absorptionskoeffizient } \mu \text{ [cm}^2/\text{g]} \text{ und Schichtdicke } x \text{ [g/ cm}^2\text{]})$$

$$\Rightarrow I(x) = I_0 \cdot e^{-\mu x}$$

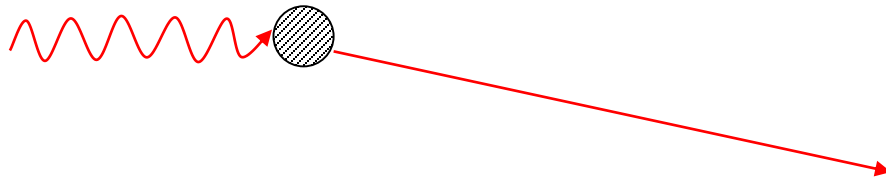
⇒ Absorptionsgesetz, vgl. Lambert-Beer

⇒ analog zur Halbwertszeit $T_{1/2}$ Definition der *Halbwertsdicke*:

$$D_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}$$

Photoeffekt

γ -Quant gibt gesamte Energie an gebundenes Elektron ab:



$$E_{e^-} = E_{\gamma} - E_B$$

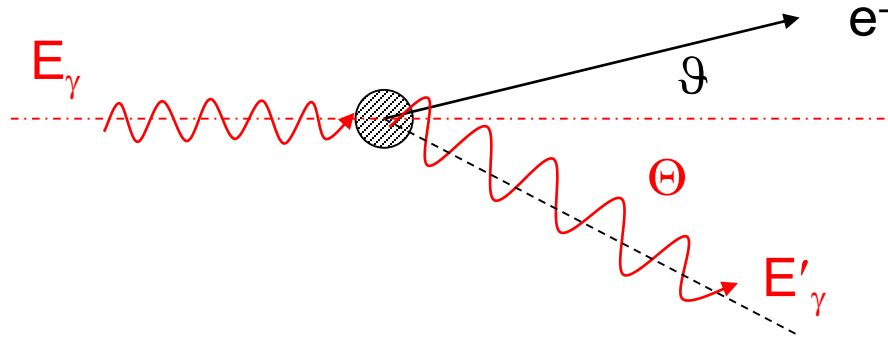
⇒ wenn $E_{\gamma} > E_B$, kann das Elektron den Atomverband verlassen.

- nach Ionisation ist ein „Loch“ in der Elektronenschale
- Elektronen „fallen aus höheren Schalen nach unten“
- Emission von charakteristischer Röntgenstrahlung (→ Röntgenfluoreszenz), z.B.

L→K $K\alpha$ -Linie
M→K $K\beta$ -Linie

Comptoneffekt

Streuung eines γ -Quants an „freiem“ Elektron ($E_\gamma \gg E_B$)

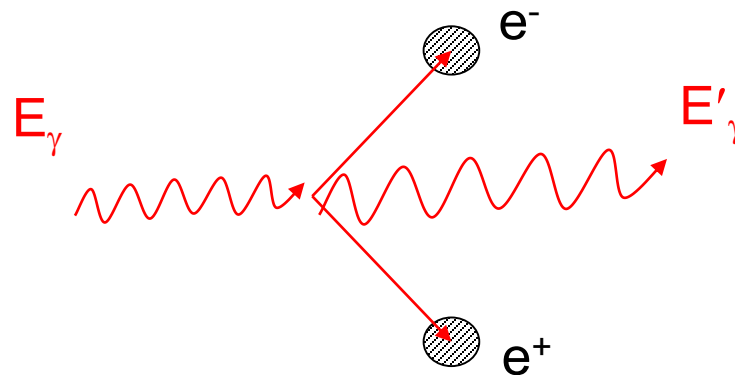


Aus Impulserhaltung folgt:
$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{\frac{E_\gamma}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta) + 1}$$
 (mit Elektronen-Ruhemasse m_0)

- ⇒ Elektron und gestreutes γ -Quant bewegen sich unter definierten Winkeln
- ⇒ maximaler Impulsübertrag erfolgt bei $\Theta = 180^\circ$, Elektronen aus der Comptonstreuung haben also eine Maximalenergie (→Comptonkante)

Paarerzeugung

Durch Wechselwirkung mit Coulombfeld des Kerns werden Elektron-Positron-Paare gebildet



