Über die Bestimmung von Reihen oder einen neue Methode, die allgemeinen Terme von Reihen zu finden *

Leonhard Euler

§1 Weil das Bildungsgesetz einer Progression, welchem die Terme einer gewissen Reihe folgen, ins Unendliche variieren kann, scheinen nicht nur alle verschiedenen Gattungen von Reihen, sondern auch nicht einmal die Geschlechter, wie weit sie auch auch ausgedehnt werden, aufgezählt werden zu können. Es sind daher zwei oder mehr Reihen gegeben, die, auch wenn sie so viele Terme, wie es jemand wollte, gemeinsame Terme haben, dennoch voneinander verschieden sind und in im höchsten Maße verschiedenen Bildungsgesetzen enthalten sind. Wer das sehr weite Feld der Reihe auch nur gelegentlich betrachtet hat, wird leicht einsehen, dass die Natur einer Reihe nicht bestimmt wird, wie viele ihrer Terme auch immer dargeboten werden. So, wenn gesucht wird, welche Reihe es ist, die mit diesen Termen beginne

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 9, \quad 11, \quad 13, \quad 15,$$

ist die Frage vollkommen unbestimmt; und außer der Reihe der in natürli-

*Originaltitel: "De serierum determinatione seu nova methodus inveniendi terminos generales serierum", erstmals publiziert in „*Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 3* 1753, pp. 36-85", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 14, pp. 463 - 515 ", Eneström-Nummer E189, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz" cher Ordnung fortschreitenden ungeraden Zahlen können unzählige andere Reihen angegeben werden, die mit denselben Termen beginnen; und auch ist dieser Mangel der Bestimmung nicht an eine gewisse Anzahl der gegebenen Terme gebunden, sondern, wie groß auch immer sie war, sie kann allen Reihen gemein sein.

§2 Noch deutlicher wird dies aber erkannt werden, wenn wir die Natur der Reihen auf die Geometrie übertragen. Jede beliebige Reihe kann nämlich durch eine gekrümmte Linie dargestellt werden, deren Ordinaten durch die Terme der Reihen selbst ausgedrückt werden, während deren Abszissen entweder die Indizes oder die Zahlen, die die Ordnung eines jeden Termes bezeichnen, darstellen. Auf diese Weise bestimmt jeder beliebige Term einen Punkt auf der gekrümmten Linie, welcher einer gegebenen Abszisse entspricht. Daher, wenn eine Reihe verlangt wird, die so viele gegebene Terme hat, wie es beliebt, geht die Frage darauf zurückt, dass eine gekrümmte Linie gesucht wird, die durch ebenso viele gegebene Punkte hindurchgeht. Es ist aber klar, wie viele Punkte auch immer gegeben waren, dass immer unzählige gekrümmte Linien angegeben werden können, die durch die einzelnen zugleich hindurchgehen. Nachdem Newton dies über die Parabelkurven der Sonne gezeigt hatte, wenn nicht nur alle algebraischen Kurven, sondern auch die transzendenten zugelassen werden, besteht kein Zweifel, dass die Anzahl der Genüge leistenden Kurven darüber hinaus unendlich mal größer wird.

§3 Umso so verwunderlicher wird es erscheinen, wenn ich sage, dass eine Reihe noch nicht bestimmt wird, auch wenn unzählige ihrer Terme gegebenen sind. So, wenn ich diese Reihe

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \text{etc.}$$

so bestimme, dass ich sage, dass in ihr alle ganzen Zahlen in der natürlichen Reihenfolge enthalten sind, wer glaubt dann nicht, dass diese Reihe völlig bestimmt ist, weil jeder Stelle der Reihe sein Term zugeschrieben worden ist? Denn an der Stelle, der um x Einheiten vom Anfang entfernt ist, wird der Term $= x$ selbst sein, oder der Term, dessen Index $= x$ ist, wird selbst auch $= x$ sein. Sofern aber jene Reihe, so wie es gemacht worden ist, beschrieben wird, steht daher nicht mehr fest, als dass dem Index x, wenn x eine ganze Zahl war, der Term $= x$ entspricht; wenn aber für den Index x eine gebrochene Zahl angenommen wird, ist immer noch kein Grund vorhanden, durch welchen dargetan werden würde, dass der diesem Index x entsprechende Term $= x$ ist. Ich werde aber zeigen, wenn für diese Reihe der dem Index x entsprechende Term $= y$ gesetzt wird, dass es auf unendlich viele Weisen geschehen kann, dass, sooft x eine ganze Zahl war, genauso oft immer $y = x$ wird, auch wenn die gebrochenen für x anzunehmenden Zahlen die Werte von y von x abweichen. Daher, auch wenn alle Terme der Reihe, die ganzzahligen Indizes entsprechen, bestimmt sind, ist es dennoch möglich, die dazwischen liegenden, die gebrochene Indizes haben, auf unendlich viele Weisen zu definieren, sodass die Interpolation dieser Reihe unbestimmt bleibt.

§4 Damit dies deutlicher erkannt wird, ist auf Kreisbögen auszuweichen; weil nämlich, nachdem der halbe Umfang des Kreises, dessen Radius $= 1$ ist, $= \pi$ gesetzt worden ist, der Sinus des Bogens $n\pi = 0$ ist, ist es, sooft n eine ganze Zahl ist, offenbar, wenn $y = x + P \sin \pi x$ ist, während P entweder eine konstante Größe oder irgendeine Funktion von x bezeichnet, und für x nacheinander die ganzzahligen Indizes 1, 2, 3, 4, 5 etc. festgelegt werden, dass dann die Werte von $y = 1, 2, 3, 4, 5$ etc. ein werden, genauso als wenn $P = 0$ wäre. Und dennoch werden die Zwischenterme, die den gebrochenen Indizes entsprechen, diesen Indizes nicht gleich sein. Es sei nämlich eines Beispiels wegen $P = xx$ und man setze $x = \frac{1}{2}$; wegen $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$ wird der dem Index $\frac{1}{2}$ entsprechende Term werden

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}.$$

Es können aber unendlich viele andere Ausdrücke von dieser Art erdacht werden, die gleichermaßen Genüge leisten, von welcher Art dieser ist

$$y = x + P \sin \pi x + Q \sin 2\pi x + R \sin 3\pi x + S \sin 4\pi x + \text{etc.},$$

wodurch die Interpolation um Vieles unbestimmter gemacht wird.

§5 Ein ähnliches Beispiels einer Reihe, die bestimmt erscheinen kann, habe ich schon vor einiger Zeit dargeboten; ich hatte nämlich einen Ausdruck oder eine Funktion von x gefunden, die, wenn anstelle x irgendeine Potenz von 10 gesetzt wird, dem Exponenten dieser Potenz gleich wird, wenn freilich dieser Exponent eine ganze positive Zahl ist. Natürlich war jene Funktion von x, die hier ich mit dem Buchstaben y anzeigen werde, so beschaffen, dass nach Setzen von $x = 1$ $y = 0$ wird und, wenn $x = 10^n$ gesetzt wird, während n eine ganze positive Zahl ist, immer $y = n$ wird; daher schien zu folgen, dass die Funktion y immer der gewönhliche Logarithmus von x sein wird. Nichtsdestoweniger habe ich gezeigt, wenn für x eine gewisse Potenz von zehn eingesetzt wird, dass der Wert von y oftmals nicht unwesentlich vom Logarithmus von x abweicht. Nachdem also diese Reihe aufgestellt worden ist, für die jeweils gilt

$$\begin{array}{cccccccccc} \text{Indizes} & 1, & 10^1, & 10^2, & 10^3, & 10^4, & 10^5, & 10^6 & \text{etc.} \\ \text{und} & & & & & & & & \\ \text{Terme} & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 & \text{etc.} \end{array}$$

reicht es zur Beschreibung der Logarithmen nicht aus, wenn jemand sagt, dass die Logarithmen die Zwischenterme der unteren Reihe sind, die den in den oberen Reihe angenommenen Indizes entsprechen.

§6 Weil also die Natur der Reihe aus einigen ihrer Terme, auch wenn deren Anzahl unendlich ist, nicht bestimmt wird, deshalb weil die Interpolation nichtsdestoweniger unbestimmt bleibt und auf unendlich viele Weisen durchgeführt werden kann, wird leicht erkannt, wie ungewiss all jene Interpolationsmethoden sind, die die Aufgabe aus den Termen allein, die ganzzahlige Indizes haben, durchzuführen lehren. Und natürlich wird auch die Interpolation nicht für sicher gehalten werden können, wenn nicht die Natur der Reihe selbst betrachtet wird und man ihre Beschaffenheit bei der Operation nicht kennt. Aber die Natur der Reihe wird vollkommen erkannt werden, wenn ihr allgemeiner Term oder die Formel, die dem jeden Index x, ob ganzzahlig oder gebrochen oder sogar surdisch, entsprechenden Term darbietet, bekannt war. Denn auf die gleiche Weise werden nicht nur alle Terme der Reihe, die den ganzzahligen Indizes entsprechen, bestimmt werden, sondern auch die Terme, die irgendwelchen nicht ganzzahligen Indizes zukommen, werden ohne Mehrdeutigkeit definiert werden; und so wird die Aufgabe der Interpolation nicht weiter durch irgendeine Ungewissheit behindert.

§7 Es gibt aber außer dem allgemeinen Term unzählig viele andere Arten Reihen zu bilden; dennoch können indes all diese Arten bequem auf drei Geschlechter zurückgeführt werden. Zum ersten Geschlecht rechne ich die Arten Reihen zu bilden, in denen ein jeder Term der Reihe durch den entsprechenden Index allein bestimmt wird; weil dies durch gewisse für dieses Ziele durchzuführende Operationen geleistet wird, wird eine die Operationen im Allgemeinen umfassende Formel der allgemeine Term der Reihe selbst sein, auf welche Weise die Reihe uneingeschränkt und auf vollkommenste Weise bestimmt zu werden, ich bereits angemerkt habe. Auf das zweite Geschlecht erstrecken sich diese Weisen Reihen zu bilden, in denen der Term einer jeden Reihe durch einige vorhergehende Terme nach einer gewissen Regel bestimmt wird, welche Art besonders bei den rekurrenten Reihen verwendet zu werden pflegt. Wann immer aber, um einen jeden Term der Reihe zu finden, nicht nur die vorhergehenden Terme zu berücksichtigen sind, sondern auch der Index selbst mit einbezogen werden muss, lege ich darin das dritte Geschlecht der Bestimmung von Reihen fest.

§8 Wenn jeder beliebige Term der Reihe allein aus dem Index bestimmt wird, dann, ob eine ganze oder gebrochene Zahl für den Index angenommen wird, wird der entsprechende Term gleichermaßen bestimmt und so hat die Interpolation weder etwas an Schwierigkeit noch an Ungewissheit. Wenn aber, wie wir im zweiten Geschlecht festgelegt haben, jeder beliebige Term aus dem vorausgehenden oder aus einigen vorhergehenden bestimmt wird, dann werden zuerst auch, nachdem einige erste Terme nach Belieben angenommen worden sind, freilich die einzelnen Terme, die den ganzzahligen Indizes entsprechen, gefunden werden, die dazwischen liegenden gebrochenen Indizes zukommenden Terme lassen sich hingegen daher nicht definieren, welches selbe freilich über das dritte Geschlecht festzuhalten ist. Obwohl aber auf diese Weise im zweiten und dritten Geschlecht nicht nur alle Terme, die ganzzahligen Indizes entsprechen, angegeben werden, sondern auch ein Bildungsgesetz zwischen jedem Term und seinen vorausgehenden vorgeschrieben wird, welches sich gleichermaßen auf die Terme gebrochener Indizes erstreckt, wird dennoch nicht einmal auf diese Weise die Reihe vollkommen bestimmt, sondern es können für jede beliebige Reihe dieses Geschlechts unendlich viele allgemeine Terme dargeboten werden, die, während sie dieselben Terme für ganzzahlige Indizes liefern, dennoch für die gebrochenen voneinander abweichen.

§9 Weil dies mit Recht paradox scheint, wird es der Mühe wert sein, diesen Mangel der Bestimmung bei Reihen, von denen jeder Term aus den vorhergehenden bestimmt wird, sorgfältiger zu betrachten, Wir wollen also den einfachsten Fall nehmen und uns die Reihe so definiert zu werden vorstellen, dass jeder beliebige Term dem vorausgehenden selbst gleich ist. Wenn daher nun der erste Term der Reihe $= 1$ gesetzt wird, wird der zweite auch $= 1$ sein und alle folgenden, die ganzzahligen Indizes entsprechen, werden auch der Einheit gleich werden und es wird diese Reihe entsprießen:

Indizes:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10	etc.
Terme:	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1	etc.

und es ist offenbar, dass irgendeinem ganzzahligen Index x der Term $= 1$ entspricht. Wie sich aber die den gebrochenen Indizes entsprechenden Terme verhalten werden, wird daher nicht definiert werden; es steht nur dies fest, wenn der dem Index $\frac{1}{2}$ entsprechende Term $= a$ war, dass auch alle Terme, die den Indizes

$$\frac{3}{2}, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{7}{2}, \quad \frac{9}{2} \quad \text{etc.}$$

zukommen, $= a$ sein werden. Denn alle Terme, deren Indizes um die Einheit oder einige Einheiten voneinander verschieden sind, müssen durch dasselbe vorgeschrieben Gesetz einander gleich sein, weil ein jeder vorhergehender Term als der verstanden wird, dessen Index um eine Einheit kleiner ist.

§10 Diese Reihe wird also so definiert, dass, wenn der dem Index x entsprechende Term $= y$ gesetzt wird, der folgende dem Index $x + 1$ entsprechende Term hingegen $= y'$, man $y' = y$ hat; dann wird aber zusätzlich angenommen, wenn $x = 1$ war, dass auch $y = 1$ sein wird. Daher, wenn für diese Reihe der allgemeine Term verlangt wird, muss er eine Funktion solcher Art von x sein, die $= y$ sei, dass, wenn anstelle von x $x + 1$ gesetzt wird, der resultierende Wert der Funktion y, also y', wieder y selbst gleich sein wird, und dass nach Setzen von $x = 1$ auch $y = 1$ wird. Es ist aber offenbar, wenn allgemein $y = 1$ gesetzt wird, dass diese Bedingung Genüge geleistet wird und nicht nur in diesem Fall die Terme, die ganzzahligen Indizes, sondern auch die, diese gebrochenen Exponenten entsprechen, der Einheit gleich sein werden. Aber in der Tat kann diesen Bedingungen auch auf unendlich viele andere Weisen Genüge geleistet werden; wenn nämlich festgelegt wird,

$$y = 1 + \alpha \sin 2\pi x,$$

während π die halbe Peripherie des Kreises bezeichnet, dessen Radius $= 1$ ist, wird sein

$$y' = 1 + \alpha \sin 2\pi x;$$

aber es ist

$$\sin 2\pi(x + 1) = \sin 2\pi x$$

und daher $y' = y$, dann wird aber nach Setzen von $x = 1$ auch $y = 1$ sein. In diesem Fall werden aber in der Tat die Zwischenterme, oder die gebrochenen Indizes entsprechen, nicht weiter er Einheit gleich werden; denn nach Setzen von $x = \frac{1}{4}$ wird $y = 1 + \alpha$ sein.

