# Eine neue Methode unzählige Differentialgleichungen zweiten Grades auf Differentialgleichungen ersten Grades zurückzuführen*

Leonhard Euler

**§1** Wann immer die Analytiker zu Differentialgleichungen zweiten oder eines bestimmten höheren Grades gelangen, beschäftigen sie sich mit dem Auflösen von ihnen auf zwei Weisen:

Zuerst untersuchen sie, ob es leicht ist, sie zu integrieren; wenn das so war, haben sie erhalten, was sie wollten. Wenn aber die Integration entweder völlig unmöglich oder zumindest schwer scheint, versuchen sie sie auf Differentialgleichungen ersten Grades zurückzuführen; über diese kann natürlich leichter geurteilt werden, ob sie konstruiert werden können, und keine Differentialgleichungen außer des ersten Grades können mit den bisher bekannten Methoden konstruiert werden. Was jene betrifft, ist es nicht vorgelegt, darüber in dieser Dissertation etwas zu erklären; wie aber Differentialgleichungen höheren Grades, vor allem aber zweiten Grades, auf Differentialgleichungen ersten Grades zurückzuführen sind, dafür werde ich eine noch ungewöhnliche Methode, und eine die sich sehr weit erstreckt, im Folgenden erklären.

*Originaltitel: „Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad aequationes differentiales primi gradus“, erstmals publiziert in „*Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 3, 1732, pp. 124-137“, Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 22, pp. 1 - 14“ und „*Comment. acad. sc. Petrop.* 3, ed. nova, Bononiae 1742, pp. 112-124 [E10a]“ , Eneström-Nummer E10, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Artur Diener, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz“

**§2** Schon oftmals haben die Mathematiker, wann immer Differentialgleichungen zweiten oder höherer Grade auftauchten, sie auf Differentialgleichungen ersten Grades zurückgeführt und darauf konstruiert, wie sich aber bei den Konstruktionen der *Catenariae* der *Elasticae*, der *Proiectoriae* in einem Medium mit Widerstand und vieler anderer Kurven sehen lässt, deren Differentialgleichungen zuerst als solche vom zweiten oder dritten Grad gefunden worden sind. Viele derer sind zwar integrierbar, aber dennoch war es leichter sie zu integrieren, nachdem sie auf Differentiale ersten Grades zurückgeführt worden waren. Die Art von deren Gleichungen ist aber so beschaffen, dass entweder jede der beiden oder zumindest eine der beiden Unbestimmten in ihr fehlt, während nur die Differentiale und Differenzen-Differentiale von ihr oder von ihnen in die Gleichungen eingehen.

**§3** Wenn aber in der Differenzen-Differentialgleichung die eine der beiden Unbestimmten frei ist, ist es leicht, sie auf ein einfaches Differential zurückzuführen, indem man anstelle der fehlenden Differentialgröße das Produkt aus einer bestimmten neuen Größe mit dem anderen Differential einsetzt. Auf diese Weise, wenn ein bestimmtes Differential konstant gesetzt wurde, findet man ein dem Differenzen-Differential gleiches einfaches Differential; nachdem dieses eingesetzt wurde, hat man eine Differentialgleichung ersten Grades, wie in dieser Gleichung

$$P\mathrm{d}y^n = Q\mathrm{d}v^n + \mathrm{d}v^{n-2}\mathrm{dd}v,$$

wo $P$ und $Q$ irgendwelche Funktionen von $y$ bezeichnen und $\mathrm{d}y$ konstant gesetzt wird. Weil $v$ selbst nicht in die Gleichung eingeht, werde $\mathrm{d}v = z\mathrm{d}y$, es wird $\mathrm{dd}v = \mathrm{d}z\mathrm{d}y$ sein. Nachdem diese eingesetzt wurden, entsteht diese Gleichung

$$P\mathrm{d}y^n = Qz^n\mathrm{d}y^n + z^{n-2}\mathrm{d}y^{n-1}\mathrm{d}z,$$

und nach Teilung von dieser durch $\mathrm{d}y^{n-1}$ dann diese

$$P\mathrm{d}y = Qz^n\mathrm{d}y + z^{n-2}\mathrm{d}z,$$

welche ein einfaches Differential ist.

**§4** Andere Differenzen-Differentialgleichungen, außer von dieser Art, hat noch niemand, soweit ich weiß, irgendwie auf Differentialgleichungen ersten Grades zurückgeführt, wenn es nicht zufällig leicht war, sie vollkommen zu integrieren. Hier möchte ich aber eine Methode erläutern, durch die zwar nicht alle, aber dennoch unzählige Differenzen-Differentialgleichungen, wie auch immer mit jeder der beiden Unbestimmten versehen, auf einfache Differentiale zurückgeführt werden können. Ich gehe aber beim Reduzieren von ihnen so vor, dass ich sie durch eine bestimmte Substitution in andere transformiere, in denen die eine der beiden Unbestimmten fehlt. Nachdem das gemacht wurde, werden diese Gleichungen mit Hilfe der im vorhergehenden Paragraphen erläuterten Methode vollkommen auf Differentiale ersten Grades zurückgeführt werden.