Paarerzeugung nur möglich, wenn

$$E_\gamma > 1022 \text{ keV} = 2 m_0 c^2$$

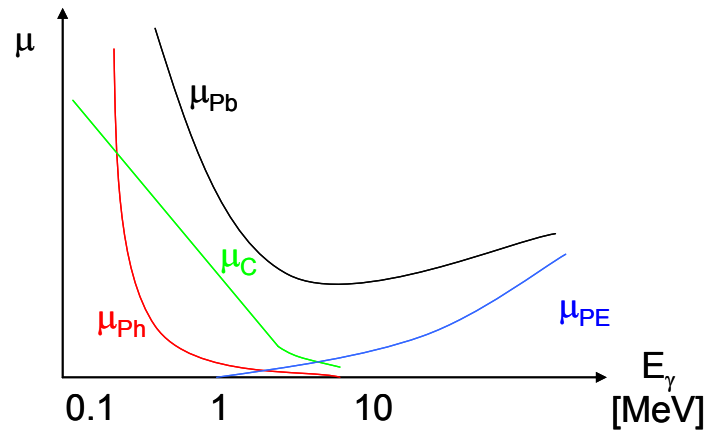
Paarerzeugung induziert Vernichtungsstrahlung durch Positronenannihilation
($E = 2 \times 511 \text{ keV}$)

Wechselwirkung mit Materie

Abhängigkeiten der verschiedenen Absorptionskoeffizienten

	Z-Abhängigkeit	Energieabhängigkeit
Photoeffekt	$\propto Z^4 \dots Z^5$	$\propto E^{-3.5} \dots E^{-1}$
Comptoneffekt	$\propto Z$	$\propto E^{-1}$
Paarerzeugung	$\propto Z^2$	$\propto \ln E$ ($E_\gamma > 1.02 \text{ MeV}$)

- ⇒ Materialien mit großem Z schirmen γ -Strahlung besser ab
(→ Pb-Abschirmung)
- ⇒ Gesamtabsorptionskoeffizient μ



Nachweis von γ -Strahlung

Wechselwirkung von γ -Strahlung mit Materie ist abhängig von Z

⇒ Geiger-Müller-Zähler sind nicht geeignet

(Zählgas Argon, $Z=18$)

⇒ geeignet sind Szintillationszähler, z.B. NaI(Tl), (I: $Z=53$; Tl: $Z=81$)

Halbleiterdetektoren, z.B. Ge-Li (Ge: $Z=32$)

Szintillationszähler

Prinzip: Anorganische oder organische Kristalle oder Lösungen werden durch ionisierende Strahlung zur Emission von Licht angeregt; Licht wird mit Photomultiplier verstärkt.

Vorteil: Hohe Efficiency (Geometriefaktor/hohes Z)

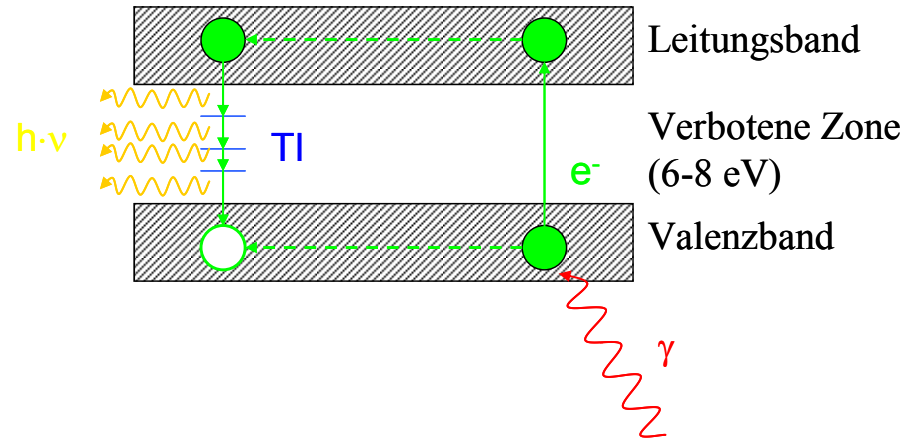
Halbleiterzähler

Prinzip: In einer in Sperrrichtung geschalteten Diode werden Elektronen ins Leitungsband angehoben, die auftretende Spannung verstärkt.