§11 Weil ja aber hier nicht nur α nach Belieben angenommen werden kann, sondern auch unzählige andere Formeln solcher Art erdacht werden können, die die vorgeschriebenen Bedingungen erfüllen, von welcher Art diese ist

$$y = 1 + \alpha \sin 2\pi x + \beta \sin 4\pi x + \gamma \sin 6\pi x + \text{etc.},$$

ist es klar, dass die Interpolation sogar dieser sehr einfachen Reihe $1 + 1 + 1 +$ etc., sofern sie nicht anders definiert wird, als dass jeder beliebige Term dem vorausgehenden gleich ist, der erste aber durch die Einheit ausgedrückt zu werden gesagt wird, dass die Interpolation im höchsten Maße unbestimmt ist, weil die Zwischenterme, die gebrochene Indizes haben, irgendwelchen Zahlen gleich sein können. Dennoch sind indes, auch wenn unzählige allgemeine Terme für diese Reihe dargeboten werden können, alle in einem gewissen allgemeinen Gesetz enthalten und können ohne Raten oder Eingebung durch Analysis allein gefunden werden. Es kann natürlich eine sich sehr weit erstreckende Methode angegeben werden, mit deren Hilfe es möglich ist, von allen Reihen, deren Terme durch die vorhergehenden, ob ohne Index oder mit Index, definiert werden, die allgemeinen Terme vollkommen allgemeinen zu finden; diese Methode, weil sie nicht nur eine umfassendere Erkenntnis der Reihen an die Hand gibt, sondern auch nicht zu verachtende Zuwäche für die Analysis in sich umfasst, habe ich beschlossen hier sorgfältiger zu entwickeln; für dieses Ziel werde ich die folgenden Probleme behandeln.

PROBLEM 1

§12 Den allgemeinen Term der Reihe zu finden, von welcher jeder beliebige Term dem vorausgehenden gleich sei, der erste Term aber $= 1$ sei.

LÖSUNG

Es sei der allgemeine Term oder der, der dem Index x entspricht, $= y$ und es werde der folgende Term (dessen Index $= x + 1$ ist) $= y'$ gesetzt und es wird $y' = y$ sein müssen; und nach Setzen von $x = 1$ muss $y = 1$ werden. Weil nun y eine gewisse Funktion von x ist, wird durch die Natur des Diferentialkalküls, wenn anstelle von x dann $x + 1$ gesetzt wird, werden

$$y' = y + \frac{dy}{1 \cdot dx} + \frac{ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{d^4y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \text{etc.},$$

nachdem das Differential dx konstant angenommen worden ist. Deshalb muss gelten

$$0 = \frac{dy}{1 \cdot dx} + \frac{ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{d^4y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \text{etc.},$$

Und diese Gleichung enthält ganz und gar alle Genüge leistenden Werte von y, solange die Integration nur so angepasst wird, dass nach Setzen von $x = 1$ auch $y = 1$ wird, oder, was auf dasselbe zurückgeht, dass nach Setzen von $x =$ auch $y = 1$ wird. Die Frage ist deshalb auf die Auflösung dieser Differentialgleichung geführt worden, die nicht nur aus einer unendlichen Anzahl an Termen besteht, sondern auch alle Grade an Differentialen in sich umfasst. Weil aber die Variable y nirgends mehr als eine Dimension hat und nur das Differential der anderen Variablen, sprich dx, welches konstant angenommen worden ist, auftaucht, kann diese Gleichung auf die Weise behandelt werden, welche ich in Miscell. Berol. Tomo VII dargelegt habe. Es werde also, indem z anstelle von $\frac{dy}{dx}$, z^2 anstelle von $\frac{ddy}{dx^2}$ und allgemein z^n anstelle von $\frac{d^ny}{dx^n}$ gesetzt wird, diese algebraische Gleichung gebildet

$$0 = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.}$$

die nach Nehmen von e für die Zahl, deren hyperbolischer Logarithmus $= 1$ ist, in diese endliche Form $0 = e^z - 1$ übergeht. Nun müssen von dieser Gleichung alle Wurzeln, deren Anzahl unendlich ist, ausfindig gemacht oder alle Faktoren der Formel $e^z - 1$ angegeben werden. Es ist aber

$$e^z = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n,$$

nachdem n als eine unendliche Zahl festgelegt worden ist; wenn dieser Wert eingesetzt wird, wird man diese Formel aufzulösen haben

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - 1,$$

von welcher ein einfacher Faktor $\frac{z}{n}$ oder z ist, welchen die unendliche Gleichung sofort zeigt. Um die übrigen zu finden, muss der Lehrsatz zur Hilfe genommen werden, in welchem bewiesen wird, dass ein Faktor der binomischen Formel $a^n - b^n$ dieser ist

$$aa - 2ab\cos\frac{2k\pi}{n} + bb,$$

während k jegliche ganze Zahl bezeichnet. Im gegenwärtigen Fall ist also

$$a = 1 + \frac{z}{n} \quad \text{und} \quad b = 1,$$

woher alle Faktoren der vorgelegten Formel $e^z - 1$ in dieser allgemeinen Form enthalten sind

$$1 + \frac{2z}{n} + \frac{zz}{nn} - 2\left(1 + \frac{z}{n}\right)\cos\frac{2k\pi}{n} + 1$$

oder

$$2\left(1 + \frac{z}{n}\right)\operatorname{versin}\frac{2k\pi}{n} + \frac{zz}{nn};$$

daher wird, indem dieser Faktor durch die konstante Größe $2\operatorname{versin}\frac{2k\pi}{n}$ dividiert wird, der allgemeine Faktor sein

$$= 1 + \frac{z}{n} + \frac{zz}{2nn\operatorname{versin}\frac{2k\pi}{n}}$$

Weil nun n eine unendliche Zahl ist, wird sein

$$\cos\frac{2k\pi}{n} = 1 - \frac{2kk\pi\pi}{nn} \quad \text{und} \quad \operatorname{versin}\frac{2k\pi}{n} = \frac{2kk\pi\pi}{nn};$$

nach Einsetzen dieses Wertes wird der allgemeine Faktor der Formel $e^z - 1$ dieser sein

$$= 1 + \frac{z}{n} + \frac{zz}{4kknn},$$

und, indem anstelle von k nacheinander alle ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4 etc. eingesetzt werden, werden ganz und gar alle Faktoren der Formel $e^z - 1$ entspringen. Aber der erste Faktor z gibt den konstanten Teil des Integrals, der $= C$ sei ;wenn aber die übrigen Faktoren, die auf diese Form reduziert werden

$$4kk\pi\pi + \frac{4kk\pi\pi}{n} z + zz,$$

wenn die mit der Form der Faktoren, welche ich in der zuvor erwähnten Dissertation entwickelt habe,

$$ff - 2fz\cos\varphi + zz$$

vergleichen werden, wird

$$f = 2k\pi \quad \text{und} \quad \cos\varphi = -\frac{k\pi}{n}$$

und $\sin\varphi = 1$ wegen der unendlichen zahl n sein, in welchem Fall $\cos\varphi = 0$ ist. Der daher herstammende Teil des Integrals wird sein

$$\alpha e^{\frac{-2kk\pi\pi}{n}x} \sin 2k\pi x + \mathfrak{A} e^{\frac{-2kk\pi\pi}{n}x} \cos 2k\pi x$$

oder wegen $n = \infty$

$$\alpha \sin 2k\pi x + \mathfrak{A} \cos 2k\pi x,$$

Nachdem also für k nacheinander alle ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4 etc. eingesetzt worden sind, wird das Integral der gefundenen Gleichung

$$0 = \frac{dy}{1 \cdot dx} + \frac{ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{d^4y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x^4} + \text{etc.}$$

in der folgenden Form ausgedrückt hervorgehen

$$\begin{aligned} y = C &+ \alpha \sin 2\pi x + \mathfrak{A} \cos 2\pi x \\ &+ \beta \sin 4\pi x + \mathfrak{B} \cos 4\pi x \\ &+ \gamma \sin 6\pi x + \mathfrak{C} \cos 6\pi x + \text{etc.} \end{aligned}$$

Nun werde die Konstante C so bestimmt, dass nach Setzen von $x = 0$ dann $y = 1$ wird, und es wird der allgemeine Term der vorgelegten Reihe aufgefunden werden als

$$\begin{aligned} y = 1 &+ \alpha \sin 2\pi x + \mathfrak{A} (\cos 2\pi x - 1) \\ &+ \beta \sin 4\pi x + \mathfrak{B} (\cos 4\pi x - 1) \\ &+ \gamma \sin 6\pi x + \mathfrak{C} (\cos 6\pi x - 1) + \text{etc.} \end{aligned}$$

Welche Werte also auch immer anstelle von α, β, γ, δ etc., $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. eingesetzt werden, es wird immer eine Formel hervorgehen, welche den allgemeinen Term der vorgelegten Reihe darbietet.
Q. E. I.

Korollar 1

§13 Wenn der erste Term, welchem alle übrigen, die ganzzahlige Exponenten haben, gleich sind, nicht die Einheit, sonden irgendeine Größe sein muss, wird der allgemeine Term der Reihe y oder der Term, der dem Index x entspricht, aufgefunden als

$$\begin{aligned} y = a + \alpha\ \sin 2\pi x\ + \beta\ \ \sin 4\pi x\ + \gamma \sin 6\pi x\ + \delta\ \ \sin 8\pi x + \text{etc.} \\ + \mathfrak{A} \cos 2\pi x + \mathfrak{B} \cos 4\pi x + \mathfrak{C} \cos 6\pi x + \mathfrak{D} \cos 8\pi x + \text{etc.} \end{aligned}$$

und der Term, der einen ganzzahligen Index hat, wird sein

$$= a + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \text{etc.}$$

KOROLLAR 2

§14 Weil Sinus und Kosinus der Bogen $4\pi x$, $6\pi x$, $8\pi x$ etc. durch Potenzen von $\sin 2\pi x$ und $\cos 2\pi x$ ausgedrückt werden können und umgekehrt alle rationalen Funktionen, oder welche keine zweideutigen Bedeutungen haben, durch Reihen von dieser Art, wie wir eine für y gefunden haben, dargeboten werden können, werden wir den werden allgemeinen Term y definieren können, dass wir sagen, dass y irgendeine Funktion von $\sin 2\pi x$ und $\cos 2\pi x$ ist, solange nur keine Formeln von dieser Art

$$\sqrt{1 \pm \cos 2\pi x}$$

und andere ähnliche auftauchen, die Sinus oder Kosinus subvielfacher Winkel von $2\pi x$ involvieren.

KOROLLAR 3

§15 Wenn, nachdem also diese Fälle ausgeschlossen worden sind, wir $\sin 2\pi x = p$ und $\cos 2\pi x = q$ setzen, wird y irgendeiner Funktion von p und q gleich sein; daher wird diese unendliche Differentialgleichung

$$0 = \frac{dy}{1 \cdot dx} + \frac{ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{d^4y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \text{etc.}$$

im Allgemeinen so integriert werden, dass y irgendeine Funktion von p und q ist.

KOROLLAR 4

§16 Wenn wir aber $\sin \pi x = r$ und $\cos \pi x = s$ nennen, wird $p = 2rs$ und $q = rr - ss$ sein und die Funktion von p und q werden Funktionen gerader Dimensionen von r und s sein. Daher wird aus jener unendlichen Differentialgleichung der Wert von y im Allgemeinen irgendeiner Funktion von geraden Dimensionen von r und s gleich werden, wo es anzumerken ist, dass wegen des ganzen Sinus $= 1$ auch $rr + ss = 1$ ist.

KOROLLAR 5

§17 Es werde $\frac{x}{a}$ anstelle von x gesetzt, dass man diese Gleichung hat

$$0 = \frac{ady}{1 \cdot dx} + \frac{a^2ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{a^3d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{a^4d^4y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \text{etc.}$$

Wenn wir nun festlegen

$$\sin \frac{\pi x}{a} = r \quad \text{und} \quad \cos \frac{\pi x}{a} = s.$$

wird das Integral dieser Gleichung so beschrieben werden, dass $y =$ irgendeiner Funktion von geraden Dimensionen von r und s ist.

KOROLLAR 6

§18 Es können also zwei Formeln für den Wert dieses Integrals dargeboten werden, von welchen die eine diese ist

$$y = \frac{A+Br^2+Crs+Ds^2+Er^4+Fr^3s+Gr^2s^2+Hrs^3+Is^4+\text{etc.}}{\alpha+\beta r^2+\gamma rs+\delta s^2+\varepsilon r^4+\zeta r^3s+\eta r^2s^2+\theta rs^3+\iota s^4+\text{etc.}}$$

Die andere Form wird hingegen diese sein

$$y = \frac{Ar+Bs+Cr^3+Dr^2s+Ers^2+Fs^3+Gr^5+\text{etc.}}{\alpha r+\beta s+\gamma r^3+\delta r^2s+\varepsilon rs^2+\zeta s^3+\eta r^5+\text{etc.}}$$

Korollar 7

§19 Welcher Wert von dieser Art auch immer für y in der Gleichung

$$0 = \frac{ady}{1 \cdot dx} + \frac{a^2ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{a^3d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{a^4d^4y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \text{etc.}$$

eingesetzt wird, wird die identische Gleichung hervorgehen oder eine Reihe entstehen, deren Summe $= 0$ sein wird. Für die ununterbrochenen Differentiationen ist aber festzuhalten, dass gilt

$$\frac{dr}{dx} = \frac{\pi s}{a} \quad \text{und} \quad \frac{ds}{dx} = -\frac{\pi r}{a}$$

und daher werden sich durch die Substitution die Differentiale dx überall gegenseitig aufheben.

