Kapitel III
Über das Unendliche und das unendlich Kleine *

Leonhard Euler

§72 Weil jede Größe, wie groß sie auch ist, weiter vermehrt werden kann und nichts im Wege steht, dass zu irgendeiner gegebenen Größe eine andere Größe desselben Geschlechts hinzu addiert werden kann, wird auch jede Größe ohne Ende vermehrt werden können; und dennoch wird sie niemals so groß werden, dass selbiger nichts Weiteres hinzugefügt werden könnte. Es ist also keine so große Größe gegeben, dass man sich eine größere als sie nicht vorstellen kann, und daher ist es außer Zweifel gestellt, dass jede Größe ins Unendliche vermehrt werden kann. Wer dies also verneint, ist gezwungen zu behaupten, dass eine Grenze gegeben ist, welche die Größe, wenn sie diese erreicht hat, nicht übersteigen kann, und daher wird er Größe festlegen müssen, welcher nichts Weiteres hinzugefügt werden könnte; weil dies aber absurd ist und der Vorstellung einer Größe widerspricht, ist notwendigerweise zu schließen, dass jede Größe ohne Ende ununterbrochen noch mehr, das heißt ins Unendliche, vermehrt werden kann.

§73 In den einzelnen Gattungen von Größen wird dies sogar noch deutlicher erkannt werden. So wird so leicht niemand gefunden, der behaupten wird, dass die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc jemals so begrenzt wird, dass sie nicht weiter fortgesetzt werden kann. Denn es ist keine Zahl

*Originaltitel: "Caput *III*. De infinitis atque infinite parvis", erstmals publiziert im Jahre 1755", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 10, pp 65-82", Eneström-Nummer E212, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz" gegeben, zu welcher nicht darüber hinaus die Einheit addiert werden kann und so die folgende größere Zahl dargeboten werden kann; daher schreitet die Reihe der natürlichen Zahlen ohne Ende voran und es wird niemals zu einer größten Zahl gelangt, dass eine größere nicht gegeben ist. Auf die gleiche Weise kann eine gerade Linie niemals so weit fortgeführt werden, dass sie darüber hinaus nicht weiter verlängert werden könnte. Mit diesen Dingen wird es dargetan, dass so die Zahlen ins Unendliche vermehrt werden wie Linien bis ins Unendliche weiter gezeichnet werden können. Weil diese Gattungen von Größen sind, wird zugleich eingesehen, dass zu jeder Größe, wie groß sie auch ist, noch eine größere gegeben ist und erneut eine größere als diese und so, indem sie immer weiter vermehrt wird, ohne Ende, das heißt bis ins Unendliche, fortgeschritten werden kann.

§74 Obwohl aber diese Dinge so klar sind, dass, wer sie verneinen wollte, sich selbst widersprechen müsste, ist dennoch diese Lehre des Unendlichen von vielen, die sie zu erklären versucht haben, dermaßen verdunkelt und in so große Schwierigkeiten und auch Wiedersprüche eingehüllt worden, dass kein Weg, auf dem sie sich aufösen würden, bekannt ist. Aus der Tatsache, dass eine Größe ins Unendliche vermehrt werden kann, haben einige geschlossen, dass in Wirklichkeit eine unendliche Größe gegeben ist und haben sie so beschrieben, dass sie keinen weiteren Zuwachs erhalten kann. Damit selbst stoßen sie aber die Idee einer Größe um, während sie eine Größe solcher Art festlegen, die nicht weiter vermehrt werden kann. Außerdem widersprechen sie, das Unendliche zulassend, sich in der Tat selbst; während sie nämlich ein Ende des Zuwachses, wessen eine Größe fassungsfähig ist, festlegen, verneinen sie zugleich, dass die Größe selbst ohne Ende vermehrt werden kann; sie verneinen also auch, dass eine Größe ins Unendliche vermehrt werden kann, weil ja jede der beiden Redensarten übereinstimmt; und so, während sie eine unendliche Größe festlegen, beseitigen sie sie zugleich. Wenn aber eine Größe nicht ohne Ende, das heißt ins Unendliche, vermehrt werden kann, wird gewiss keine unendliche Größe existieren können.