(=Festkörper-Ionisationskammer)

Vorteil: Hohe Energieauflösung

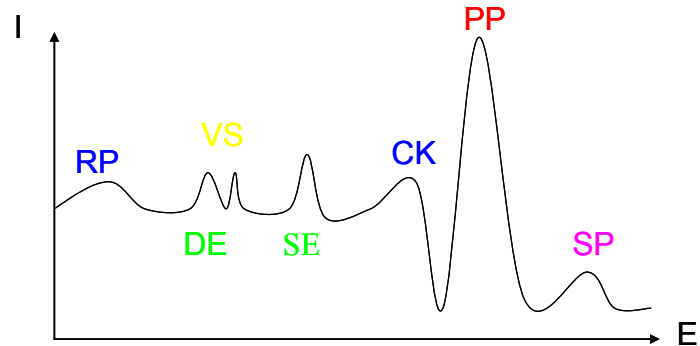
Nal-Einkristall mit TI dotiert:



1. Elektronen werden aus dem Valenzband in das Leitungsband angehoben
2. Die verbleibenden Löcher wandern zu Aktivatorzentren (TI) und ionisieren diese
3. Das freie Elektron wandert zum Aktivatorzentrum und „fällt die Niveauleiter“ des TI hinab; dabei wird sichtbares Licht ausgesandt.
Lebensdauer des angeregten Zustands: ca. 230 ns (NaI(TI)-Detektor)
4. Lichtquant wird mit Photomultiplier verstärkt;
300 eV γ -Quant \Rightarrow ca. 10 Lichtquanten \Rightarrow ca. 1 Photoelektron
 $\Rightarrow \gamma$ -Energie \propto Anodenstrom

Form eines γ -Spektrums

γ -Quanten haben diskrete Energie \Rightarrow Linienspektrum



PP: Photopeak – gesamte γ -Energie wird im Detektor deponiert

CK/RP: Comptonkante/Rückstreupeak aus Comptoneffekt.

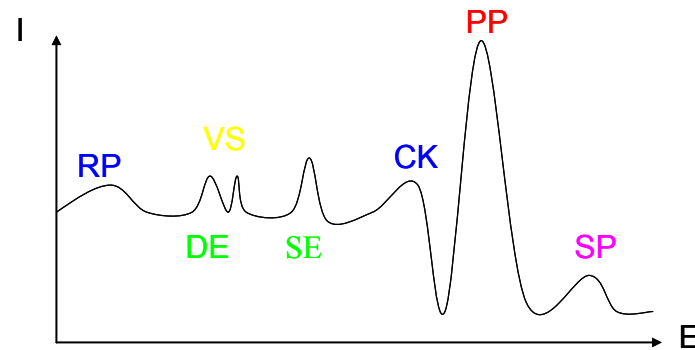
CK: Maximalübertrag von Energie auf Elektron durch 180° -Streuung, Nachweis der Elektronen. Unterhalb CK bis $E=0$ Comptonkontinuum

RP: Comptonstreuung außerhalb des Detektors (in der Probe), Nachweis der gestreuten Photonen;

$$E_{CK} + E_{RP} = E_{PP}$$

Form eines γ -Spektrums

γ -Quanten haben diskrete Energie \Rightarrow Linienspektrum



SE/DE: single-escape/double-escape-Peak

Bei hohen γ -Energien Paarerzeugung. Positron wird i.d.R. im Detektor vernichtet

\Rightarrow 2 γ -Quanten (511 keV).

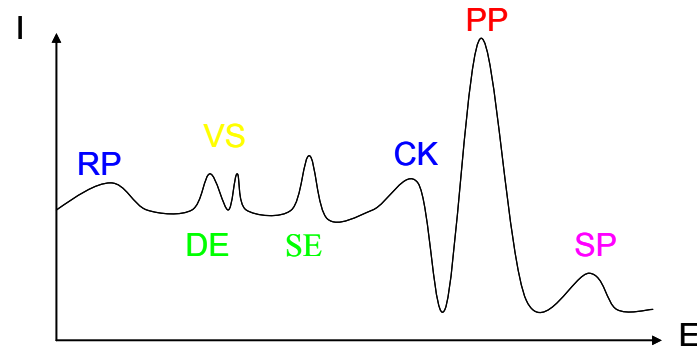
\Rightarrow Entweicht eines: SE (ESE= EPP-511 keV)

\Rightarrow Entweichen beide: DE (EDE= EPP- 1022 keV)

\Rightarrow Entweicht keines, wird wegen der Zeitauflösung die Energie des Photopeaks gemessen.

Form eines γ -Spektrums

γ -Quanten haben diskrete Energie \Rightarrow Linienspektrum



VS: Vernichtungsstrahlung
bei Paarerzeugung außerhalb des Detektors
 \Rightarrow Nachweis von γ -Quanten bei 511 keV