Bemerkung 1

§20 Es verdienen aber auch die Faktoren angemerkt zu werden, in welche der unendliche der algebraische Ausdruck

$$\frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{z^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \text{etc.}$$

oben aufgelöst worden ist. Weil nämlich der erste einfache Faktor $= z$ ist und die übrigen trinomialen Faktoren in dieser allgemeinen Form enthalten sind

$$a+\frac{z}{n}+\frac{zz}{4kk\pi\pi},$$

wenn anstelle von k nacheinander die Zahlen 1, 2, 3, 4 eingesetzt werden, wollen wir der Kürze wegen festlegen

$$Z=\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1\cdot 2}+\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\text{etc.}$$

und es wird durch unendlich viele Faktoren sein

$$Z=z\left(1+\frac{z}{n}+\frac{zz}{4\pi\pi}\right)\left(1+\frac{z}{n}+\frac{zz}{16\pi\pi}\right)\left(1+\frac{z}{n}+\frac{zz}{36\pi\pi}\right)\left(1+\frac{z}{n}+\frac{zz}{64\pi\pi}\right)\text{etc.},$$

die Anzahl welcher Faktoren, nachdem der erste herausgenommen worden ist, unendlich und $=\frac{1}{2}n$ ist. Es sei also $\frac{1}{2}n=m$ oder $n=2m$ und es werde $z=2v$ gesetzt; es wird sein

$$\begin{aligned}&\frac{2v}{1}+\frac{2^2v^2}{1\cdot 2}+\frac{2^3v^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{2^4v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\text{etc.}\\ =2v&\left(1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{\pi\pi}\right)\left(1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{4\pi\pi}\right)\left(1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{9\pi\pi}\right)\left(1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{16\pi\pi}\right)\text{etc.}\end{aligned}$$

und daher wird das folgende Produkt unendlich vieler Faktoren, deren Anzahl $=m$ ist, sein

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{\pi\pi}\right)\left(1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{4\pi\pi}\right)\left(1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{9\pi\pi}\right)\left(1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{16\pi\pi}\right)\text{etc.}\\ &=1+\frac{2}{1\cdot 2}v+\frac{4}{1\cdot 2\cdot 3}v^2+\frac{8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}v^3+\frac{16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}v^5+\text{etc.}\end{aligned}$$

Wenn daher nun jenes Produkt tatsächlich entwickelt wird, weil die Anzahl der Faktoren $= m$ ist, während m eine unendliche Zahl ist, wird hervorgehen

$$\begin{aligned}1+v+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{vv}{mm}+\frac{vv}{\pi\pi}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{etc.}\right)\\+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{v^3}{m^3}+\frac{(m-1)v^3}{m\pi\pi}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{etc.}\right)\\\text{etc.,}\end{aligned}$$

welche Terme mit der schon gefundenen Reihe verglichen geben werden

$$\begin{aligned}1=\frac{2}{1\cdot 2},\quad \frac{1}{1\cdot 2}\quad+\frac{1}{\pi\pi}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\text{etc.}\right)=\frac{4}{1\cdot 2\cdot 3},\\\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{\pi\pi}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\text{etc.}\right)=\frac{8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\end{aligned}$$

Daher hat man bei jeder der beiden

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\text{etc.}=\frac{\pi\pi}{6}$$

welches dieselbe Summation ist, die ich schon vor einigen Jahren als erster gefunden hatte und auch mit mehreren Beweisen bestätigt hatte. Im Übrigen ist es daher klar, auch wenn in diesen Faktoren die Zahl m unendlich ist, dass es dennoch nicht möglich ist, den einen Term $\frac{v}{m}$ wegzulassen, weil in der Entwicklung wegen der unendlichen Vervielfachung aus den unendlichen kleinen Termen $\frac{v}{m}$ endlich Terme hervorgehen. Wann immer aber jeder beliebige Term einzeln betrachtet wird, wie wir es bei der Bildung des Integrals getan haben, dann war es ohne einen Fehler möglich gewesen, diese unendlich kleinen Terme wegzulassen.

BEMERKUNG 2

Es werden sich auch die höheren Potenzen der Terme der Reihe

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \text{etc.}$$

aus dieser Quelle summieren lassen und es werden dieselben Ausdrüche hervorgehen wie die, die ich schon einst gefunden hatte. Damit aber die Rechnung nicht allzu lang wird, wird sie auf die folgende Weise leicht erledigt werden können. Es werde festgelegt

$$V = 1 + \frac{2v}{1 \cdot 2} + \frac{2^2 v^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2^3 v^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2^4 v^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \text{etc.};$$

es wird sein

$$V = \frac{e^{2v} - 1}{2v}$$

und auch

$$\frac{dV}{Vdv} = \frac{2e^{2v}}{e^{2v} - 1} - \frac{1}{v},$$

welche auf diese gefälligere Form zurückgeführt wird

$$\frac{dV}{Vdv} = \frac{2e^{v}}{e^{v} - e^{-v}} - \frac{1}{v} = \frac{1 + \frac{v}{1} + \frac{v^2}{1 \cdot 2} + \frac{v^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{v^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.}}{\frac{v}{1} + \frac{v^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{v^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{v^7}{1 \cdot 2 \cdots 7} + \text{etc.}} - \frac{1}{v},$$

sodass gilt

$$\frac{dV}{Vdv} - 1 = \frac{1 + \frac{v^2}{1 \cdot 2} + \frac{v^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{v^6}{1 \cdot 2 \cdots 6} + \text{etc.}}{\frac{v}{1} + \frac{v^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{v^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{v^7}{1 \cdot 2 \cdots 7} \text{etc.}} - \frac{1}{v}$$

oder

$$\frac{dV}{Vdv} - 1 = \frac{\frac{2v}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{4v^3}{1\cdot 2\cdots 5} + \frac{4v^5}{1\cdot 2\cdots 7} + \frac{8v^7}{1\cdot 2\cdots 9} + \text{etc.}}{1 + \frac{v^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdots 5} + \frac{v^6}{1\cdot 2\cdots 7} + + \frac{v^8}{1\cdot 2\cdots 9} + \text{etc.}} - \frac{1}{v}.$$

Es werde festgelegt

$$\frac{dV}{Vdv} = 1 + \mathfrak{A}v - \mathfrak{B}v^3 + \mathfrak{C}v^5 - \mathfrak{D}v^7 + \mathfrak{E}v^9 - \text{etc.};$$

es wird sein

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}, \\
\mathfrak{B} &= \frac{\mathfrak{A}}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{4}{1\cdot 2\cdots 5}, \\
\mathfrak{C} &= \frac{\mathfrak{B}}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{\mathfrak{A}}{1\cdot 2\cdots 5} + \frac{6}{1\cdot 2\cdots 7}, \\
\mathfrak{D} &= \frac{\mathfrak{C}}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{\mathfrak{B}}{1\cdot 2\cdots 5} + \frac{\mathfrak{A}}{1\cdot 2\cdots 7} - \frac{8}{1\cdot 2\cdots 9} \\
& \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Nachdem diese Werte gefunden worden sind, werde diese eine durch Faktoren ausgedrückte Form der Größe V betrachtet

$$V = \left(1 + \frac{v}{m} + \frac{vv}{1\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{v}{m} + \frac{vv}{4\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{v}{m} + \frac{vv}{9\pi\pi}\right)\text{etc.},$$

aus welcher man durch Differentiation findet

$$\frac{dV}{Vdv} = \frac{\frac{1}{m} + \frac{2v}{1\pi\pi}}{1 + \frac{v}{m} + \frac{vv}{1\pi\pi}} + \frac{\frac{1}{m} + \frac{2v}{4\pi\pi}}{1 + \frac{v}{m} + \frac{vv}{4\pi\pi}} + \frac{\frac{1}{m} + \frac{2v}{9\pi\pi}}{1 + \frac{v}{m} + \frac{vv}{9\pi\pi}} + \text{etc.}$$

Allgemein ist aber

$$\frac{\frac{1}{m}+\frac{2v}{\lambda\pi\pi}}{1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{\lambda\pi\pi}} = \frac{1}{m} + \frac{2}{\lambda\pi\pi}v - \frac{3}{m\lambda\pi\pi}v^2 + \frac{4}{m^2\lambda\pi\pi}v^3 - \text{etc.}$$
$$\qquad\qquad - \frac{1}{mm} \qquad + \frac{1}{m^3} \qquad - \frac{1}{m^4}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{2}{\lambda\lambda\pi^4}.$$

Weil aber m eine unendliche Zahl ist und selbiger die Zahl der Faktoren gleich ist, werden nach Herausnehmen des ersten Termes die übrigen durch m dividierten ohne Fehler ausgelassen werden können, sodass ist

$$\frac{\frac{1}{m}+\frac{2v}{\lambda\pi\pi}}{1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{\lambda\pi\pi}} = \frac{1}{m} + \frac{2v}{\lambda\pi\pi} - \frac{2v^3}{\lambda^2\pi^4} + \frac{2v^5}{\lambda^3\pi^6} - \frac{2v^7}{\lambda^4\pi^8} + \text{etc.};$$

nachdem also für λ nacheinander die Quadratzahlen 1, 4, 9, 16 etc. eingesetzt wurden und diese Reihen, deren Anzahl m ist, zu einer Summe gesammelt worden sind, wird aufgefunden werden

$$\begin{aligned}\frac{dV}{Vdv} = 1 &+ \frac{2v}{\pi\pi}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{etc.}\right)\\ &- \frac{2v^3}{\pi^4}\left(1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{16^2}+\frac{1}{25^2}+\text{etc.}\right)\\ &+ \frac{2v^5}{\pi^6}\left(1+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{16^3}+\frac{1}{25^3}+\text{etc.}\right)\\ &- \frac{2v^7}{\pi^8}\left(1+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{16^4}+\frac{1}{25^4}+\text{etc.}\right)\\ &\qquad\text{etc.}\end{aligned}$$

Wenn wir daher nun diese Reihe mit der zuerst gefundenen vergleichen, werden wir haben

$$
\begin{aligned}
1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\text{etc.} &= \frac{1}{2}\mathfrak{A}\,\pi^2 = \frac{1}{6}\,\pi^2,\\
1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{16^2}+\text{etc.} &= \frac{1}{2}\mathfrak{B}\,\pi^4 = \frac{1}{90}\,\pi^4,\\
1+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{16^3}+\text{etc.} &= \frac{1}{2}\mathfrak{C}\,\pi^6 = \frac{1}{945}\,\pi^6,\\
1+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{16^4}+\text{etc.} &= \frac{1}{2}\mathfrak{D}\,\pi^8 = \frac{1}{9450}\,\pi^8
\end{aligned}
$$

etc.

Und auf diese Weise werden die schon einst von mir dargebotenen Summationen noch mehr bestätigt, weil einigen das Prinzip, das ich damals gebrauchte habe, zu schlüpfrig erschien.

PROBLEM 2

§22 Den allgemeinen Term der Reihe, von welcher jeder beliebige Term den vorhergehenden um eine gegebene Größe überschreite und von welcher der erste Term gegeben sei.

LÖSUNG

Es sei der erste Term $= a$ und der Übertrag eines jeden Termes übr den vorausgehenden sei $= g$; die den ganzzahligen Indizes entsprechenden Terme werden diese sein

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \\
a, & a+g, & a+2g, & a+3g, & a+4g, & a+5g, & a+6g & \text{etc.},
\end{array}
$$

so dass dem ganzzahligen Index x der Term $y = a + (x-1)g$ zukommt. Aber, während x irgendeine ganze Zahl ist, finden unendlich viele andere Formeln für y ebenfalls einen Platz. Es sei nämlich y' der dem Index $x+1$

entsprechende Term; es wird

$$y' = y + \frac{dy}{1 \cdot dx} + \frac{ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{d^4y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \text{etc.}$$

Weil nun nach der Annahme $y' = y + g$ sein muss, wird sein

$$g = \frac{dy}{1 \cdot dx} + \frac{ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{d^4y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \text{etc.}$$

Obwohl ich die Auflösung von Gleichungen von dieser Art, die außer den Termen, die die Differentiale von y enthalten, entweder ein konstanter Term oder irgendeine Funktion von x vorhanden ist, schon vor einiger Zeit angegeben habe, wird es dennoch zuträglich sein, durch die Substitution $y = gx + u$ diesen Term g zu beseitigen; es wird nämlich sein

$$dy = gdx + du, \quad ddy = ddu, \quad d^3y = d^3u \quad \text{etc.},$$

wegen des konstanten dx sein. Es wird also werden

$$0 = \frac{du}{1 \cdot dx} + \frac{ddu}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{d^3u}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{d^4u}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \text{etc.}$$

Weil diese Gleichung mit der übereinstimmt, die wir im vorhergehenden Problem gefunden haben, wenn wir $\sin \pi x = r$ und $\cos \pi x = s$ setzen, wird u irgendeine Funktion von geraden Dimensionen von r und s sein, von welcher Art wir sie in §18 dargeboten haben; und nach Finden von dieser wird der gesuchte allgemeine Term $y = A + gx + u$ sein, solange die Konstante A so definiert wird, dass nach Setzen von $x = 1$ dann $y = a$ wird.
Q.E.I.

PROBLEM 3

§23 Den allgemeinen Term der Reihe zu finden, von welcher jeder beliebige Term hervorgehe, wenn der vorausgehende mit einer gegebenen Zahl m multipliziert wird, und von welcher der erste Term $= a$ sei.

LÖSUNG

Also werden die Terme dieser Reihe, die ganzzahlige Indizes haben, die folgende geometrische Progression festlegen

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\ a, & ma, & m^2s, & m^3a, & m^4a, & m^5a & \text{etc.,} \end{array}$$

sodass dem ganzzahligen Index x der Term am^{x-1} entspricht. Es sei also allgemein y der dem Index x entsprechende Term und y' der dem $x+1$ zukommende Term und es wird $y' = my$ sein. Aber es ist

$$y' = y + \frac{dy}{1 \cdot dx} + \frac{ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{d^4y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \text{etc.} = my.$$

Um diese Gleichung aufzulösen, werde gemäß der gegebenen Vorschriften 1 für y, z für $\frac{dy}{dx}$, z^2 für $\frac{ddy}{dx^2}$ etc. gesetzt, dass die folgende algebraische Gleichung hervorgeht.

$$m = 1 + \frac{z}{1} + \frac{zz}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.,}$$

deren einzelne Wurzeln ausfindig gemacht werden müssen. Es wird aber $m = e^{\lambda}$ sein; aber es sei der hyperbolische Logarithmus von $m = \lambda$, dass $m = e^{\lambda}$ und daher $e^{\lambda} - e^{z} = 0$ ist. Weil aber nach Nehmen einer unendlichen Zahl für n gilt

$$e^{\lambda} = \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n \quad \text{und} \quad e^{z} = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n,$$

wird man diese Gleichung haben, deren Wurzeln ausfindig zu machen sind

$$\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = 0,$$

von welcher freilich sofort die eine Wurzel $z - \lambda = 0$ bekannt ist, woher man den Teil $y = \alpha e^{\lambda x} = \alpha m^x$ wegen $e^{\lambda} = m$ erhalten wird. Die übrigen Wurzeln sind imaginär und in diesem trinomischen Faktor enthalten

$$\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)\left(1 + \frac{z}{n}\right)\cos\frac{2k\pi}{n} + \left(1 + \frac{z}{n}\right)^2,$$

während k freilich irgendeine ganze Zahl ist; diese Form geht über in diese

$$2 + \frac{2\lambda}{n} - 2\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)\cos\frac{2k\pi}{n} + \frac{\lambda\lambda}{nn} - \frac{2z}{n} - \frac{2z}{n}\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)\cos\frac{2k\pi}{n} + \frac{zz}{nn}.$$