**§5** Nachdem ich die Eigenschaft von Exponentialgrößen bemerkt hatte, oder besser von deren Potenzen, deren Exponent variabel ist, während die erhobene Größe konstant bleibt, wenn sie differenziert wird und erneut differenziert wird, immer eine endliche Variable nur den Exponenten betrifft und die Differentiale Produkte aus dem Integral mit dem Differentialen des Exponenten sind; eine Größe dieser Art wird $c^x$ sein, wo $c$ die Zahl bezeichnet, deren Logarithmus die Einheit ist, ihr Differential wird $c^x \mathrm{d}x$ sein, das Differenzen-Differential $c^x(\mathrm{dd}x + \mathrm{d}x^2)$, wo $x$ nur in den Exponenten eingeht. Diese betrachtend habe ich erkannt, dass wenn in einer Differenzen-Differentialgleichung anstelle der Unbestimmten Differentiale dieser Art eingesetzt werden, dass dann die Variablen nur in den Exponenten sein werden. Nachdem das erkannt worden ist, ist es nötig, dass die anstelle der Unbestimmten einzusetzenden Differentiale so angenommen werden, dass sie nach der Substitution durch Teilung weggeschafft werden können; auf diese Weise wird zumindest eine der beiden Unbestimmten aus der Gleichung eliminiert werden, es werden höchstens ihre Differentiale übrig bleiben.

**§6** Diese Operation gelingt freilich nicht bei allen Gleichungen; aber dennoch habe ich bemerkt, dass drei Arten von Differentialgleichungen zweiten Grades diese zulassen. Die erste Art ist all derer Gleichungen, die nur aus zwei Termen bestehen. Eine andere von diesen erfasst die Gleichungen, in deren einzelnen Termen die Unbestimmten die gleiche Anzahl an Dimensionen festsetzen; aber nicht nur die Unbestimmten, sondern auch ihre Differentiale jeden Grades sind dabei einzuschätzen eine Dimension festzusetzen. Zur dritten Art zähle ich die Gleichungen, in deren einzelnen Termen die eine der beiden Unbestimmten dieselbe Anzahl an Dimensionen erhält; Darauf erstrecken sich dieselben Dinge, die gerade über die Einschätzung der Dimensionen erwähnt worden sind. Alle diese sich auf diese drei Arten erstreckenden Gleichungen werde ich hier lehren zu reduzieren.

§7 Alle sich auf die erste Art beziehenden Gleichungen werden in dieser allgemeinen Formel erfasst:

$$ax^m \mathrm{d}x^p = y^n \mathrm{d}y^{p-2} \mathrm{dd}y,$$

wo d$x$ konstant gesetzt wird. Auch wenn nämlich in einer gewissen Gleichung weder d$x$ noch d$y$ als konstant angenommen wird, sondern ein anderes bestimmtes davon abhängiges Integral, hat es nichts an Schwierigkeit, weil eine Methode bekannt ist, welches Differential konstant war, variabel zu machen und umgekehrt ein anderes bestimmtes konstant. Um aber diese Gleichung zu reduzieren, setze ich

$$x = c^{\alpha v} \quad \text{und} \quad y = c^v t.$$

Es wird

$$\mathrm{d}x = \alpha c^{\alpha v} \quad \text{und} \quad \mathrm{d}y = c^v(\mathrm{d}t + t\mathrm{d}v)$$

sein und daher

$$\mathrm{dd}x = \alpha c^{\alpha v}(\mathrm{dd}v + \alpha \mathrm{d}v^2)$$

und

$$\mathrm{dd}y = c^v(\mathrm{dd}t + 2\mathrm{d}t\mathrm{d}v + t\mathrm{dd}v + t\mathrm{d}v^2).$$

Aber weil d$x$ konstant gesetzt wird, wird $\mathrm{dd}x = 0$ und daher $\mathrm{dd}v = -\alpha \mathrm{d}v^2$ sein. Nachdem dies anstelle von dd$v$ eingesetzt wurde, wird man

$$\mathrm{dd}y = c^v(\mathrm{dd}t + 2\mathrm{d}t\mathrm{d}v + (1-\alpha)t\mathrm{d}v^2)$$

haben. Man setze also diese Werte anstelle von $x$ und $y$ in die vorgelegten Gleichungen ein, sie wird in diese verwandelt werden

$$ac^{\alpha v(m+p)}\alpha^p \mathrm{d}v^p = c^{(n+p-1)v} t^n (\mathrm{d}t + t\mathrm{d}v)^{p-2}(\mathrm{dd}t + 2\mathrm{d}t\mathrm{d}v + (1-\alpha)t\mathrm{d}v^2).$$