§75 Daher mag also aus dem selbst, dass jede Größe ins Unendliche vermehrt werden kann, zu folgen scheinen, dass keine unendliche Größe gegeben ist. Denn eine mit ununterbrochenen Zuwächsen vermehrte Größe wird nur unendlich werden, wenn sie schon ohne Ende gewachsen ist; weil das aber ohne Ende geschehen muss, kann es nicht als bereits geschehen aufgefasst werden. Dennoch ist es nicht nur möglich, eine Größe von dieser Art, zu welcher mit ohne Ende zusammengetragenen Zuwächsen gelangt wird, mit einem gewissen Charakter anzuzeigen und so auf entsprechende Weise in eine Rechnung einzuführen, wie wir bald ausführlicher zeigen werden, sondern auch in der Welt können Fälle solcher Art existieren oder sich zumindest vorgestellt werden, in welchen eine unendliche Zahl tatsächlich zu existieren scheint. So, wenn Materie ins Unendliche teilbar ist, wie viele Philosophen festgelegt haben, wird die Anzahl der Teile, aus denen ein gewisses Stück Materie besteht, in Wirklichkeit unendlich sein; wenn sie nämlich endlich festgelegt werden würde, wäre die Materie gewiss nicht ins Unendliche teilbar. Auf die gleiche Weise, wenn die ganze Welt unendlich wäre, wie es die Auffassung vieler war, könnte die Anzahl der die Welt zusammensetzenden Körper gewiß nicht endlich sein und wäre daher auch unendlich.

§76 Auch wenn diese Dinge einander zu widersprechen scheinen, werden sie dennoch, wenn sie aufmerksamer betrachtet werden, von allen Ungereimtheiten befreit werden können. Wer nämlich behauptet, dass Materie ins Unendliche teilbar ist, der verneint, dass bei der ununterbrochenen Teilung der Materie jemals zu so kleinen Teilen gelangt wird, die nicht weiter geteilt werden können; die Materie wird also keine nicht weiter teilbaren Teile haben, weil die einzelnen Teilchen, zu welchen durch ununterbrochene Teilung schon gelangt worden ist, es zulassen, weiter zerteilt zu werden. Wer also sagt, dass in diesem Fall die Anzahl der Teile unendlich sein wird, der versteht letzte Teile, die nicht weiter teilbar sind; weil zu diesen niemals gelangt wird und diese deshalb keine sind, versucht er diese Teile selbst, die keine sind, zu zählen. Wenn nämlich die Materie ohne Ende ununterbrochen weiter zerteilt werden kann, ist sie von unteilbaren oder einfachen Teilen vollkommen frei und es bleibt daher nichts übrig, was gezählt werden kann. Dieser Sache wegen, wer die Materie ins Unendliche teilbar festlegt, der verneint zugleich, dass die Materie dies einfachen Teilen zusammengesetzt ist.

§77 Wenn wir daher aber, während wir über Teile eines Körpers oder von Materie reden, nicht die letzten oder einfachen, die natürlich keine sind, verstehen, sondern die, die die Teilung in Wirklichkeit hervorbringt, dann, nach Zulassen dieser Annahme über die Teilbarkeit der Materie ins Unendliche, wird irgendein wenn auch sehr kleines Stück Materie nicht nur in mehrere Teile zerteilt, sondern es wird auch keine so große Zahl angegeben werden können, dass eine größere Anzahl als selbige an aus jenem Stück geschnittenen Teilen dargeboten werden kann. Also wird freilich nicht die Anzahl der letzten Teile, sondern welche selbst noch weiter teilbar sind, die irgendeinen einzigen Körper festlegen, größer als jede angebbare Zahl sein. Auf die gleiche Weise, wenn die ganze Welt unendlich ist, wird die Anzahl der die Welt festlegenden Körper in gleicher Weise größer als jede angebbare Zahl sein; weil diese nicht endlich sein kann, folgt, dass die Anzahl unendlich oder die Zahl größere als jede angebbare Zahl, synonyme Bezeichnungen sind.