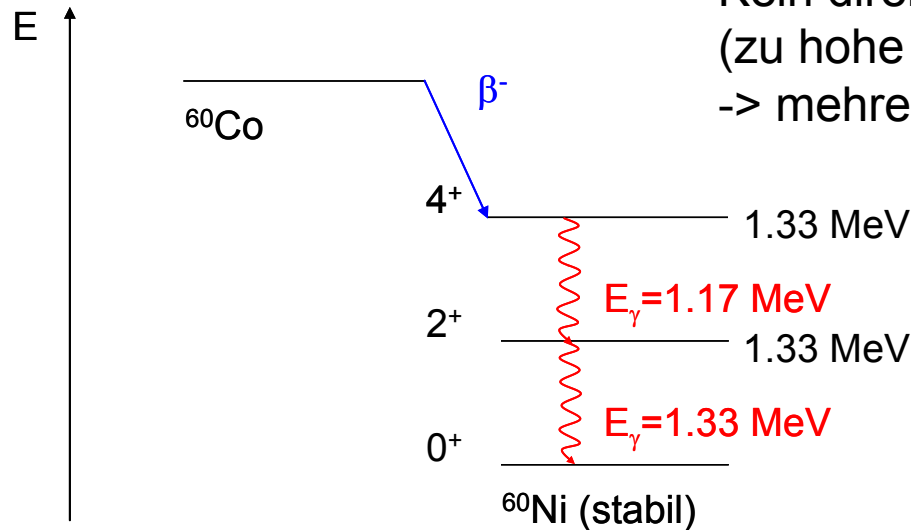
SP: Summenpeak

Durch gleichzeitigen Nachweis von 2 γ -Quanten entsteht ein Summenpeak

$$(E_{SP} = E_{\gamma 1} + E_{\gamma 2})$$

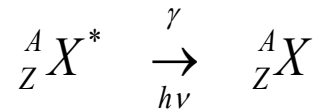
Diskriminierung des Summenpeaks durch größeren Abstand Detektor - Probe
(Nachweiswahrscheinlichkeit für 1 γ fällt mit $1/R^2$, für 2 γ mit $1/R^4$)

Zerfallsschema von ^{60}Co



Kein direkter Übergang in den GZ
(zu hohe Änderung des Kernspins)
-> mehrere γ -Linien!

γ -Emission = Energieabgabe ohne Kernumwandlung



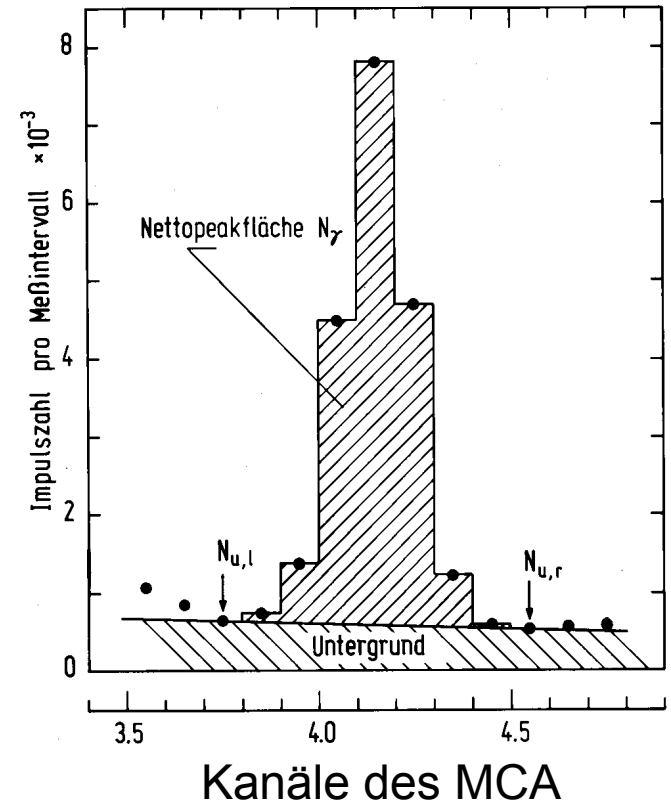
γ -Linien „von ^{60}Co “

stammen eigentlich aus Abregung von $^{60}\text{Ni}^*$

sind charakteristisch für die Kernstruktur von ^{60}Ni

Bestimmung von Peakflächen

- Peakgrenzen festlegen
- Summieren der Counts aller Kanäle des Peaks
- Abziehen des Untergrunds
 - $(Cts_{\text{linke Grenze}} + Cts_{\text{rechte Grenze}}) / 2$
 - Annahme eines linearen Untergrunds



- Messung des ^{137}Cs -Spektrums (Energiekalibrierung)
- Messung des ^{60}Co -Spektrums (Bestimmung der Peaks, Energiekalibrierung)
- Messung + Interpretation des ^{24}Na -Spektrums
- Messung ^{60}Co -Spektrums (Messgeometrie, Abstandsabhängigkeit)
- Messung ^{60}Co -Spektrums (Bestimmung der Halbwertsschichtdicke für Blei)