§8 Nun muss $\alpha$ so bestimmt werden, dass die Exponentialgrößen durch Teilung weggeschafft werden können. Damit dies geschieht, ist nötig, dass

$$\alpha v(m+p) = (n+p-1)v$$

ist, daher berechnet man $\alpha = \frac{n+p-1}{m+p}$. Die obere Gleichung wird also nach Bestimmung von $\alpha$ in die folgende übergehen:

$$a\left(\frac{n+p-1}{m+p}\right)^p \mathrm{d}v^p = t^n(\mathrm{d}t + t\mathrm{d}v)^{p-2}(\mathrm{dd}t + 2\mathrm{d}t\mathrm{d}v + \frac{m-n+1}{m+p}t\mathrm{d}v^2).$$

Diese hätte eher aus der vorgelegten gefunden werden können, wenn ich

$$x = c^{(n+p-1)v:(m+p)} \quad \text{und} \quad y = c^v t$$

gesetzt hätte. Es ist aber $n+p-1$ die Anzahl der Dimensionen, welche $y$ festsetzt, und $m+p$, welche $x$ festsetzt. $\alpha$ wird also leicht in jedem speziellen Fall bestimmt und man wird sofort die entsprechende Substitution haben. In der gefundenen Gleichung, weil $v$ fehlt, setze man $\mathrm{d}v = z\mathrm{d}t$, es wird

$$\mathrm{dd}v = z\mathrm{dd}t + \mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

sein, aber

$$\mathrm{dd}v = -\alpha\mathrm{d}v^2 = \frac{1-n-p}{m+p}z^2\mathrm{d}t^2.$$

Daher findet man

$$\mathrm{dd}t = -\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}t}{z} + \frac{1-n-p}{m+p}z\mathrm{d}t^2.$$

Nach Einsetzen von diesen wird

$$\begin{aligned}&a\left(\frac{n+p-1}{m+p}\right)^p z^p\mathrm{d}t^p\\ =&t^n(\mathrm{d}t + tz\mathrm{d}t)^{p-2}\left(\frac{1-n-p}{m+p}z\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}t}{z} + 2z\mathrm{d}t^2 + \frac{m-n+1}{m+p}tzz\mathrm{d}t^2\right).\end{aligned}$$

Diese wird durch $\mathrm{d}t^{p-1}$ geteilt

$$\begin{aligned}&a\left(\frac{n+p-1}{m+p}\right)^p z^p\mathrm{d}t\\ =&t^n(1+tz)^{p-2}\left(\frac{1+2m-n+p}{m+p}z\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{d}z}{z} + \frac{m-n+1}{m+p}tz^2\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

geben.

**§9** Es ist also die vorgelegte allgemeine Gleichung

$$ax^m \mathrm{d}x^p = y^n \mathrm{d}y^{p-2}\mathrm{dd}y$$

auf dieses Differential ersten Grades zurückgeführt worden

$$\begin{aligned} &a\left(\frac{n+p-1}{m+p}\right)^p z^{p+1}\mathrm{d}t \\ =&t^n(1+tz)^{p-2}\left(\frac{1+2m-n+p}{m+p}z^2\mathrm{d}t+\frac{m-n+1}{m+p}tz^3\mathrm{d}t-\mathrm{d}z\right), \end{aligned}$$

nachdem die gefundene Gleichung mit $z$ multipliziert wurde. Diese Gleichung kann in einem Schritt aus ihr gefunden werden, nachdem in der ersten Substitution $\int z\mathrm{d}t$ anstelle von $v$ gesetzt wurde. Es muss also

$$x = c^{(n+p-1)\int z\mathrm{d}t:(m+p)}$$

werden und anstelle von $y$ muss $c^{\int z\mathrm{d}t}t$ oder, was auf dasselbe hinausläuft, man setze

$$x = c^{(n+p-1)\int z\mathrm{d}t} \quad \text{und} \quad y = c^{(m+p)\int z\mathrm{d}t}t.$$

Wenn aus der gefundenen Differentialgleichung wiederum die vorgelegte Differentialgleichung zweiten Grades gefunden werden muss, wollen wir sehen, welche Substitutionen anstelle von $z$ und $t$ verwendet werden müssen. Weil $x = c^{(n+p-1)\int z\mathrm{d}t}$ ist, wird $c^{\int z\mathrm{d}t} = x^{1:(n+p-1)}$ sein, woher $y = x^{(m+p):(n+p-1)}t$ ist. Daher hat man $t = yx^{-(m+p):(n+p-1)}$. Darauf, weil $c^{\int z\mathrm{d}t} = x^{1:(n+p-1)}$ ist, wird

$$\int z\mathrm{d}t = \frac{1}{n+p-1}\ln x$$

sein, also

$$z\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{(n+p-1)x}.$$

Aber es ist

$$\mathrm{d}t = x^{-(m+p):(n+p-1)}\mathrm{d}y - \frac{m+p}{n+p-1}yx^{-(m+n+2p-1):(n+p-1)}\mathrm{d}x.$$

Als logische Konsequenz wird man

$$z = \mathrm{d}x : \left[(n+p-1)x^{-(m-n+1):(n+p-1)}\mathrm{d}y - (m+p)yx^{-(m+p):(n+p-1)}\mathrm{d}x\right]$$

finden. Es ist aber klar, wenn $z$ in $t$ oder $t$ in $z$ gegeben ist, dass auch die Relation, die $x$ und $y$ untereinander haben, gefunden werden kann.