§78 Wer also auf diese Weise die Teilbarkeit der Materie ins Unendliche anschaut, verstrickt sich in keine Unannehmlichkeiten, die für gewöhnlich dieser Meinung zugeschrieben werden, und der ist auch nicht gezwungen, etwas zu bestätigen, was einem gesunden Verstand widerspricht. Welche aber dagegen verneinen, dass Materie ins Unendliche teilbar ist, die werden in größte Schwierigkeiten geraten, aus welchen sie sich auf überhaupt keine Weise befreien können. Sie werden nämlich gezwungen zu behaupten, dass irgendein Körper nur in eine gewisse Anzahl an Teilen zerschnitten werden kann, wenn zu welcher gelangt war, keine weitere Teilung einen Platz findet; diese letzten Teilchen nennen die einen Atome die anderen Monaden oder einfache Entität. Warum aber diese letzten Teilchen keine weitere Teilung zulassen, kann zwei Gründe haben: zum einen, weil sie von jeder Ausdehnung frei sind; zum anderen, weil sie zwar ausgedehnt sind, aber dennoch so hart und so beschaffen sind, dass keine Kraft, um sie zu zerspalten, ausreicht. Was von beiden die Verteidiger dieser Meinung sagen, sie verwickeln sich gleichermaßen in Schwierigkeiten.

§79 Es seien nämlich die letzten Teilchen frei von jeder Ausdehnung, so dass sie überhaupt keine Teile haben; mit dieser Erklärung schützen sie freilich die Idee der einfachen Entitäten äußerst gut. Aber, wie ein Körper aus einer endlichen Anzahl an Teilchen von dieser Art bestehen kann, kann sich auf keine Weise vorgestellt werden. Wir wollen festlegen, dass ein Kubikfuß von Materie aus tausend einfachen Entitäteten von dieser Art zusammengesetzt ist und dieser tatsächlich in tausend Teile zerschnitten wird; wenn diese gleich sind, werden sie tausend Kubik-Fingerbreit sein; wenn sie aber ungleich sind, werden die einen größer, die anderen kleiner sein. Ein Kubik-Fingerbreit wäre also eine einfache Entität und so würde der größte Widerspruch resultieren, wenn sie nicht zufällig sagen wollten, dass in einem Kubik-Fingerbreit nur eine einfache Entität enthalten ist und der übrige Raum leer ist; aber in der Tat würden sie auf diese Weise die Kontinuität der Körper verwerfen, abgesehen davon, dass diese Philosophen das Vakuum gänzlich aus der Welt verbannen. Wenn sie daher einwenden, dass die Anzahl der einfachen Entitäten, die einen Kubik-Fuß Materie festlegen, weitaus größer ist, gewinnen sie nichts; denn der Umstand, welcher aus einer tausend enthaltenden Zahl folgt, bleibt aus jeder anderen wie großen Zahl auch immer gleichermaßen bestehen. Diese Schwierigkeit hat der sehr scharfsinnige Leibniz, der erste Entdecker der Monaden, wunderbar erkannt, während er die Materie uneingeschränkt ins Unendliche teilbar festlegt. Und daher ist es also nicht vorher möglich zu Monaden zu gelangen, bis der Körper tatsächlich bis ins Unendliche geteilt worden ist. Und damit selbst verwirft er aber die Existenz der einfachen Entitäten, aus denen Körper bestehen, völlig; denn der, der verneint, dass Körper aus einfachen Entitäten zusammengesetzt sind, und jener, der behauptet, dass Körper ins Unendliche teilbar sind, sind völlig derselben Meinung.

§80 Und sie bleiben sich in der Tat nicht mehr treu, wenn sie sagen, dass die letzten Teilchen der Körper zwar ausgedehnt sind, aber wegen der sehr hohen Härte nicht in Teile zerrissen werden können. Weil sie nmalich zuerst in den letzten Teilchen eine Ausdehnung zulassen, behaupten sie, dass sie aus Teilen zusammengesetzt sind, ob welche tatsächlich voneinander getrennt werden können oder nicht, zählt dabei kaum, auch wenn sie keinen Grund angeben können, woher eine so große Härte entsprungen ist. Nun scheinen aber die meisten, die die Teilbarkeit der Materie ins Unendliche vermeiden, diesen letzten Umstand hinreichend bemerkt zu haben, weil sie hauptsächlich an der Idee der letzten Teile festhalten; und diese Schwierigkeiten können sie nicht anders auflösen außer mit einzigen ziemlich eitlen metaphysischen Begründungen, die sie zum größtem Teil darauf abzielen, dass wir den logischen Schlussfolgerungen, die gemäß der mathematischen Prinzipien gebildet werden, nicht trauen sollen, und sie erwidern, dass Dimensionen bei einfachen Teilchen nicht verwendet werden dürfen. Aber zuerst hätten sie beweisen müssen, dass ihre letzten Teile, von denen eine bestimmte Anzahl den Körper festlegt, überhaupt nicht ausgedehnt sind.