Aber wegen der unendlichen Zahl n ist

$$\cos\frac{2k\pi}{n} = 1 - \frac{2kk\pi\pi}{nn}.$$

Nachdem also jene Form mit n multipliziert worden ist, wird der allgemeine Faktor sein

$$= 2n(n+\lambda)\left(1 - \cos\frac{2k\pi}{n}\right) + \lambda\lambda + 2nz\left(1 - \cos\frac{2k\pi}{n}\right) - 2\lambda z\cos\frac{2k\pi}{n} + zz$$

$$= \lambda\lambda + 4kk\pi\pi + \frac{4kk\pi\pi z}{n} - 2\lambda z + zz,$$

nachdem die verschwindenden Terme vernachlässigt worden sind; in Anbetracht dessen kann auch der Term $\frac{4kk\pi\pi z}{n}$ weggelassen werden, so dass der allgemeine Faktor ist

$$\lambda\lambda + 4kk\pi\pi - 2\lambda z + zz,$$

und die Anzahl dieser Faktoren, wenn für k nacheinander die Zahlen 1, 2, 3, 4 etc. eingesetzt wird, wird $= \frac{n}{2}$ sein. Aber diese Form wird mit meiner in Tom. VII Miscell. angegebenen allgemeinen Form

$$ff - 2fz\cos\varphi + zz$$

verglichen geben

$$f = \sqrt{\lambda\lambda + 4kk\pi\pi} \quad \text{und} \quad \cos\varphi = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda\lambda + 4kk\pi\pi}}$$

und daher

$$\sin\varphi = \frac{2k\pi}{\sqrt{\lambda\lambda + 4kk\pi\pi}}.$$

Daher entsprießt dieser Teil des Integrals y

$$y = e^{\lambda x}(\alpha \sin 2k\pi x + \mathfrak{A}\cos 2k\pi x).$$

nachdem also für k nacheinander die Werte eingesetzt worden sind, wird wegen $e^{\lambda} = m$ aufgefunden werden

$$y = m^x \left\{ \begin{matrix} C + \alpha\sin 2\pi x + \beta\sin 4\pi x + \gamma\sin 6\pi x + \text{etc.} \\ +\mathfrak{A}\cos 2\pi x + \mathfrak{B}\cos 4\pi x + \mathfrak{C}\cos 6\pi x + \text{etc.} \end{matrix} \right\}.$$

Daher, weil für $x = 1$ gesetzt $y = a$ werden muss, wird gelten

$$a = m(C + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \text{etc.}),$$

woher die Konstante C definiert wird. Oder wenn nach Setzen von $\sin \pi x = r$ und $\cos \pi x = s$ Q irgendeine Funktion von geraden Dimensionen von r und s ist, wird der gesuchte allgemeine Term $y = m^x Q$ sein.
Q.E.I.

Korollar 1

§24 Bei einer geometrischen Progression, sofern sie nur so beschrieben wird, dass jeder Term zum vorhergehenden ein konstantes Verhältnis zu haben gesagt wird, ist also die Interpolatioon nicht bestimmt, weil die Zwischenterme auf unendlich viele verschiedene Weisen ausgedrückt, ja sogar jeden Wert annehmen können.

Korollar 2

§25 Von dieser unendlichen Differentialgleichung

$$(m-1)y = \frac{dy}{1 \cdot dx} + \frac{ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{d^4y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \text{etc.}$$

kann also das vollständige Integral allgemeinen ausgedrückt werden. Wenn nämlich, nachdem $\sin \pi x = r$ und $\cos \pi x = s$ gesetzt worden ist und Q irgendeine gerade Funktion von r und s bezeichnet, wird $y = m^x Q$ und daher $m^{-x} y$ irgendeiner geraden Funktion von geraden Dimensionen von r und s gleich.

KOROLLAR 3

§26 Wenn für x dann $\frac{x}{a}$ geschrieben wird, wird diese Gleichung hervorgehen

$$(m-1)y = \frac{ady}{1 \cdot dx} + \frac{aaddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{a^3 d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{a^4 d^4 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \text{etc.}$$

Um diese zu integrieren setze man

$$\sin \frac{\pi x}{a} = r \quad \text{und} \quad \cos \frac{\pi x}{a} = s$$

und es bedeute Q irgendeine Funktion von geraden Dimensionen von r und s, so dass Q denselben Wert beibehält, auch wenn für r und s entsprechend $-r$ und $-s$ geschrieben werden. Danach wird $y = m^{x:a}Q$ sein.

KOROLLAR 4

§27 Und auch die Lösung dieses Problems konnte auf die Lösung des ersten Problems zurückgeführt werden. Weil nämlich $y' = my$ sein muss, wird $\log y' = \log y + \log m$ sein. Es werde $\log y = v$ gesetzt, dass $\log y' = v'$ ist, und es werde $\log m = \lambda$; es wird $v' = v + \lambda$ sein müssen, woher wegen

$$v' = v + \frac{dv}{1 \cdot dx} + \frac{ddv}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{d^3 v}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \text{etc.}$$

wird

$$\lambda = \frac{dv}{1 \cdot dx} + \frac{ddv}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{d^3 v}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{d^4 v}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \text{etc.}$$

und nach Setzen von $v = u + \lambda x$ wird man haben

$$0 = \frac{du}{1 \cdot dx} + \frac{ddu}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{d^3 u}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{d^4 u}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \text{etc.,}$$

welche die Gleichung ist, zu welcher wir im ersten Problem gelangt sind. Wenn daher also $\sin \pi x = r$ und $\cos \pi x = s$ gesetzt wird und Q eine Funktion von geraden Dimensionen von r und s bezeichnet, wird $u = Q$ sein und daher

$$v = \lambda x + Q = \log y = x \log m + Q.$$

Deshalb hat man durch Nehmen von Zahlen $y = m^x e^Q$; dort, weil e^Q auch eine Funktion von geraden Dimensionen von r und s ist, wenn für sie Q geschrieben wird, wird, wie wir zuvor gefunden haben, $y = m^x Q$ sein.

Bemerkung

§28 Weil wir ja alle Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$m = 1 + \frac{z}{1} + \frac{zz}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.}$$

gefunden haben, werden wir daher alle Faktoren dieses Unendlichen Ausdruckes

$$Z = 1 + \frac{z}{1(1-m)} + \frac{zz}{1 \cdot 2(1-m)} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3(1-m)} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4(1-m)} + \text{etc.}$$

darbieten können. Denn nach Setzen von $\log m = \lambda$ wird der erste einfache Faktor $1 - \frac{z}{\lambda}$ sein und die übrigen trinomialen Faktoren werden in dieser allgemeinen Form enthalten sein

$$1 + \frac{4kk\pi\pi}{n(\lambda\lambda + 4kk\pi\pi)} - \frac{2\lambda z - zz}{\lambda\lambda + 4kk\pi\pi},$$

welche in diese verwandelt wird

$$1+\frac{z}{n}-\frac{\lambda\lambda z}{n(\lambda\lambda+4kk\pi\pi)}-\frac{2\lambda z-zz}{\lambda\lambda+4kk\pi\pi},$$

wenn anstelle von k nacheinander die Zahlen 1, 2, 3, 4 etc. eingesetzt werden und n eine unendlich großZahl ist, deren Hälfte $\frac{n}{2}$ die Anzahl der Faktoren selbst darbietet. Es sei der Kürze wegen

$$\lambda\lambda+4kk\pi\pi=\Phi$$

und es wird sein

$$Z=\left(1-\frac{z}{\lambda}\right)\left(1+\frac{z}{n}-\frac{\lambda\lambda z}{n\Phi}-\frac{2\lambda z}{\Phi}+\frac{zz}{\Phi}\right),$$

wo der zweite Faktor den Platz aller unendlich vielen Faktoren, die aus der Variation der Größe Φ aus ihm entsprießen. Nachdem also Logarithmen genommen und diese differenziert worden sind, wird erhalten werden

$$\frac{dZ}{Zdz}=\frac{-1}{\lambda-z}+\frac{\frac{1}{n}-\frac{\lambda\lambda}{n\Phi}-\frac{2\lambda}{\Phi}+\frac{2z}{\Phi}}{1+\frac{z}{n}-\frac{\lambda\lambda z}{n\Phi}-\frac{2\lambda z}{\Phi}+\frac{zz}{\Phi}}.$$

Und nachdem diese Terme in unendliche Reihen aufgelöst worden sind

$$\begin{array}{rllllllll}
\frac{dZ}{Zdz}= & -\frac{1}{\lambda} & -\frac{z}{\lambda^2} & -\frac{zz}{\lambda^3} & -\frac{z^3}{\lambda^4} & -\frac{z^4}{\lambda^5} & -\frac{z^5}{\lambda^6} & -\text{etc.}\\
 & -\frac{1}{n} & -\frac{4\lambda^2 z}{\Phi^2} & -\frac{8\lambda^3 zz}{\Phi^3} & -\frac{16\lambda^4 z^3}{\Phi^4} & -\frac{32\lambda^5 z^4}{\Phi^5} & -\frac{64\lambda^6 z^5}{\Phi^6} & \\
 & -\frac{\lambda\lambda}{n\Phi} & +\frac{2z}{\Phi} & +\frac{6\lambda zz}{\Phi\Phi} & +\frac{16\lambda^2 z^3}{\Phi^3} & +\frac{40\lambda^3 z^4}{\Phi^4} & +\frac{96\lambda^4 z^5}{\Phi^5} & \\
 & -\frac{2\lambda}{\Phi} & & & -\frac{-2z^3}{\Phi^3} & -\frac{10\lambda z^4}{\Phi^3} & -\frac{36\lambda^2 z^5}{\Phi^4}, &
\end{array}$$

werde festgelegt

$$\frac{dZ}{Zdz} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{etc.},$$

und weil $\Phi = \lambda\lambda + 4kk\pi\pi$ ist, wo nacheinander für k alle Zahlen 1, 2, 3, 4 etc. bis hin zu $\frac{1}{2}n$ eingesetzt zu werden aufzufassen sind, wird sein

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda} - 2\lambda\left(\frac{1}{\lambda\lambda + 4\pi\pi} + \frac{1}{\lambda\lambda + 16\pi\pi} + \frac{1}{\lambda\lambda + 36\pi\pi} + \text{etc.}\right)$$

Oder wenn der Kürze wegen festgelegt wird

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(\lambda\lambda + 4\pi\pi)} + \frac{1}{(\lambda\lambda + 16\pi\pi)} + \frac{1}{(\lambda\lambda + 36\pi\pi)} + \text{etc.} = \mathfrak{A},\\
&\frac{1}{(\lambda\lambda + 4\pi\pi)^2} + \frac{1}{(\lambda\lambda + 16\pi\pi)^2} + \frac{1}{(\lambda\lambda + 36\pi\pi)^2} + \text{etc.} = \mathfrak{B},\\
&\frac{1}{(\lambda\lambda + 4\pi\pi)^3} + \frac{1}{(\lambda\lambda + 16\pi\pi)^3} + \frac{1}{(\lambda\lambda + 36\pi\pi)^3} + \text{etc.} = \mathfrak{C},\\
&\frac{1}{(\lambda\lambda + 4\pi\pi)^4} + \frac{1}{(\lambda\lambda + 16\pi\pi)^4} + \frac{1}{(\lambda\lambda + 36\pi\pi)^4} + \text{etc.} = \mathfrak{D}\\
&\qquad\qquad\text{etc.,}
\end{aligned}$$

wird sein

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda} - 2\lambda\mathfrak{A},\\
B &= -\frac{1}{\lambda\lambda} + 2\mathfrak{A} - 4\lambda^2\mathfrak{B}\\
C &= -\frac{1}{\lambda^3} + 6\lambda\mathfrak{B} - 8\lambda^3\mathfrak{C},\\
D &= -\frac{1}{\lambda^4} - 2\mathfrak{B} + 16\lambda^2\mathfrak{C} - 16\lambda^4\mathfrak{D},\\
E &= -\frac{1}{\lambda^5} - 10\lambda\mathfrak{C} + 40\lambda^3\mathfrak{D} - 32\lambda^5\mathfrak{E},\\
F &= -\frac{1}{\lambda^6} + 2\mathfrak{C} - 36\lambda^2\mathfrak{D} + 96\lambda^4\mathfrak{E} - 64\lambda\mathfrak{F}
\end{aligned}$$

etc.

Weil nun gilt

$$Z = 1 + \frac{z}{1(1-m)} + \frac{zz}{1\cdot 2(1-m)} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3(1-m)} + \text{etc.},$$

wird sein

$$Z = \frac{e^z - m}{1-m} = \frac{e^z - e^\lambda}{1-e^\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{dZ}{dz} = \frac{e^z}{1-e^z};$$

daher

$$\frac{dZ}{Zdz} = \frac{e^z}{e^z - e^\lambda} = \frac{1}{1 - e^\lambda e^{-z}} = \frac{1}{1 - me^{-m}}$$

und daraus

$$\frac{dZ}{Zdz} = \frac{1}{1 - m + mz - \frac{mzz}{1\cdot 2} + \frac{mz^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{mz^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.}}.$$

Nun wird wegen

$$\frac{dZ}{Zdz} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{etc.}$$

werden

$$\begin{array}{lllll}
1 = (1-m)A & + (1-m)Bz & + (1-m)Cz^2 & + (1-m)Dz^3 & + (1-m)Ez^4 + \text{etc.}, \\
 & + \quad mA & + \quad mB & + \quad mC & + \quad mD \\
 & & - \frac{1}{2}mA & - \frac{1}{2}mB & - \frac{1}{2}mC \\
 & & & + \frac{1}{6}mA & + \frac{1}{6}mB \\
 & & & & - \frac{1}{24}mA
\end{array}$$

woher die folgenden Bestimmungen hervorgehen werden:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{1-m}, \\
B &= \frac{-mA}{1-m} = \frac{-m}{(1-m)^2}, \\
C &= \frac{-mB + \frac{1}{2}mA}{1-m} = \frac{mm}{(1-m)^3} + \frac{m}{2(1-m)^2}, \\
D &= \frac{-mC + \frac{1}{2}mB - \frac{1}{6}mA}{1-m} = \frac{-m^3}{(1-m)^4} - \frac{mm}{(1-m)^3} - \frac{m}{6(1-m)^2}, \\
E &= \frac{-mD + \frac{1}{2}mC - \frac{1}{6}mB + \frac{1}{24}mA}{1-m} = \frac{m^4}{(1-m)^5} + \frac{3m^3}{2(1-m)^4} + \frac{7mm}{12(1-m)^3} + \frac{m}{24(1-m)^2}
\end{aligned}$$

etc.