**§10** Wir wollen das, was allgemein gefunden wurde, an einem speziellen Beispiel illustrieren. Es sei

$$xdxdy = yddy,$$

welche durch Teilen durch $dy$ auf diese Form

$$xdx = ydy^{-1}ddy$$

zurückgeführt wird. Nachdem dafür das allgemeine angewendet wurde, wird man $a = 1$, $m = 1$, $p = 1$, $n = 1$ haben. Nach Einsetzen von dieser in der Differentialgleichung ersten Grades [§9], wird man die haben, auf die die vorgelegte reduziert wird,

$$\frac{1}{2}z^2 dt = t(1+tz)^{-1}\left(\frac{3}{2}z^2 dt + \frac{1}{2}tz^3 dt - dz\right),$$

welche in

$$z^2 dt + tz^3 dt = 3tz^2 dt + t^2 z^3 dt - 2t dz$$

übergeht. Auf diese Gleichung wird die vorgelegte $xdxdy = yddy$ reduziert, wenn

$$x = c^{\int z dt:2} \quad \text{und} \quad y = c^{\int z dt} t$$

wird. Die Konstruktion der vorgelegten Gleichung hängt aber von der Konstruktion der gefundenen Differentialgleichung ab; wenn diese konstruiert werden kann, wird auch sie konstruiert werden; wenn sie in der Tat integrierbar war, wird auch sie integriert werden können.

**§11** Die zweite Art von Differenzen-Differentialgleichungen, welche ich mit meiner Methode auf Differentialgleichungen ersten Grades reduzieren konnte, umfasst die, die in denselben Termen dieselbe Anzahl an Dimensionen haben, welche die Unbekannten und deren Differentiale festsetzen. Die allgemeine sich darauf beziehende Gleichung ist die folgende

$$ax^m y^{-m-1} dx^p dy^{2-p} + bx^n y^{-n-1} dx^q dy^{2-q} = ddy.$$

In den einzelnen Termen von dieser ist die Dimension der Unbestimmten eine einzige, und es wird $dx$ konstant gesetzt. Auch wenn aber diese angenommene Gleichung aus nur drei Termen besteht, können dennoch, was auch immer einem beliebt, darüber hinaus welche hinzugefügt werden, die Operation bleibt nämlich dieselbe. Es könnten noch $ex^r y^{-r-1} dx^q dy^{2-q}$ und wie viele es beliebt dieser Art hinzugefügt werden, je nachdem ob die speziellen Beispiele, auf welche die allgemeinen zu reduzierende angewendet werden muss, aus mehreren oder wenigen Termen besteht. Es genügt aber drei Terme, wie ich gesagt habe, angenommen zu haben, weil mehrere keine andere Reduktionsmethode erfordern.

**§12** Ich reduziere die vorgelegte Gleichung, indem ich $c^v$ anstelle von $x$ und $c^v t$ anstelle von $y$ einsetze. Weil also

$$x = c^v \quad \text{und} \quad y = c^v t$$

ist, wird

$$\mathrm{d}x = c^v \mathrm{d}v \quad \text{und} \quad \mathrm{d}y = c^v(\mathrm{d}t + t\mathrm{d}v)$$

sein und daher weiter

$$\mathrm{dd}x = c^v(\mathrm{dd}v + \mathrm{d}v^2)$$

und

$$\mathrm{dd}y = c^v(\mathrm{dd}t + 2\mathrm{d}t\mathrm{d}v + t\mathrm{d}v^2 + t\mathrm{dd}v).$$

Weil aber $\mathrm{d}x$ konstant gesetzt wird, wird $\mathrm{dd}x = 0$ sein, daher ist also $\mathrm{dd}v = -\mathrm{d}v^2$ und deswegen wird man

$$\mathrm{dd}y = c^v(\mathrm{dd}t + 2\mathrm{d}t\mathrm{d}v)$$

haben. Man setze diese Werte in die Gleichung anstelle von $x$, $y$, $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ und $\mathrm{dd}y$, sie wird in die folgende transformiert werden:

$$ac^v t^{-m-1}\mathrm{d}v^p(\mathrm{d}t + t\mathrm{d}v)^{2-p} + bc^v t^{-n-1}\mathrm{d}v^q(\mathrm{d}t + t\mathrm{d}v)^{2-q} = c^v(\mathrm{dd}t + 2\mathrm{d}t\mathrm{d}v).$$

Diese wird daher durch $c^v$ geteilt in diese übergehen

$$at^{-m-1}\mathrm{d}v^p(\mathrm{d}t + t\mathrm{d}v)^{2-p} + bt^{-n-1}\mathrm{d}v^q(\mathrm{d}t + t\mathrm{d}v)^{2-q} = \mathrm{dd}t + 2\mathrm{d}t\mathrm{d}v.$$

Weil in dieser $v$ fehlt, setze ich $\mathrm{d}v = z\mathrm{d}t$, es wird

$$\mathrm{dd}v = z\mathrm{dd}t + \mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

sein, aber es ist $\mathrm{dd}v = -\mathrm{d}v^2 = -z^2\mathrm{d}t^2$, also

$$\mathrm{dd}t = -z\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}t}{z}.$$

Daher wird man diese Gleichung erhalten

$$at^{-m-1}z^p\mathrm{d}t^p(\mathrm{d}t+zt\mathrm{d}t)^{2-p}+bt^{-n-1}z^q\mathrm{d}t^q(\mathrm{d}t+zt\mathrm{d}t)^{2-q}=-z\mathrm{d}t^2-\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}t}{z}+2z\mathrm{d}t^2$$

oder diese geordnetere

$$at^{-m-1}z^p\mathrm{d}t(1+zt)^{2-p}+bt^{-n-1}z^q\mathrm{d}t(1+zt)^{2+q}=z\mathrm{d}t-\frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

**§13** Diese Differentialgleichung ersten Grades hätte auf einen Streich aus der vorgelegten gefunden werden können, wenn sofort

$$x=c^{\int z\mathrm{d}t}\quad\text{und}\quad y=c^{\int z\mathrm{d}t}t$$

gesetzt worden wäre; daher wäre

$$\mathrm{d}x=c^{\int z\mathrm{d}t}z\mathrm{d}t\quad\text{und}\quad\mathrm{d}y=c^{\int z\mathrm{d}t}(\mathrm{d}t+tz\mathrm{d}t)$$

gewesen und

$$\mathrm{dd}x=c^{\int z\mathrm{d}t}(z\mathrm{dd}t+\mathrm{d}z\mathrm{d}t+zz\mathrm{d}t^2)=0,$$

woher $\mathrm{dd}t=-z\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}z\mathrm{d}t:z$ wäre. Unter Verwendung davon wird man

$$\mathrm{dd}y=c^{\int z\mathrm{d}t}(z\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}z\mathrm{d}t:z)$$

haben. Es sei dieses Beispiel vorgelegt

$$y^{\alpha+1}\mathrm{dd}y=x^\alpha\mathrm{d}x^2,$$

man verwandle es in

$$\mathrm{dd}y=x^\alpha y^{-\alpha-1}\mathrm{d}x^2.$$

Nachdem dies mit der allgemeinen Gleichung verglichen wurde, wird $a=1$, $b=0$, $m=\alpha$, $p=2$ werden. Wenn also dieses Beispiel, wie die allgemeine Gleichung, reduziert wird, wird man diese Gleichung finden

$$t^{-\alpha-1}z^2\mathrm{d}t=z\mathrm{d}t-\mathrm{d}z:z$$

oder diese

$$t^{-\alpha-1}z^3\mathrm{d}t=z^2\mathrm{d}t-\mathrm{d}z.$$

Wenn diese eine Konstruktion zuließe, könnte auch die Differentialgleichung zweiten Grades aus ihr konstruiert werden. Es ist aber zu bemerken, dass man fast immer zu Differentialgleichungen solcher Art gelangt, die sehr schwer oder überhaupt nicht konstruiert werden können.

**§14** Ich nehme ein anderes Beispiel an,

$$x\mathrm{d}x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x^2 = y^2\mathrm{dd}y,$$

welches wie die Art der allgemeinen Gleichung diese Form annimmt

$$xy^{-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - y^{-1}\mathrm{d}x^2 = \mathrm{dd}y.$$

Man führe darauf die allgemeine Gleichung zurück, und es wird

$$a = 1, \quad m = 1, \quad p = 1, \quad b = -1, \quad n = 0, \quad q = 2$$

sein. Es entspricht also dem vorgelegten Beispiel die folgende Differentialgleichung

$$t^{-2}z\mathrm{d}t(1+zt) - t^{-1}z^2\mathrm{d}t = z\mathrm{d}t - \mathrm{d}z : z.$$

Man multipliziere diese mit $t^2z$ und man wird

$$z^2\mathrm{d}t + z^3t\mathrm{d}t - z^3t\mathrm{d}t = z^2t^2\mathrm{d}t - t^2\mathrm{d}z$$

haben oder

$$z^2\mathrm{d}t = z^2t^2\mathrm{d}t - t^2\mathrm{d}z,$$

die separiert

$$\mathrm{d}z : z^2 = \mathrm{d}t(t^2-1) : tt$$

gibt und integriert diese

$$-1 : z = t + 1 : t - a \quad \text{oder} \quad atz - t = t^2z + z.$$

Es ist aber $z = \mathrm{d}v : \mathrm{d}t$. Deshalb ist

$$at\mathrm{d}v - t\mathrm{d}t = t^2\mathrm{d}v + \mathrm{d}v$$

oder $\mathrm{d}v = t\mathrm{d}t : (at - tt - 1)$. Weil aber $c^v = x$ ist, wird $v = \ln x$ und $t = y : x$ sein, also

$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x : x \quad \text{und} \quad \mathrm{d}t = (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) : xx,$$

als logische Konsequenz ist

$$y\mathrm{d}y + x\mathrm{d}x = ay\mathrm{d}x.$$

Diese Gleichung kann wiederum integriert werden, ich bemerke aber nur den Fall, dass sie, wenn $a = 0$ ist, in die Gleichung des Kreises übergeht.