Also werden die folgenden Summationen der Reihen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ etc. entspringen:

$$\text{I.}\quad \frac{1}{1-m} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda} - 2\lambda\mathfrak{A}$$

oder

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\lambda} - \frac{1}{2\lambda\lambda} - \frac{1}{2\lambda(1-m)};$$

$$\text{II.}\quad \frac{-m}{(1-m)^2} = -\frac{1}{\lambda\lambda} + 2\mathfrak{A} - 4\lambda\lambda\mathfrak{B} = \frac{1}{2\lambda} - \frac{2}{\lambda\lambda} - \frac{1}{\lambda(1-m)} - 4\lambda\lambda\mathfrak{B},$$

woher wird

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{8\lambda^3} - \frac{1}{2\lambda^4} - \frac{1}{4\lambda^3(1-m)} + \frac{m}{4\lambda\lambda(1-m)^2};$$

$$\text{III.}\quad \frac{mm}{(1-m)^3} + \frac{m}{2(1-m)^2} = -\frac{1}{\lambda^3} + 6\lambda\mathfrak{B} - 8\lambda^3\mathfrak{C} = \frac{3}{4\lambda\lambda} - \frac{4}{\lambda^3} - \frac{3}{2\lambda^2(1-m)} + \frac{3m}{2\lambda(1-m)^2} - 8\lambda\mathfrak{C},$$

also

$$\mathfrak{C} = \frac{3}{32\lambda^5} - \frac{1}{2\lambda^6} - \frac{3}{16\lambda^5(1-m)} + \frac{3m}{16\lambda^4(1-m)^2} - \frac{m}{16\lambda^3(1-m)^2} - \frac{mm}{8\lambda^3(1-m)^3}.$$

Und so werden die Summen der vorgelegten Reihen $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ etc. gefunden werden.

Korollar 1

§29 Weil also $m = e^\lambda$ ist, wird sein

$$\frac{1}{\lambda\lambda + 4\pi\pi} + \frac{1}{\lambda\lambda + 16\pi\pi} + \frac{1}{\lambda\lambda + 36\pi\pi} + \text{etc.} = \frac{1}{4\lambda} - \frac{1}{2\lambda\lambda} - \frac{1}{2\lambda(1 - e^\lambda)};$$

es sei $\lambda = \frac{2\pi a}{b}$; es wird sein

$$\begin{aligned} &\frac{bb}{4(aa+bb)\pi^2} + \frac{bb}{4(aa+4bb)\pi^2} + \frac{bb}{4(aa+9bb)\pi^2} + \text{etc.} \\ &= \frac{b}{8\pi a} - \frac{bb}{8\pi\pi aa} - \frac{b}{4\pi a(1 - e^{2\pi a:b})} \end{aligned}$$

und daher wird man durch Multiplizieren mit $\frac{4\pi\pi}{bb}$ haben

$$\frac{1}{aa+bb} + \frac{1}{aa+4bb} + \frac{1}{aa+9bb} + \text{etc.} = \frac{\pi}{2ab} - \frac{1}{2aa} + \frac{\pi}{ab(e^{2\pi a:b} - 1)},$$

welche Summe ich schon anderenortes aus einer anderen Quelle abgeleitet dargeboten habe.

Korollar 2

§30 Wenn also $b = 1$ gesetzt wird, hat man diese Summe

$$\frac{1}{aa+1} + \frac{1}{aa+4} + \frac{1}{aa+9} + \text{etc.} = \frac{\pi}{2a} - \frac{1}{2aa} + \frac{\pi}{a(e^{2\pi a} - 1)},$$

und wenn außerdem $a = 0$ gesetzt wird, dass diese Reihe hervorgeht

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.},$$

wird die Summe von dieser wegen der ins Unendliche wachsenden Termen so aus der Formel deriviert werden: Es werde a unendlich klein aufgefasst; es wird sein

$$e^{2\pi a} = 1 + 2\pi a + 2\pi\pi aa + \frac{4}{3}\pi^3 a^3$$

und daher wird die Summe sein

$$= \frac{\pi}{2a} - \frac{1}{2aa} + \frac{1}{2aa + 2\pi a^3 + \frac{4}{3}\pi^2 a^4}$$

$$= \frac{\pi a + \pi\pi aa + \frac{2}{3}\pi^3 a^3 - 1 - \pi a - \frac{2}{3}\pi^2 aa + 1}{2aa\left(1 + \pi a + \frac{2}{3}\pi\pi a^2\right)} = \frac{1}{6}\pi^2,$$

welches, wie bekannt ist, die Summe dieser Reihe ist

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}$$

KOROLLAR 3

§31 Wenn in der zuvor gefundenen Reihe

$$\frac{1}{aa+bb} + \frac{1}{aa+4bb} + \frac{1}{aa+9bb} + \text{etc.} = \frac{\pi}{2ab} - \frac{1}{2aa} + \frac{\pi}{ab(e^{2\pi a:b} - 1)}$$

die Größe a wie eine Variable behandelt wird und eine Differentiation durchgeführt, wird die Summe der Reihe $\mathfrak{B}$ hervorgehen; und so werden weiter durch wiederholte Differentiation aus der Reihe $\mathfrak{A}$ die Summen der folgenden $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ etc. aufgefunden werden.

KOROLLAR 4

§32 Die Summe von dieser Reihe kann bequemer so ausgedrückt werden:

$$\frac{1}{aa+bb}+\frac{1}{aa+4bb}+\frac{1}{aa+9bb}+\text{etc.}=\frac{-1}{2aa}+\frac{\pi(e^{2\pi a:b}+1)}{2ab(e^{2\pi a:b}-1)}$$
$$=\frac{-1}{2aa}+\frac{\pi(e^{\pi a:b}+e^{-\pi a:b})}{2ab(e^{\pi a:b}-e^{-\pi a:b})}.$$

Aus dieser Form wird leicht der Wert der Reihe erschlossen, wenn b eine imaginäre Zahl ist; es sei nämlich $b=\frac{c}{\sqrt{-1}}$; es wird sein

$$\frac{1}{aa-cc}+\frac{1}{aa-4cc}+\frac{1}{aa-9cc}+\text{etc.}=\frac{-1}{2aa}+\frac{\pi\left(e^{\frac{\pi a\sqrt{-1}}{c}}+e^{\frac{-\pi a\sqrt{-1}}{c}}\right)\sqrt{-1}}{2ac\left(e^{\frac{\pi a\sqrt{-1}}{c}}-e^{\frac{-\pi a\sqrt{-1}}{c}}\right)}.$$

Aber es ist

$$e^{\frac{\pi a\sqrt{-1}}{c}}+e^{\frac{-\pi a\sqrt{-1}}{c}}=2\cos\frac{\pi a}{c}$$

und

$$e^{\frac{\pi a\sqrt{-1}}{c}}-e^{\frac{-\pi a\sqrt{-1}}{c}}=2\sqrt{-1}\cdot\sin\frac{\pi a}{c},$$

woher wird

$$\frac{1}{aa-cc}+\frac{1}{aa-4cc}+\frac{1}{aa-9cc}+\text{etc.}=\frac{-1}{2aa}+\frac{\pi\cos\pi a:c}{2ac\sin\pi a:c}.$$

Korollar 5

§33 Weil $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2} = 0$ ist, ist in den Fällen, in denen $a = 2k+1$ und $c = 2$ ist, die Summe der Reihe

$$= \frac{-1}{2aa} = -\frac{1}{2(2k+1)^2},$$

während k irgendeine ganze Zahl ist. Daher wird sein

$$\frac{1}{(2k+1)^2-4} + \frac{1}{(2k+1)^2-16} + \frac{1}{(2k+1)^2-36} + \frac{1}{(2k+1)^2-64} + \text{etc.} = \frac{-1}{2(2k+1)^2},$$

welche Summation ich an anderer Stelle bewiesen habe. Wenn die einzelnen Brüche in Teile aufgelöst werden, entspringt

$$\begin{aligned}\frac{-1}{2k+1} = \frac{1}{2k-1} &+ \frac{1}{2k-3} + \frac{1}{2k-5} + \frac{1}{2k-7} + \frac{1}{2k-9} + \text{etc.}\\ &+ \frac{1}{2k+3} + \frac{1}{2k+5} + \frac{1}{2k+7} + \frac{1}{2k+9} + \text{etc.}\end{aligned}$$

Korollar 6

§34 Nachdem der Term $\frac{-1}{2k+1}$ auf die andere Seite gebracht worden ist und je zwei Terme zusammengefasst worden sind, wird eine neue Reihe entspringen, deren Summe $= 0$ ist. Es wird natürlich, nachdem die einzelnen Terme durch $4k$ geteilt worden sind, sein

$$0 = \frac{1}{4kk-1} + \frac{1}{4kk-9} + \frac{1}{4kk-25} + \frac{1}{4kk-49} + \frac{1}{4kk-81} + \text{etc.},$$

deren Gültigkeit sich in den einzelnen Fällen leicht zeigen wird.

Problem 4

§35 Den allgemeinen Term der Reihe zu finden, von welcher jeder beliebige Term entspringt, wenn der vorausgehende mit einer gegebenen Zahl m multipliziert wird und zum Produkt eine gegebene Zahl c addiert wird, und von welcher Reihe der erste Term in gleicher Weise gegeben und $= a$ sei.

Lösung

Die Terme, die den ganzzahligen Indizes entsprechen, werden sich also so verhalten

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a, & ma+c, & m^2a+mc+c, & m^3a+m^2c+mc+c \quad \text{etc.}; \end{array}$$

daher, wenn irgendein Index x eine ganze Zahl ist, wird der zukommende Term dieser sein

$$= m^{x-1}a + \frac{m^{x-1}-1}{m-1}c.$$

Wenn aber x keine ganze Zahl ist, werden außer dieser unendlich viele andere Formen genauso Genüge leisten; um diese zu finden, sei y der dem Index x entsprechende Term und y' der folgende oder der dem Index $x+1$ zufallende; es wird sein

$$y' = my + c,$$

woher werden wird

$$my + c = y + \frac{dy}{1 \cdot dx} + \frac{ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{d^4y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \text{etc.}$$

Man setze

$$y = v - \frac{c}{m-1}$$

und es wird sein

$$mv = v + \frac{dv}{1 \cdot dx} + \frac{ddv}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{d^3v}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \text{etc.};$$

weil diese Gleichung mit der übereinstimmt, die wir im vorgehenden Problem gefunden haben, wird, wenn $\sin \pi x = r$ und $\cos \pi x = s$ gesetzt wird und Q für irgendeine Funktion von geraden Dimensionen von r und s genommen wird, wird sein

$$v = m^x Q$$

und daher

$$y = m^x Q - \frac{c}{m-1}.$$

Es werde $x = 1$ gesetzt, in welchem Fall $r = 0$ und $s = -1$ wird, und es gehe Q in C über; es muss gelten

$$a = mC - \frac{c}{m-1}$$

und daher wird sein

$$C = \frac{a}{m} + \frac{c}{m(m-1)}.$$

Daher, wenn für Q die konstante Größe C selbst genommen wird, wird

$$y = m^{x-1}a + \frac{(m^{x-1} - 1)c}{m - 1}$$

für den den einfachsten Fall sein. Und wenn P eine solche Funktion von geraden Dimensionen von r und s ist, die nach Setzen von $x = 1$ verschwinde, wird $Q = C + P$ gesetzt werden können und es wird die sich sehr weit erstreckende Form des gesuchten allgemeinen Termes diese sein

$$y = m^{x-1}a + \frac{(m^{x-1} - 1)c}{m - 1} + m^x P.$$

Q.E.I.

PROBLEM 5

§36 Den allgemeinen Term von rekurrenten Reihen zweiter Ordnung zu finden, in welchen jeder beliebige Term dem Aggregat der zwei vorausgehenden mit irgendwelchen Zahlen multiplizierten Termen gleich werde.

LÖSUNG

Es sei

der Term, der dem Index	x	entspricht	$=y$,
der Term, der dem Index	$x-1$	entspricht	$='y$,
der Term, der dem Index	$x-2$	entspricht	$=''y$,

und es sei ein solches Gesetz der rekurrenten Reihe vorgelegt, dass ist

$$y = \alpha' y + \beta'' y.$$

Weil also gilt

$$\begin{aligned}
'y &= y - \frac{dy}{1 \cdot dx} + \frac{ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} - \frac{d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} - \text{etc.},\\
''y &= y - \frac{2dy}{1 \cdot dx} + \frac{4ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} - \frac{8d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{16d^4y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} - \text{etc.},
\end{aligned}$$

wird nach Einsetzen dieser Formeln sein

$$\begin{aligned}
y = &+\alpha\left(y - \frac{dy}{1 \cdot dx} + \frac{ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} - \frac{d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} - \text{etc.}\right)\\
&+\beta\left(y - \frac{2dy}{1 \cdot dx} + \frac{4ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} - \frac{8d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{16d^4y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} - \text{etc.}\right)
\end{aligned}$$

Um diese Gleichung aufzulösen, werde gemäß der allgemeinen Vorschrift 1 für y, z für $\frac{dy}{dx}$, z^2 für $\frac{ddy}{dx^2}$ etc. gesetzt und es wird werden

$$\begin{aligned}
1 &= +\alpha\left(1 - \frac{z}{1} + \frac{zz}{1 \cdot 2} - \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \text{etc.}\right)\\
1 &= +\alpha\left(1 - \frac{2z}{1} + \frac{4zz}{1 \cdot 2} - \frac{8z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{16z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \text{etc.}\right),
\end{aligned}$$

welche Gleichung auf diese endliche Form zurückgeführt wird

$$1 = \alpha e^{-z} + \beta e^{-2z},$$

deren Faktoren ausfindig gemacht werden müssen. Nach Setzen von $e^{+z} = u$

werde diese Gleichung aufgelöst

$$uu = \alpha u + \beta,$$

von welcher entweder Wurzeln entweder reell oder imaginär sind oder zuletzt beide einander gleich sind. Und diese drei Fälle müssen einzeln entwickelt werden.