**§15** Ich nehme nun den Fall an, in dem mehr Terme als in der allgemeinen Gleichung enthalten sind

$$yy\mathrm{d}x^3 + xx\mathrm{d}y^3 - yx\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2 - yx\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y + yx^2\mathrm{d}x\mathrm{dd}y - y^2x\mathrm{d}x\mathrm{dd}y = 0.$$

Dieses Beispiel wird sich auf die oben erörterte Weise reduzieren lassen. Weil $\mathrm{d}x$ konstant gesetzt wird, bleiben die Substitutionen dieselben, natürlich

$$x = c^v; \quad y = c^v t; \quad \mathrm{d}x = c^v \mathrm{d}v; \quad \mathrm{d}y = c^v(\mathrm{d}t + t\mathrm{d}v)$$

und

$$\mathrm{dd}y = c^v(\mathrm{dd}t + 2\mathrm{d}t\mathrm{d}v).$$

Es ist aber $\mathrm{dd}v = -\mathrm{d}v^2$. Nach Einsetzen von diesen und Ordnen der hervorgehenden Gleichung findet man

$$\mathrm{d}t^3 + 2t\mathrm{d}t^2\mathrm{d}v - tt\mathrm{d}t\mathrm{d}v^2 + t\mathrm{d}t\mathrm{d}v^2 + t\mathrm{d}v\mathrm{dd}t - tt\mathrm{d}v\mathrm{dd}t = 0.$$

Weil hier $v$ fehlt, setze man $\mathrm{d}v = z\mathrm{d}t$, es wird wie zuvor

$$\mathrm{dd}t = -z\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}z\mathrm{d}t : z$$

sein. Daher findet man diese in der Ordnung reduzierte Gleichung

$$\mathrm{d}t + 2tz\mathrm{d}t - t\mathrm{d}z + tt\mathrm{d}z = 0.$$

Diese, weil $z$ nur eine Dimension hat, kann mit der vom gefeierten Johann Bernoulli in den *Actis Lips.* angegebenen Methode getrennt werden. Aber ich kann sie und ihr ähnliche ohne eine Substitution sofort integrieren oder auf die folgende Weise auf eine Integralform allein zurückführen.

**§16** Man reduziere unsere Gleichung auf diese

$$\mathrm{d}z + \frac{2z\mathrm{d}t}{t-1} + \frac{\mathrm{d}t}{tt-t} = 0,$$

dass $\mathrm{d}z$ mit keinem Koeffizienten versehen ist, dann nehme man das, womit $z$ versehen ist, nämlich $\frac{2\mathrm{d}t}{t-1}$, dessen Integral durch $2\int\frac{\mathrm{d}t}{t-1}$ ausgedrückt werde. Nun multipliziere man die vorgelegte Gleichung mit $c^{2\int\frac{\mathrm{d}t}{t-1}}$ und man wird

$$c^{2\int\frac{\mathrm{d}t}{t-1}}\mathrm{d}z + \frac{2c^{2\int\frac{\mathrm{d}t}{t-1}}z\mathrm{d}t}{t-1} + \frac{c^{2\int\frac{\mathrm{d}t}{t-1}}\mathrm{d}t}{tt-t} = 0$$

haben. Nun ist aber die Integralgleichung integrierbar gemacht worden, das Integral der zwei ersten Terme ist nämlich $c^{2\int\frac{dt}{t-1}}z$. Es ist also

$$c^{2\int\frac{dt}{t-1}}z + \int\frac{c^{2\int\frac{dt}{t-1}}dt}{tt-t} = a.$$

Aber weil $\int\frac{dt}{t-1} = \ln(t-1)$ ist, wird

$$c^{2\int\frac{dt}{t-1}} = (t-1)^2$$

sein. Also ist

$$(t-1)^2z + \int\frac{(t-1)dt}{t} = a$$

und daher

$$(t-1)^2z + t - \ln t = a.$$

Auf diese Weise können alle Differentialgleichungen, in denen die eine der beiden Variablen niemals mehr als eine Dimension hat integriert werden oder zumindest konstruierbar gemacht werden. Ich habe diese Methode mit Absicht benutzt, damit man besser versteht, von welchem großem Nutzen Exponentialgrößen beim Behandeln von Gleichungen sind.