I. Es seien also zuerst die beiden Wurzeln reell und einander gleich, oder es sei

$$uu - \alpha u - \beta = (u - A)(u - B)$$

und daher werden wir, indem für u wieder e^z gesetzt, die zwei allgemeinen Faktoren $e^z - A$ und $e^z - B$ haben. Wir haben aber schon oben gesehen, dass die Formel $e^z - m$ dieses Integral gegeben hat

$$y = +A^x \begin{Bmatrix} C + \alpha \sin 2\pi x + \beta \sin 4\pi x + \gamma \sin 6\pi x + \text{etc.} \\ +\mathfrak{A} \cos 2\pi x + \mathfrak{B} \cos 4\pi x + \mathfrak{C} \cos 6\pi x + \text{etc.} \end{Bmatrix}.$$

Also werden die beiden Faktoren $e^z - A$ und $e^z - B$ zusammengenommen diesen Wert für den allgemeinen Term y geben

$$\begin{aligned} y = +A^x &\begin{Bmatrix} C + \alpha \sin 2\pi x + \beta \sin 4\pi x + \gamma \sin 6\pi x + \text{etc.} \\ +\mathfrak{A} \cos 2\pi x + \mathfrak{B} \cos 4\pi x + \mathfrak{C} \cos 6\pi x + \text{etc.} \end{Bmatrix} \\ +B^x &\begin{Bmatrix} C + \alpha' \sin 2\pi x + \beta' \sin 4\pi x + \gamma' \sin 6\pi x + \text{etc.} \\ +\mathfrak{A}' \cos 2\pi x + \mathfrak{B}' \cos 4\pi x + \mathfrak{C}' \cos 6\pi x + \text{etc.} \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Oder es werde $\sin \pi x = r$ und $\cos \pi x = r$ gesetzt und es seien P und Q irgendwelche Funktionen von geraden Dimensionen von r und s und es wird sein, wenn galt

$$uu - \alpha u - \beta = (u - A)(u - B)$$

oder wenn A und B die Wurzeln der Gleichung $uu - \alpha u - \beta = 0$ sind, sage ich, in diesem Fall sein wird

$$y = A^x P + B^x Q.$$

II. Es seien die beiden Wurzeln imaginär, dann wird freilich dieselbe gefundene Form benutzt werden können, weil sich ja in jedem Fall die imaginären Größen aufheben werden; dennoch kann indes eine von imaginären Größen freie Formel für y dargeboten werden. Denn in diesem Fall wird die Gleichung $uu - \alpha u - \beta = 0$ eine Form solcher Art annehmen

$$uu - 2fu\cos\omega + ff = 0,$$

deren Wurzeln diese sind

$$u = f\cos\omega \pm f\sqrt{-1}\cdot\sin\omega,$$

sodass gilt

$$A = f\cos\omega + f\sqrt{-1}\cdot\sin\omega \quad \text{und} \quad B = f\cos\omega - f\sqrt{-1}\cdot\sin\omega.$$

Daher wird aber sein

$$A^x = f^x\cos\omega x + f^x\sqrt{-1}\cdot\sin\omega x$$

sowie

$$B^x = f^x \cos \omega x - f^x \sqrt{-1} \cdot \sin \omega x.$$

Wenn also diese Werte anstelle von A^x und B^x eingesetzt werden, wird werden

$$y = (P+Q) f^x \cos \omega x + (P-Q)\sqrt{-1} \cdot f^x \sin \omega x.$$

Weil nun P und Q beliebige Funktionen von r und s sind, solange sie nur gerade Dimensionen haben, werden anstelle von $P+Q$ einfach P und anstelle von $(P-Q)\sqrt{-1}$ schlicht Q gesetzt und aus der Gleichung

$$uu - \alpha u - \beta = uu - 2fu \cos \omega + ff = 0$$

wird der gesuchte allgemeine Term sein

$$y = f^x P \cos \omega x + f^x Q \sin \omega x.$$

III. Wenn die beiden Wurzeln der Gleichung $uu - \alpha - \beta = 0$, also A und B, einander gleich waren, beispielsweise $A = B = m$, wird man diese Gleichung haben

$$(e^z - m)^2 = 0.$$

Es werden wie in §23 $m = e^\lambda$ gesetzt; es wird der erste quadratische Faktor der Formel $e^z - e^\lambda$ daher $= (z-\lambda)^2$ sein, woher dieser Teil des Integrals entspringt

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x)e^{\lambda x} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x)m^x = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x)A^x.$$

Alle Übrigen Faktoren werden in gleicher Weise quadratisch sein und in dieser allgemeinen Form enthalten sein

$$(\lambda\lambda + 4kk\pi\pi - 2\lambda z + zz)^2,$$

woraus gemäß der von mir angegebenen Vorschriften dieser Teil des Teil entspringt

$$A^x(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x)\sin 2k\pi x + A^x(\mathfrak{C} + \mathfrak{D}x)\cos 2k\pi x.$$

Durch Sammeln von diesen folgt, wenn war

$$uu - \alpha u - \beta = (u - A)^2 = uu - 2Au + AA,$$

dass der gesuchte allgemeine Term sein wird

$$y = A^x \left\{ \begin{array}{r} \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x(\mathfrak{C} + \mathfrak{D}x)\sin 2\pi x + (\mathfrak{G} + \mathfrak{H}x)\sin 4\pi x + \text{etc.} \\ (\mathfrak{E} + \mathfrak{F}x)\cos 2\pi x + (\mathfrak{I} + \mathfrak{K}x)\cos 4\pi x + \text{etc.} \end{array} \right\}.$$

Es werde wiederum $\sin \pi x = r$ und $\cos \pi x = s$ gesetzt und es seien P und Q irgendwelche geraden Funktionen von r und s und der allgemeine Term wird so ausgedrückt werden können, dass ist

$$y = Ax(P + Qx).$$

Q.E.I.

KOROLLAR 1

§37 Wenn also in einer rekurrenten Reihe jeder beliebige Term y so durch die zwei vorhergehenden $'y$ und $''y$ bestimmt wird, dass $y = \alpha' y + \beta'' y$, oder wenn nach MOIVRE $+\alpha$, $+\beta$ die Relationsskala war, und wenn x der Index des Termes y war, wird y eine im höchsten Maße unbestimmte Funktion x sein, weil unzählige Formeln dargeboten werden können, die Genüge leistende Werte für y liefern.

KOROLLAR 2

§38 Um aber alle Ausdrücke für y zu finden, werde aus der Relationsskala $+\alpha$, $+\beta$ diese Gleichung gebildet $uu - \alpha u - \beta = 0$ gebildet, aus deren Auflösung der allgemeine Term y auf die folgende Weise aufgefunden werden wird.

KOROLLAR 3

§39 Es seien die Wurzeln der Gleichung

$$uu - \alpha u - \beta = 0$$

A und B, so dass gilt

$$A = \frac{1}{2}\alpha + \sqrt{\frac{1}{4}\alpha\alpha + \beta} \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{2}\alpha - \sqrt{\frac{1}{4}\alpha\alpha + \beta},$$

und es werden nach Setzen von $\sin \pi x = r$ und $\cos \pi x = s$ irgendwelche geraden Funktionen von r und s genommen, die P und Q seien; es wird sein

$$y = A^x P + B^x Q = \left(\frac{1}{2}\alpha + \sqrt{\frac{1}{4}\alpha\alpha + \beta}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\alpha - \sqrt{\frac{1}{4}\alpha\alpha + \beta}\right)^x Q.$$

Korollar 4

§40 Wenn aber die beiden Wurzeln der Gleichung $uu = \alpha u + \beta$ gleich waren, ist jene Formel wegen $\beta + \frac{1}{4}\alpha\alpha = 0$ frei von Nutzen. In diesem Fall, weil jede der beiden Wurzeln $\frac{1}{2}\alpha$ sein wird, wenn $\frac{1}{2}\alpha = A$ gesetzt wird, wird aber der allgemeine Term sein

$$y = A^x(P + Qx).$$

Korollar 5

§41 Wenn aber $\frac{1}{4}\alpha\alpha + \beta$ eine negative Größe ist, werden alle zuvor gefundenen Teile imaginär sein. Um also eine reelle Form zu finden, werde die Gleichung

$$uu - \alpha u - \beta = 0$$

mit dieser verglichen

$$uu - 2fu\cos\omega + ff = 0;$$

es wird gelten

$$f = \sqrt{-\beta} \quad \text{und} \quad \alpha = 2\sqrt{-\beta} \cdot \cos\omega$$

oder

$$\cos\omega = \frac{\alpha}{2\sqrt{-\beta}} \quad \text{und} \quad \sin\omega = \frac{\sqrt{-4\beta - \alpha\alpha}}{2\sqrt{-\beta}} = \sqrt{1 + \frac{\alpha\alpha}{4\beta}},$$

woher der Winkel ω gefunden werden wird, woraus sein wird

$$y = f^x(P\cos\omega x + Q\sin\omega x).$$

KOROLLAR 6

§42 Wenn für P und Q konstante Größen angenommen werden, geht dieselbe Form des allgemeinen Termes hervor, die für gewöhnlich dargeboten zu werden und für die einzige, die Genüge leistet, gehalten zu werden pflegt. Nachdem aber eine beliebige bestimmte Reihe vorgelegt worden ist, müssen diese zwei konstanten Größen aus den zwei ersten Termen, die als gegeben angenommen werden, definiert werden. Aber im Allgemeinen, weil zwei beliebige Funktionen P und Q eingehen, die, sooft x eine ganze zahl ist, dieselben Werte annehmen, tritt es klar zu tage, dass zwei ganzzahligen entsprechenden Terme nach Belieben angenommen werden können.

BEMERKUNG

§43 Diese Methode, die allgemeinen Terme von rekurrenten Reihen zu finden, ist besonders daher bemerkenswert, weil sie nicht nur alle möglichen Formen darbietet, sondern auch a priori vorgeht und allein aus analytischen Prinzipien die Aufgabe erledigt, wohingegen andere, die diese Reihen behandelt haben, alle über einen indirekten Weg zu jener speziellen Form der allgemeinen Terme gelangt sind. Denn es ist genau dies die charakterisierende Eigenschaft und gleichsam ein Kriterium einer direkten Methode, dass sie nicht nur aus den Prinzipien irgendeiner Sache selbst ihre Beschaffenheit findet, sondern auch alle Bestimmungsarten zugleich in sich umfasst. Aber indirekte Methoden, auch wenn sie oftmals gefällige und elegante Lösungen an die Hand geben, erschöpfen hingegen sehr selten die Natur der Frage, die behandelt wird. Ein Beispiel dieses Unterschiedes wird im vorhergehenden Problem ausgemacht, aber noch besser im folgenden Problem zu tage treten, wo im Allgemeinen die allgemeinen Terme von allen rekurrenten Reihen ausfindig gemacht werden werden.

PROBLEM 6

§44 Den allgemeinen Term von rekurrenten Reihen irgendwelcher Ordnung zu finden, von welchen jeder beliebige Term dem Aggregat einiger vorausgehender mit irgendwelchen Zahlen multiplizierter Terme gleich wird.

LÖSUNG

Es sei der dem Index x entsprechende Term $= y$, aber die vorausgehenden, die den Indizes $x-1$, $x-2$, $x-3$, $x-4$ etc. zukommen, werden durch $'y$, $''y$, $'''y$, ${}^{\mathrm{IV}}y$ etc. bezeichnet und es sei dieses Bildungsgesetz der Reihe vorgelegt, dass man überall hat

$$y = \alpha\, 'y + \beta\, ''y + \gamma\, '''y + \delta\, {}^{\mathrm{IV}}y + \text{etc.}$$

Weil nun aus der Natur der Differentiale gilt

$$\begin{aligned}
'y &= y - \frac{dy}{1\cdot dx} + \frac{ddy}{1\cdot 2\cdot dx^2} - \frac{d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^3} + \text{etc.},\\
''y &= y - \frac{2dy}{1\cdot dx} + \frac{2^2ddy}{1\cdot 2\cdot dx^2} - \frac{2^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^3} + \text{etc.},\\
'''y &= y - \frac{3dy}{1\cdot dx} + \frac{3^2ddy}{1\cdot 2\cdot dx^2} - \frac{3^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^3} + \text{etc.}\\
&\text{etc.},
\end{aligned}$$

wenn diese Werte dort eingesetzt werden, wird eine Gleichung hervorgehen, in deren einzelnen Termen nur eine einzige Dimension der Variable y auftritt, von der anderen Variable x geht hingegen nur das Differential dx, welches konstant festgelegt wird, ein. Daher, wenn überall 1 anstelle von y, z anstelle von $\frac{dy}{dx}$ und allgemein z^m anstelle von $\frac{d^my}{dx^m}$ eingesetzt wird, wird nach einer Reduktion diese Gleichung ans Licht treten

$$1 = \alpha e^{-z} + \beta e^{-2z} + \gamma e^{-3z} + \delta e^{-4z} + \text{etc.}$$

Es werde nun $e^z = u$, und nach Wegschaffen der Brüche geht eine algebraische Gleichung von dieser Art hervorgehen

$$u^n = \alpha u^{n-1} + \beta u^{n-2} + \gamma u^{n-3} + \delta u^{n-4} + \text{etc.},$$

die so viele Dimensionen haben wird, wie vorausgehende Terme zur Bestimmung des Termes y verlangt werden oder von wie vielter Ordnung die rekurrente Reihe selbst war. Nun wird die Form des allgemeinen Termes y aus den Wurzeln dieser Gleichung oder aus den Faktoren dieser Formel

$$u^n - \alpha u^{n-1} - \beta u^{n-2} - \gamma u^{n-3} - \delta u^{n-4} - \text{etc.} = U$$

auf die gleich Weise erschlossen werden, die wir bei den Lösungen der bisher vorgelegten Problemen gebraucht haben; Natürlich, wenn $\sin \pi x = r$ und $\cos \pi x = s$ ist und P, Q, R, S, T etc. irgendwelche Funktionen von geraden Dimensionen von r und s bezeichnen, werden darauf alle so einfachen wie trinomialen reellen Faktoren der Formel U ausfindig gemacht und, wenn welche von diesen gleich waren, werden sie zusammengenommen durch Potenzen ausgedrückt. Aber diese einzelnen Faktoren werden ebenso viele Teile des allgemeinen Termes y liefern, welche Teile mit Hilfe der folgenden Regeln gebildet werden werden.

I. Wenn der Faktor $u - A$ ist, wird ein Teil des Integrals sein

$$y = A^x P.$$

II. Wenn der Faktor $(u - A)^2$ ist, wird ein Teil des Integrals sein

$$y = A^x (P + Qx).$$

III. Wenn der Faktor $(u-A)^3$ ist, wird ein Teil des Integrals sein

$$y = A^x(P + Qx + Rx^2).$$

IV. Wenn der Faktor $(u-A)^4$ ist, wird ein Teil des Integrals sein

$$y = A^x(P + Qx + Rx^2 + Sx^3).$$

etc.

1. Wenn der Faktor $u - 2Au\cos\omega + AA$ ist, wird sein

$$y = A^x(P\cos\omega x + Q\sin\omega x).$$

2. Wenn der Faktor $(u - 2Au\cos\omega + AA)^2$ ist, wird sein

$$y = A^x(P + Qx)\cos\omega x + A^x(R + Sx)\sin\omega x$$

3. Wenn der Faktor $(u - 2Au\cos\omega + AA)^3$ ist, wird sein

$$\begin{aligned} y = &+ A^x(P{+}Qx{+}Rxx)\cos\omega x \\ &+ A^x(S{+}Tx{+}Vxx)\sin\omega x \end{aligned}$$

etc.

Wenn daher also für die einzelnen Faktoren der Formel U daher die Teile des Integrals gesucht werden und sie zu einer Summe zusammengefasst werden, wird man den vollständigen Wert für den gesuchten allgemeinen Term y haben.
Q.E.I.

KOROLLAR 1

§45 Auf diese Weise wird als das vollständige Integral der folgenden unendlichen Differentialgleichung erhalten

$$\begin{aligned}
y = y & \quad (\alpha + \quad \beta + \quad \gamma + \quad \delta + \text{etc.}) \\
-\frac{dy}{1 \cdot dx} & \quad (\alpha + 2\ \beta + 3\ \gamma + 4\ \delta + \text{etc.}) \\
+\frac{ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} & \quad (\alpha + 2^2\beta + 3^2\gamma + 4^2\delta + \text{etc.}) \\
-\frac{d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} & \quad (\alpha + 2^3\beta + 3^3\gamma + 4^3\delta + \text{etc.}) \\
+\frac{d^4y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} & (\alpha + 2^4\beta + 3^4\gamma + 4^4\delta + \text{etc.}) \\
& \text{etc.}
\end{aligned}$$

oder der Wert von y wird durch eine Funktion von x ausgedrückt werden.