**§17** Die Gleichung, zu der man gelangt ist, ist diese

$$(t-1)^2z + t - \ln t = a.$$

Diese reduziere man weiter, dass man schließlich wieder eine Gleichung zwischen $x$ und $y$ erhält; weil ja $dv = zdt$ war, wird $z = dv : dt$ sein; deswegen wird die Gleichung in

$$(t-1)^2dv + tdt - dt\ln t = adt$$

übergehen, diese aber in

$$dv = \frac{adt - tdt + dt\ln t}{(t-1)^2}.$$

Diese lässt erneut eine Integration zu; integriert hat sie aber diese Form

$$v = \frac{-a + t - t\ln t}{t-1},$$

nach Addition der Konstanten aber diese

$$v = \frac{b - a + t - bt - t\ln t}{t - 1}.$$

Weil aber $x = c^v$ ist, wird $v = \ln x$ sein. Und weil $y = c^v t$ ist, wird $y = tx$ sein und daher $t = y : x$. Nach Einsetzen von diesen wird man die folgende Gleichung haben

$$\ln x = \frac{bx - ax + y - by - y\ln y + y\ln x}{y - x}.$$

Daher entsteht diese

$$(b - a)x + (1 - b)y = y\ln y - x\ln x.$$

Man setze der Kühne wegen $b - a = f$ und $1 - b = g$; es wird

$$fx + gy = y\ln y - x\ln x$$

sein. Diese ist die Integralgleichung der in §15 vorgelegten. Wenn $f = 0$ und $g = 0$ wird, wird $y\ln y = x\ln x$ sein. Aus diesen findet man durch Nehmen von Zahlen diese $y^y = x^x$.

**§18** Die dritte Art von Gleichungen, die Methode welche zu reduzieren ich hier angebe, umfasst die, in deren einzelnen Termen die eine der beiden Unbestimmten dieselbe Anzahl an Dimensionen hat. Hier sind Fälle zu unterscheiden, je nachdem ob das Differential der Variable von jener, die überall dieselbe Dimension hat, konstant gesetzt wird oder nicht. Auf den ersten Fall bezieht sich die folgende allgemein Gleichung

$$Px^m\mathrm{d}y^{m+2} + Qx^{m-h}\mathrm{d}x^h\mathrm{d}y^{m+2-h} = \mathrm{d}x^m\mathrm{dd}y.$$

In dieser hat $x$ in den einzelnen Termen $m$ Dimensionen und $\mathrm{d}x$ wird konstant gesetzt. Es bezeichnen aber $P$ und $Q$ irgendwelche Funktionen von $y$. Um diese zu reduzieren, ist eine Substitution nötig; es werde nämlich $x = c^v$ und es wird

$$\mathrm{d}x = c^v\mathrm{d}v \quad \text{und} \quad \mathrm{dd}x = c^v(\mathrm{dd}v + \mathrm{d}v^2) = 0$$

sein, also $\mathrm{dd}v = -\mathrm{d}v^2$. Nach Einsetzen von diesen hat man

$$P\mathrm{d}y^{m+2} + Q\mathrm{d}v^h\mathrm{d}y^{m+2-h} = \mathrm{d}v^m\mathrm{dd}y,$$

nachdem natürlich durch $c^{mv}$ geteilt wurde.

**§19** Weil in der gegebenen Gleichung $v$ nicht entdeckt wird, wird durch Einsetzen von $z\mathrm{d}y$ anstelle von $\mathrm{d}v$ reduziert werden. Es wird

$$\mathrm{dd}v = z\mathrm{dd}y + \mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\mathrm{d}v^2 = -z^2\mathrm{d}y^2$$

sein. Daher wird man

$$\mathrm{dd}y = -z\mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}y\mathrm{d}z : z$$

finden. Man setze also in der gefundenen Gleichung anstelle von $\mathrm{d}v$ und $\mathrm{dd}y$ diese gefundenen Werte ein und man wird diese Gleichung haben

$$P\mathrm{d}y^{m+2} + Qz^h\mathrm{d}y^{m+2} = -z^{m+1}\mathrm{d}y^{m+2} - z^{m-1}\mathrm{d}y^{m+1}\mathrm{d}z.$$

Diese geht durch $\mathrm{d}y^{m+1}$ geteilt in diese über

$$P\mathrm{d}y + Qz^h\mathrm{d}y = -z^{m+1}\mathrm{d}y - z^{m-1}\mathrm{d}z.$$

Diese ist von erstem Grad, wie es vorgelegt war. Zu dieser hätte sofort gelangt werden können, wenn

$$x = c^{\int z\mathrm{d}y}$$

gesetzt worden wäre. Daher wäre

$$\mathrm{d}x = c^{\int z\mathrm{d}y} z\mathrm{d}y \quad \text{und} \quad \mathrm{dd}x = c^{\int z\mathrm{d}y}(z^2\mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z\mathrm{d}y + z\mathrm{dd}y) = 0$$

gewesen wäre und daher

$$\mathrm{dd}y = -z\mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z\mathrm{d}y : z.$$

Diese Werte liefern anstelle von $x$, $\mathrm{d}x$, $\mathrm{dd}y$ eingesetzt sofort die gefundene Gleichung.