KOROLLAR 2

§46 Die ganze Schwierigkeit wird also auf die Auflösung dieser algebraischen Gleichung zurückgeführt

$$u^n = \alpha u^{n-1} + \beta u^{n-2} + \gamma u^{n-3} + \delta u^{n-4} + \text{etc.}$$

Nachdem nämlich ihre Wurzeln oder Faktoren gefunden worden sind, ist es leicht, mit Hilfe der zuvor angegebenen Regeln den Wert von y zu bestimmen.

KOROLLAR 3

§47 Weil ja durch Integration so viele beliebige Größen P, Q, R, T etc. eingeführt werden, wie der Exponent n Einheiten enthält oder wie viele Terme der vorhergehenden in die Bestimmung des folgenden eingehen, ist es offenbar, dass ebenso viele Terme nach Belieben angenommen werden können, aus welchen alle übrigen, deren Indizes ganzzahlig sind, bestimmt werden. Dies steht dennoch dem nicht im Wege, dass die Terme der nicht ganzzahligen Terme im höchsten Maße unbestimmt bleiben, wie es in den vorhergehenden Problemen schon angemerkt worden ist.

PROBLEM 7

§48 Wenn jeder beliebige Term einer Reihe einer gewissen konstanten Größe zusammen mit dem Aggregat einiger vorausgehender mit gegebenen Zahlen multiplizierter Terme gleich wird (wie im vorhergehenden Problem), den allgemeinen Term dieser Reihe zu finden.

LÖSUNG

Nachdem wie zu vor der dem unbestimmten Index x entsprechende Term $= y$ gesetzt worden ist, seien die vorausgehenden den Indizes $x-1$, $x-2$, $x-3$ etc. entsprechenden $'y$, $''y$, $'''y$ etc. und es sei dieses Fortschreitungsgesetz vorgelegt

$$y = c + \alpha\,'y + \beta\,''y + +\gamma\,'''y + \delta\,^{\mathrm{IV}}y + \text{etc.};$$

nachdem also die oben für $'y$, $''y$, $'''y$, $^{\text{etc.}}y$ etc. dargebotenen Werte eingesetzt worden sind, wird sein

$$
\begin{aligned}
y = {} & c + y && (\alpha + \quad \beta + \quad \gamma + \quad \delta + \text{etc.}) \\
& - \frac{dy}{1 \cdot dx} && (\alpha + 2\ \beta + 3\ \gamma + 4\ \delta + \text{etc.}) \\
& + \frac{ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} && (\alpha + 2^2\beta + 3^2\gamma + 4^2\delta + \text{etc.}) \\
& - \frac{d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} && (\alpha + 2^3\beta + 3^3\gamma + 4^3\delta + \text{etc.}) \\
& \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Es werde nun, um den Konstanten Term c aus der Gleichung zu beseitigen, $y = v + g$ gesetzt und es werde

$$g = c + g[\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.})$$

und daher

$$g = \frac{c}{1 - \alpha - \beta - \gamma - \delta - \text{etc.}}.$$

Danach wird man wegen $dy = dv$, $ddy = ddv$ etc. diese Gleichung haben:

$$
\begin{aligned}
v = {} & v && (\alpha + \quad \beta + \quad \gamma + \quad \delta + \text{etc.}) \\
& - \frac{dv}{1 \cdot dx} && (\alpha + 2\ \beta + 3\ \gamma + 4\ \delta + \text{etc.}) \\
& + \frac{ddv}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} && (\alpha + 2^2\beta + 3^2\gamma + 4^2\delta + \text{etc.}) \\
& \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Weil diese Gleichung der ähnlich ist, die wir im vorhergehenden Problem aufgelöst haben, wird der Wert von v durch die dort gegebenen Regeln gefunden werden. Nachdem dieser gefunden worden ist, wird man als gesuchten allgemeinen Term haben

$$y = v + \frac{c}{1-\alpha-\beta-\gamma-\delta-\text{etc.}},$$

woraus die Natur der vorgelegten Reihe bekannt werden wird.
Q.E.I.

KOROLLAR 1

§49 Also beeinflusst die konstante Größe, die zur Formel

$$\alpha\,{}'y + \beta\,{}''y + \gamma\,{}'''y + \text{etc.}$$

hinzukommt, den allgemeinen Term y nicht anders, als dass er selbigem eine konstante Zahl hinzufügt. Es werde also der allgemeine Term für die reine rekurrente gesucht, deren Relationsskala $+\alpha$, $+\beta$, $+\gamma$, $+\delta$ etc. sei, und dann werde zu ihr die Zahl $\frac{c}{1-\alpha-\beta-\gamma-\text{etc.}}$ hinzuaddiert.

KOROLLAR 2

§50 Aber diese hinzuzufügende konstante Größe $\frac{c}{1-\alpha-\beta-\gamma-\text{etc.}}$ wird deshalb unendlich und daher unbestimmt, wenn der Nenner verschwindet oder wenn gilt

$$1-\alpha-\beta-\gamma-\delta-\text{etc.} = 0.$$

In diesem Fall wird die Gleichung

$$u^n - \alpha u^{n-1} - \beta u^{n-2} - \gamma u^{n-3} - \text{etc.} = 0$$

die Wurzel $u - 1 = 0$ haben, woher der Teil $y = P$ des Integrals entsprießt;

diese Größe P, damit nicht alle Terme unendlich werden, muss so unendlich sein, dass sie zusammen mit jener unendlichen Konstante einen endlichen Wert liefert, welcher $= P + Qx$ sein wird.

BEMERKUNG 1

Damit dies klarer wird, ist zu bemerken, dass Reihen solcher Art, wie wir sie hier betrachtet haben, immer auf um einen Grad höhrere reine rekurrente Reihe zurückgeführt werden können. Wenn nämlich gilt

$$y = c + \alpha\, {}'y + \beta\, {}''y + \gamma\, {}'''y + \delta\, {}^{\mathrm{IV}}y,$$

wird sein

$${}'y = c + \alpha\, {}''y + \beta\, {}'''y + \gamma\, {}^{\mathrm{IV}}y + \delta\, {}^{\mathrm{V}}y,$$

deren Differenz gibt

$$y = (\alpha + 1)\, {}'y + (\beta - \alpha)\, {}''y + (\gamma - \beta)\, {}'''y + (\delta - \gamma)\, {}^{\mathrm{IV}}y - \delta\, {}^{\mathrm{V}}y,$$

welches ein Bildungsgesetz für eine reine rekurrente Reihe ist, deren allgemeiner Term aus der Auflösung dieser Gleichung gebildet werden wird:

$$u^{n+1} - (\alpha + 1)u^n - (\beta - \alpha)u^{n-1} - (\gamma - \beta)u^{n-2} - \text{etc.} = 0$$

Von dieser ist aber ein Faktor schon bekannt, natürlich $u - 1$, weil gilt

$$(u - 1)(u^n - \alpha u^{n-1} - \beta u^{n-2} - \gamma u^{n-3} - \text{etc.}) = 0.$$

Aber der Faktor $u - 1$ gibt nur dann den Teil $1^x P$ des Integrals, wann immer er nicht zugleich ein Faktor der anderen Form $u^n - \alpha u^{n-1}-$etc. ist; wenn aber diese auch den Faktor $u-1$ oder eine Potenz dessen hat; muss der Exponent von dieser um die Einheit vermehrt werden und daher der entsprechende Teil des Integrals ausfindig gemacht werden. Nachdem aber auf diese Weise der allgemeine Term y gefunden worden ist, wird er, weil in im die Größe c nicht enthalten ist, zu allgemein sein; er wird also an den vorgelegten Fall angepasst werden müssen. Aus dem Wert von y werden natürlich die Werte der vorhergehenden Terme $'y$, $''y$, $'''y$ etc. gefunden, indem anstelle von x die Werte $x-1$, $x-2$, $x-3$ etc. eingesetzt werden, wo es zu bemerken ist, dass die Funktionen P, Q, R etc. dieselben Werte beibehalten und daher keine Veränderun erfahren. Des Weiteren werden diese Werte in dieser Gleichung eingesetzt

$$y = c + \alpha\, 'y + \beta\, ''y + \gamma\, '''y + \delta\, ^{\mathrm{IV}}y + \text{etc.},$$

und auf diese Weise wird eine jener Funktionen P, Q, R etc. bestimmt werden. So, wenn dieses Bildungsgesetz der Reihe vorgelegt ist

$$y = c + 3'y - 2''y,$$

wird daher diese Gleichung entsprießen

$$(u-1)(u^2 - 3u - 2)) = 0,$$

deren Faktoren sind

$$(u-1)^2(u-2) = 0,$$

aus welchen der gesuchte allgemeine Term erschlossen wird

$$y = P + Qx + 2^x R;$$

es wird also sein

$$'y = P + Qx - Q + 2^{x-1}R$$

und

$$''y = P + Qx - 2Q + 2^{x-2}R,$$

welche eingesetzt diese Gleichheit geben werden

$$P + Qx + 4 \cdot 2^{x-2}R = c + Qx + Q + 4 \cdot 2^{x-2}R,$$

woher $Q = -c$ aufgefunden wird; und so wird der dem vorgelegten Bildungsgesetz zukommende allgemeine Term sein

$$y = P - cx + 2^x R,$$

wo für P und R irgendwelche Funktionen von geraden Dimensionen von r und s angenommen werden können.

Bemerkung 2

§52 Weil wir ja also eine allgemeine Methode angegeben haben, die allgemeinen Terme von Reihen zu finden, von welchen jeder Term durch die vorhergehenden bestimmt wird, wenn freilich keine Potenzen der vorausgehenden auftauchen, wollen wir nun dieselbe Methode auch auf Reihen anwenden, von welchen jeder Term nicht nur aus den vorhergehenden, sondern auch aus dem Index selbst bestimmt wird, worin wir das dritte Geschlecht der Bestimmung von Reihen festgelegt haben. Wenn daher aber Quadrate oder höhere Potenzen der vorausgehenden Terme in die Bestimmung des folgenden eingehen, wie wenn galt

$$y' = yy + ay,$$

dann wird zwar die unendliche Differentialgleichung, mit welcher der allgemeine Term gefunden wird, leicht dargeboten, welche in diesem Fall sein wird

$$yy + ay = y + \frac{dy}{1 \cdot dx} + \frac{ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \text{etc.};$$

aber weil der Kunstgriff noch nicht bekannt ist, Gleichungen von dieser Art aufzulösen, sind wir gezwungen, die Behandlung dieses Geschlechts von Reihen hier auszulassen.

PROBLEM 8

§53 Den allgemeinen Term der Reihe zu finden, von welcher jeder beliebige dem Index x entsprechende Term irgendeinem Vielfachen des vorhergehenden zusammen mit einem Vielfachen des Index' selbst und einer gewissen konstanten Größe gleich werde.

LÖSUNG

Es sei y der dem Index x entsprechende Term und y' bezeichne den folgenden Term und es sei dieses Bildungsgesetz der Reihe vorgelegt

$$y' = my + a + bx,$$

aus welchem der Wert von y definiert werden muss. Wenn wir also für y' seinen Wert einsetzen, werden wir diese Gleichung haben:

$$a + bx + my = y + \frac{dy}{1 \cdot dx} + \frac{ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \text{etc.}$$

Auch wenn ich schon gelehrt habe, Gleichungen von dieser Art allgemein aufzulösen, wird es dennoch zuträglich sein, diese Gleichung durch eine Substitution in eine andere aufzulösen, in welcher alle Terme nur eine einzige Dimension von y in sich umfassen. Es werde also festgelegt

$$y = A + Bx + v;$$

es wird sein

$$dy = Bdx + dv, \qquad ddy = ddv \quad \text{etc.}$$

und es wird werden

$$\begin{array}{lll} a + & bx = & A + Bx + v + \dfrac{dv}{1 \cdot dx} + \dfrac{ddv}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \dfrac{d^3v}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \text{etc.} \\ +mA & +mBx & +B \end{array}$$

Nun werde

$$A + B = a + mA \quad \text{und} \quad B = b + mB$$

und es wird aufgefunden werden

$$B = \frac{-b}{m-1} \quad \text{und} \quad A = \frac{-b}{(m-1)^2} - \frac{a}{m-1}.$$

Es wird also diese Gleichung zurückbleiben

$$mv = v + \frac{dv}{1 \cdot dx} + \frac{ddv}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{d^3v}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \text{etc.};$$

weil diese auf $e^z - m = u - m = 0$ zurückgeführt wird, wird sein

$$v = m^x P$$

und daher der gesuchte allgemeine Term

$$y = \frac{-b}{(m-1)^2} - \frac{a+bx}{m-1} + m^x P.$$

Hier wird der eine einzige Fall, in welchem $m = 1$ ist, wegen des verschwindenden Nenner $m - 1$, ausgenommen. Weil man nämlich in diesem Fall haben wird

$$a + bx = v + \frac{dy}{1 \cdot dx} + \frac{ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \text{etc.},$$

muss, um den Term bx wegzuschaffen, ein Wert von dieser Art für y angenommen werden

$$y = A + Bx + Cxx + v,$$

woher wird

$$\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + \frac{dv}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{ddy}{dx^2} = 2C + \frac{ddv}{dx^2};$$

und so wird man haben

$$\begin{aligned} a+bx = \quad & B + 2Cx + \frac{dv}{1\cdot dx} + \frac{ddv}{1\cdot 2\cdot dx^2} + \frac{d^3v}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^3} + \text{etc.} \\ +C & \end{aligned}$$

Es werde also

$$C = \frac{1}{2}b \quad \text{und} \quad B = a - \frac{1}{2}b$$

und es wird $v = P$ sein und der allgemeine Term

$$y = A + \left(a - \frac{1}{2}b\right)x + \frac{1}{2}bxx + P,$$

oder weil A in der Funktion P erfasst werden kann, wird sein

$$y = \left(a - \frac{1}{2}\right)x + \frac{1}{2}bxx + P.$$

Q.E.I.