**§20** Der andere Fall der Gleichungen, die sich auf die dritte Art beziehen, betrachtet die folgende allgemeine Gleichung

$$Px^m\mathrm{d}y^{m+1} + Qx^{m-h}\mathrm{d}x^h\mathrm{d}y^{m-h+1} = \mathrm{d}x^{m-1}\mathrm{dd}x.$$

In dieser Gleichung wird $\mathrm{d}y$ konstant gesetzt, $P$ und $Q$ bezeichnen irgendwelche Funktionen von $y$. Und, wie klar ist, hat $x$ in den einzelnen Termen $m$ Dimensionen. Man setze, wie zuvor, $x = c^v$; es wird

$$\mathrm{d}x = c^v\mathrm{d}v \quad \text{und} \quad \mathrm{dd}x = c^v(\mathrm{dd}v + \mathrm{d}v^2)$$

sein. Nach Einsetzen von diesen in die Gleichung resultiert nach Teilen durch $c^{mv}$ diese Gleichung

$$P\mathrm{d}y^{m+1} + Q\mathrm{d}v^h\mathrm{d}y^{m-h+1} = \mathrm{d}v^{m+1} + \mathrm{d}v^{m-1}\mathrm{dd}v.$$

Damit diese Gleichung weiter reduziert wird, weil $v$ fehlt, setze man $\mathrm{d}v = z\mathrm{d}y$, es wird $\mathrm{dd}v = \mathrm{d}z\mathrm{d}y$ wegen des konstanten $\mathrm{d}y$ sein. Deswegen wird die letzte Gleichung in diese verwandelt werden:

$$P\mathrm{d}y^{m+1} + Qz^h\mathrm{d}y^{m+1} = z^{m+1}\mathrm{d}y^{m+1} + z^{m-1}\mathrm{d}y^m\mathrm{d}z.$$

Diese aber wird, wenn sie durch $\mathrm{d}y^m$ geteilt wird, diese geben

$$P\mathrm{d}y + Qz^h\mathrm{d}y = z^{m+1}\mathrm{d}y + z^{m-1}\mathrm{d}z.$$

Es hängt die Konstruktion der vorgelegten Gleichung von der Konstruktion dieser gefundenen ab.

**§21** Daraus sieht man, glaube ich, ein, wie Differentialgleichungen zweiten Grades, die sich auf eine der drei erörterten Arten beziehen, behandelt werden müssen. Ich räume freilich ein, dass man selten zu solchen Differentialgleichungen gelangt, in denen nicht eine der beiden Unbestimmten fehlt; dennoch glaube ich, dass dies von niemanden aufgrund der Nützlichkeit dieses Gefundenen angegriffen werden wird. Es kann geschehen, dass ein anderes Feld eröffnet wird, dass Probleme suggeriert, deren Auflösung auf solche Gleichungen führt. Ich erinnere mich, irgendwann ein bestimmtes physikalisches Problem lösend, zu dieser Gleichung gelangt zu sein

$$y^2\mathrm{dd}y = x\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Diese hatte zu der Zeit weder von mir noch von anderen, denen ich sie mitgeteilt hatte, auf irgendeine Weise gelöst werden können. Nun aber, weil sie sich sowohl auf die erste als auch die zweite Art bezieht, gelingt ihre Auflösung leicht, wie sich aus §10 sehen lässt.

**§22** Ich habe aber außerdem noch dies darüber, was als konstant anzunehmen ist, für erwähnenswert gehalten: Bei Gleichungen, die zur zweiten Art gezählt wurden, interessiert es nicht, was auch immer für ein Differential konstant angenommen wurde. Es kann nämlich entweder das Differential der einen der beiden Variablen sein, oder das Differential, dass aus den Differentialen jeder der beiden Variablen, wie es beliebt, zusammengesetzt wurde; es sei aber, wie es die Sache erfordert, homogen. Jenes passierte freilich beim allgemeinen Beispiel; aber aus jenen Operationen sieht man zugleich ein, wie, wenn irgendein Differential konstant ist, die Gleichung behandelt werden muss. Anders verhält sich die Sache bei den beiden übrigen Arten; dort ist nämlich nötig, dass das Differential der einen der beiden Variablen konstant gesetzt wurde. Wenn das nicht der Fall war, gelingt die Reduktion mit der erläuterten Methode nicht. In diesen Fällen muss die Konstante unverändert bleiben und die Gleichung in eine andere Form verwandelt werden, in welcher das Differential der einen der beiden Variablen konstant ist.

**§23** Die in der Dissertation erläuterte Methode Differentialgleichungen zweiten Grades auf einfache Differentiale zurückzuführen, besteht in einer geeigneteren Substitution von exponentiellen Größen für die Unbekannten. Sie erstreckt sich aber noch weiter, als hier erklärt wurde. Es können mit ihrer Hilfe unendlich viele Differentialgleichungen dritter Ordnung auf andere, die nur von zweiter Ordnung sind, reduziert werden. Und allgemein werden Differentialgleichung der Ordnung $n$ auf andere zurückgeführt werden, die nur von Ordnung $n-1$ sind. Auch sind hier drei Arten von Differentialgleichungen jeder Ordnung festzusetzen und es sind dieselben, die hier erläutert wurden. Daraus sieht man also auch ein, was für einen großen Nutzen Substitutionen dieser Art beim Behandeln von Differentialgleichungen ersten Grades haben können. Aber darüber braucht hier nicht viel erklärt werden.