Bemerkung

§54 Reihen von dieser Art können aber auf das Bildungsgesetz von einfachen rekurrenten zurückgeführt werden. Weil nämlich gilt

$$y' = a + bx + my,$$

wird sein

$$y'' = a + b(x+1) + my',$$

woher durch subtrahieren wird

$$y'' - y' = b + my' - my;$$

auf die gleiche Weise wird sein

$$y''' - y'' = b + my'' - my'$$

und, indem erneut subtrahiert wird,

$$y''' - 2y'' + y' = my'' - 2my' + my$$

oder

$$y''' = (m+2)y'' - (2m+1)y' + my$$

oder für die vorausgehenden Terme

$$y = (m+2)\,{}'y - (2m+1)\,{}''y + m\,{}'''y.$$

Daher wird also gemäß §51 diese Gleichung gebildet werden

$$u^3 - (m+2)u^2 + (2m+1)u - m = 0,$$

welche diese Faktoren hat

$$(u-1)^2(u-m)=0,$$

aus welchen dieser allgemeine Term entspringt

$$y=P+Qx+m^xR.$$

Um nun diese sich allzu weit erstreckende Form an den vorgelegten Fall $y'=a+bx+my$ anzupassen, wird wegen

$$y'=P+Qx+Q+m\cdot m^xR$$

werden

$$P+Q+Qx+m\cdot m^xR=a+bx+mP+mQx+m\cdot m^xR$$

und daher

$$P+Q=a+mP \quad \text{und} \quad Q=b+mQ,$$

woher man findet

$$Q=\frac{-b}{m-1} \quad \text{und} \quad P=\frac{-b}{(m-1)^2}-\frac{a}{m-1},$$

so dass der allgemeine Term, wie er zuvor gefunden worden ist, dieser ist

$$y = \frac{-b}{(m-1)^2} - \frac{a+bx}{m-1} + m^x R.$$

Wenn aber $m = 1$ ist, tritt es sofort klar zutage, dass die drei Faktoren der Gleichung $(u-1)^2(u-m)$ gleich sein werden und $(u-1)^3 = 0$ wird, woher der allgemeine Term wird

$$y = P + Qx + Rxx$$

und deshalb

$$\begin{array}{llll} y' = P+ & Qx+Rxx & = P+Qx & + Rxx \\ + Q+2Rx & & a + b & x \\ + R & & & \end{array}$$

Also geht hervor

$$R = \frac{1}{2}b \quad \text{und} \quad Q = a - \frac{1}{2}b,$$

so dass der allgemeine Term dieser ist

$$y = P + \left(a - \frac{1}{2}b\right)x + \frac{1}{2}bxx,$$

wie zuvor. Auf die gleiche Weise ist es klar, wenn das Fortschreitungsgesetz im Allgemeinen dieses ist

$$y = X + \alpha\,'y + \beta\,''y + \gamma\,'''y + +\delta\,^{\mathrm{IV}}y + \text{etc.}$$

und X eine ganz rationale Funktion von x ist, wie beispielsweise

$$X = a + bx + cxx + dx^3 + \text{etc.},$$

dass durch wiederholte Subtraktion schließlich zu einem Bildungsgesetz gelangt wird, durch welches die einzelnen Terme allein durch die vorhergehenden bestimmt werden, und so die Reihe immer rekurrent sein wird, deren allgemeiner Term durch die zuvor angegebenen Vorschriften definiert werden kann. Dieser Term wird sich aber zu weit erstrecken und dieses Grundes wegen wird er, indem die Werte der Terme $'y$, $''y$, $'''y$ etc. gesucht werden, an das vorgelegte Bildungsgesetz angepasst werden müssen, auf welche Weise immer so viele Funktionen P, Q, R etc. bestimmt werden werden, wie Buchstaben a, b, c, d etc. durch Subtraktion eliminiert worden sind. Weil also Reihen von dieser Art nichts Weiter an Schwierigkeit haben, wollen wir andere betrachten, in denen X weder eine rationale noch eine ganze Funktion von x ist.

PROBLEM 9

§55 Den allgemeinen Term der Reihe zu finden, von welcher jeder beliebige Term dem vorhergehenden zusammen mit irgendeiner Funktion des Index' gleich werde.

LÖSUNG

Es sei der dem Index x entsprechende Term $= y$ und sei vorausgehender

$$'y = y - \frac{dy}{1 \cdot dx} + \frac{ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} - \frac{d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{d^4y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} - \text{etc.}$$

Das Fortschreitungsgesetz aber sei

$$y =' y + X,$$

woher werden wird

$$X = \frac{dy}{1 \cdot dx} - \frac{ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} - \frac{d^4y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \text{etc.},$$

welche Gleichung mit Hilfe der Regeln aufgelöst werden wird, welche ich vor einiger Zeit angegeben habe. Es werde natürlich durch Setzen von z^n anstelle von $\frac{d^ny}{dx^n}$ dieser Ausdruck gebildet

$$Z = z - \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.} = 1 - e^{-z},$$

all dessen Faktoren gesucht werden, deren erster z sein wird; die übrigen sind in dieser allgemeinen Form enthalten $zz + 4kk\pi\pi$. Aus dem Faktor $z - 0$ wird aber dieser Teil des Integrals entspringen

$$y = \int X dx + \text{etc.}$$

Aus dem Faktor $zz + 4kk\pi\pi$, wenn er mit der Formel $zz - 2kz\cos\varphi + kk$ verglichen wird, wird $k = 2k\pi$ und $\cos\varphi = 0$ werden, woher $\varphi = 90°$ wird, und daher werden die Buchstaben $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ wegen

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = \frac{-1}{1 \cdot 2}, \quad D = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \quad \text{etc.}$$

so bestimmt werden

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= 1 - \frac{4k^2\pi^2}{1 \cdot 2} + \frac{16k^4\pi^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{64k^6\pi^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{etc.}, \\ \mathfrak{N} &= -\frac{2k\pi}{1} + \frac{8k^3\pi^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{32k^5\pi^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \text{etc.}, \end{aligned}$$

sodass ist

$$\mathfrak{M} = \cos 2k\pi \quad \text{und} \quad \mathfrak{N} = -\sin 2k\pi.$$

Nach Finden dieser Werte wird der aus dem Faktor $zz + 4kk\pi\pi$ herstammende Anteil des Integrals dieser sein

$$y = 2\left\{\begin{matrix} (\cos 2k\pi \cos 2k\pi x - \sin 2k\pi \sin 2k\pi x)\int X dx \cos 2k\pi x \\ (\cos 2k\pi \sin 2k\pi x + \sin 2k\pi \cos 2k\pi x)\int X dx \sin 2k\pi x \end{matrix}\right\};$$

aber es ist $\sin 2k\pi = 0$, $\cos 2k\pi = 1$, woher sein wird

$$v = 2\cos 2k\pi x \int X dx \cos 2k\pi x + 2\sin 2k\pi x \int X dx \sin 2k\pi x.$$

Wenn daher nun all diese aus der Veränderlichkeit der Zahl k herstammenden Werte zu einer Summe gesammelt werden, wird der gesuchte allgemeine Term hervorgehen als:

$$\begin{aligned} y = \int X dx + 2\cos 2\pi x \int X dx \cos 2\pi x + 2\cos 4\pi x \int X dx \cos 4\pi x \\ + 2\cos 6\pi x \int X dx \cos 6\pi x + \text{etc.} \\ + 2\sin 2\pi x \int X dx \sin 2\pi x + 2\sin 4\pi x \int X dx \sin 4\pi x \\ + 2\sin 6\pi x \int X dx \sin 6\pi x + \text{etc.} \end{aligned}$$

Q.E.I.

KOROLLAR 1

§56 Weil $y +' y + X$ ist, ist es offenbar, dass y der summatorische Term der Reihe ist, deren allgemeiner Term $= X$ ist. Wenn nämlich die Summe aller

Terme vom ersten bis zu diesem X, dessen Index $= x$ ist, $= y$ gesetzt wird, wird die Summe aller Terme außer dem letzten $=' y$ und daher $y = \ 'y + X$ sein.

Korollar 2

§57 Der gefundene Ausdruck y oder der allgemeine Term der vorgelegten Reihe ist zugleich der summatorische Term der Reihe, deren allgemeiner Term X ist; und so haben wir einen neuen Ausdruck für die Summe einer jeden Reihe erlangt, deren allgemeiner Term gegeben ist; dieser wird aber wegen der unendlichen Menge der Integralzeichen sehr selten irgendeinen Nutzen verschaffen.

Bemerkung

§58 Wenn außer irgendeiner Funktion des Index' x nicht nur der unmittelbar vorhergehende Term, sondern mehrere der vorhergehenden zur Bildung des folgenden Termes verwendet werden, wird auf die gleiche Weise zur Auflösung einer unendlichen Differentialgleichung gelangt werden, die mit Hilfe der von mir vorgelegten Methode behandelt werden können wird. Es können also nicht nur Reihen, deren Bildungsgesetz sich auf das zweite Geschlecht bezieht, mit der hier dargestellten Methode auf eine Rechnung zurückgeführt und deren allgemeine Terme gefunden werden, sondern sie erstreckt sich auch gleichermaßen auf das dritte Geschlecht und führt die wahre Gestalt dieser Reihen klar vor Augen.

Problem 10

§59 Den allgemeinen Term der Reihe zu finden, von welcher jeder beliebige Term dem vorhergehenden mit seinem Index multiplizierten gleich sei.

Lösung

Wenn der erste Term der Einheit gleich festgelegt wird, wird diese Wallis'sche hypergeometrische Reihe entspringen:

Indizes:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9	etc.
Terme:	1,	1,	2,	6,	24,	120,	720,	5040,	40320	etc.

Es werde der dem Index x entsprechende Term $= y$ und der ihm folgende $= y'$ gesetzt, es wird gelten

$$y' = yx,$$

woher diese Gleichung entsprießt

$$yx = y + \frac{dy}{1 \cdot dx} + \frac{ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{d^4y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \text{etc.};$$

für das Auflösen einer solchen Gleichung ist aber eine allgemeine Regel nicht bekannt. Aber in einer leichten Aufgabe wird diese Gleichung in eine andere Form verwandelt, welche sich auflösen lässt. Es werde nattürlich $y = e^v$ gesetzt, es wird $y' = e^{v'}$ sein und daher wird $e^{v'} = e^v x$ und nach Nehmen von Logarithmen werden

$$v' = v + \log x,$$

weshalb man haben wird

$$\log x = \frac{dv}{1 \cdot dx} + \frac{ddv}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{d^3v}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{d^4v}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + + \frac{d^4v}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot dx^5} + \text{etc.},$$

welche Gleichung in der vorgehenden enthalten ist, indem dort $X = \log x$ gesetzt wird; deshalb wird das Integral sein

$$v = \int dx \log x + 2\cos 2\pi x \int dx \log x \cos 2\pi x + 2\cos 4\pi x \int dx \log x \cos 4\pi x + \text{etc.}$$
$$+ 2\sin 2\pi x \int dx \log x \sin 2\pi x + 2\sin 4\pi x \int dx \log x \sin 4\pi x + \text{etc.}$$

Nachdem aber der Wert von v gefunden worden ist, wird der gesuchte allgemeine Term $y = e^v$ sein, während e die Zahl bezeichnet, deren hyperbolischer Logarithmus $= 1$ ist.
Q.E.I.

BEMERKUNG

§60 Das erste Glied $\int dx \log x$ dieses Ausdruckes ist $= x\log x - x$, die übrigen Glieder werden hingegen einzeln durch unendliche Reihen integriert werden können. Es gilt nämlich

$$\int dx \log x \cos mx = +\frac{1}{m}\sin mx\left(\log x + \frac{1}{m^2x^2} - \frac{1\cdot 2\cdot 3}{m^4x^4} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{m^6x^6} - \text{etc.}\right)$$
$$+\frac{1}{m}\cos mx\left(\frac{1}{mx} - \frac{1\cdot 2}{m^3x^3} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{m^5x^5} - \text{etc.}\right)$$
$$\int dx \log x \sin mx = -\frac{1}{m}\cos mx\left(\log x + \frac{1}{m^2x^2} - \frac{1\cdot 2\cdot 3}{m^4x^4} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{m^6x^6} - \text{etc.}\right)$$
$$+\frac{1}{m}\sin mx\left(\frac{1}{mx} - \frac{1\cdot 2}{m^3x^3} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{m^5x^5} - \text{etc.}\right)$$

Daher wird erschlossen, dass sein wird

$$2\cos mx \int dx \log x \cos mx + 2\sin mx \int dx \log x \sin mx$$
$$= \frac{2}{mmx}\left(1 - \frac{1\cdot 2}{m^2x^2} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{m^4x^4} - \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{m^6x^6} + \text{etc.}\right) + \alpha\cos mx + \mathfrak{A}\sin mx.$$

Nachdem also für m nacheinander die Werte 2π, 4π, 6π etc. eingesetzt und alle Ausdrücke gesammelt worden sind, wird aufgefunden werden

$$\begin{aligned} v = C + x\log x - x + & \frac{1}{2\pi^2 x}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\text{etc.}\right)+\alpha\cos 2\pi x+\mathfrak{A}\sin 2\pi x \\ - & \frac{1\cdot 2}{8\pi^4 x^3}\left(1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{16^2}+\text{etc.}\right)+\beta\cos 4\pi x+\mathfrak{B}\sin 4\pi x \\ - & \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{32\pi^6 x^5}\left(1+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{16^3}+\text{etc.}\right)+\gamma\cos 6\pi x+\mathfrak{C}\sin 6\pi x \end{aligned}$$

etc.

Wenn nun für diese Reihen der Potenzen die von mir von langer Zeit gefundenen Summen eingesetzt werden, wird man haben

$$\begin{aligned} v = C + x\log x - x + \alpha\cos 2\pi x + \beta\cos 4\pi x + \gamma\cos 6\pi x + \text{etc.} \\ + \mathfrak{A}\sin 2\pi x + \mathfrak{B}\sin 4\pi x + \mathfrak{C}\sin 6\pi x + \text{etc.} \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2x}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1}{6x^3}+\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}\cdot\frac{1}{6x^5}-\frac{1}{7\cdot 8\cdot 9}\cdot\frac{3}{10x^7}+\frac{1}{9\cdot 10\cdot 11}\cdot\frac{5}{6x^9}-\text{etc.},$$

oder wenn P eine Funktion von geraden Dimensionen von $r = \sin\pi x$ und $s = \cos\pi x$ ist, wird sein

$$v = P + x\log x - x + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2x}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1}{6x^3}+\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}\cdot\frac{1}{6x^5}-\text{etc.}$$

Weil nun, nachdem $x = 1$ gesetzt worden ist, $y = 1$ und $v = 0$ wird, wird in diesem Fall gelten müssen

$$P = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 6} + \frac{3}{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} - \text{etc.},$$

deren Wert ich an anderer Stelle gezeigt habe, dieser zu sein

$$P = \frac{1}{2} \log 2\pi.$$

und diesen Wert wird man haben, sooft x irgendeine ganze Zahl ist. Daher wird durch Zurückgehen zu Zahlen der gesuchte allgemeine Term gefunden werden als

$$y = \frac{x^x}{e^x} \cdot e^{\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2x} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 6} \cdot \frac{1}{x^5} - \text{etc.}} \sqrt{2\pi}$$

oder

$$y = \frac{x^x}{e^x} \cdot e^{\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5} .\text{etc.}} \sqrt{2\pi}.$$

Daher, wenn x eine sehr große Zahl ist, wird naäherungsweise sein

$$y = \frac{x^x}{e^x} \left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} + \text{etc.} \right) \sqrt{2\pi}$$

und so wird die Größe jedes vom Anfang sehr weit entfernten Termes nicht schwer angegeben.