§81 Weil sie also aus diesem Irrgarten keinen Ausweg finden und auch den Einwänden nicht auf entsprechende Weise entgegenen können, flüchten sie sich zu anderen Gründen, antwortend, dass diese Einwände von den

Sinnen und auf die Vorstellungskraft gestützt sind, bei dieser Aufgabe aber allein der reine Intellekt zu verwenden ist, die Wahrnehmung und die davon abhängenden Schlüsse hingegen oftmals fraglich sind. Der reine Intellekt wird natürlich erkennen, dass es geschehen kann, dass der tausendste Teil eines Kubikfußes an Materie von jeder Ausdehnung frei ist, was in der Vorstellung absurd erscheinen mag. Dann aber, weil die Sinne oftmals irren, ist die Sache freilich wahr, aber niemand geringerem als Mathematikern kann sie ausgesetzt werden. Denn die Mathematik verteidigt uns besonders vor der Täuschung der Sinne und lehrt, dass Objekte, die mit den Sinnen wahrgenommen werden, einerseits tatsächlich so beschaffen sind, andererseits in der Tat so erscheinen; und diese sicherste Wissenschaft gibt Vorschriften an, dass die, welche sie befolgen, vor jeder Sinnestäuschung und Antworten immun sind. Antworten von dieser Art fehlt es also nur, dass sie ihre Lehre mit der Metaphysik schützen, um sie noch verdächter zu machen.

§82 Um aber zum Vorhaben zurückkehren, auch wenn jemand verneint, dass auf der Welt eine unendliche Zahl tatsächlich existiert, tauchen dennoch in mathematischen Betrachtungen sehr oft Fragen auf, auf welche, wenn nicht eine unendliche Anzahl zugelassen wird, nicht geantwortet werden könnte. So, wenn die Summe aller Zahlen gesucht wird, die diese Reihe $1 + 2 + 3 + 4 + 5 +$ etc festlegt, weil diese Zahlen ohne Ende fortschreiten und wachsen, wird die Summe all derer gewiss nicht endlich sein können; dadurch selbst wird bewirkt, dass sie unendlich ist. Daher kann, welche Größe so groß ist, dass sie größer als jede endliche Größe ist, nicht endlich sein. Um eine Größe von dieser Art zu bezeichnen, gebrauchen Mathematiker dieses Zeichen ∞, mit welchem eine Größe größer als jede endliche oder angebbare Größe bezeichnet wird. So, weil die Parabel so definiert werden kann, dass gesagt wird, dass sie eine unendlich weite Ellipse ist, werden wir mit Recht behaupten können, dass die Achse einer Parabel eine unendliche gerade Linie ist.

§83 Diese Lehre des Unendlichen wird noch mehr illustriert werden, wenn wir, was für Mathematiker das unendlich Kleine ist, dargelegt haben werden. Es besteht aber kein Zweifel, dass jede Größe soweit vermindert werden kann, bis sie schließlich verschwindet und ins Nichts übergeht. Aber eine unendlich kleine Größe ist nichts anderes als eine verschwindende Größe und wird daher in Wahrheit $= 0$ sein. Damit stimmt auch die Definition des unendlich Kleinen überein, nach welcher sie kleiner als jede angebbare Größe gesagt werden; wenn nämlich eine Größe so klein war, dass sie kleiner als jede angebbare Größe ist, wird sie gewiss nicht nicht Null sein können; denn wenn sie nicht $= 0$ wäre, könnte eine selbiger gleiche Größe angegeben werden, was wider der Annahme wäre. Einem, der fragt, was eine unendlich kleine Größe in der Mathematik ist, antworten wir, dass sie in Wahrheit $= 0$ ist; und daher sind in dieser Idee nicht so große Geheimnisse verborgen, wie für gewöhnlich geglaubt wird und welche das Kalkül des unendlich Kleinen äußerst verdächtig gemacht haben. Dennoch werden diese Zweifel, wenn welche übrig sind, im Folgenden, wo wir dieses Kalkül darlegen werden, grundlegend beseitigt werden.

§84 Weil wir also gezeigt haben, dass eine unendlich kleine Größe in Wirklichkeit Null ist, ist zuerst dem Einwand zu entgegnen, warum wir unendlich kleine Größen nicht ununterbrochen mit demselben Charakter 0 bezeichnen, sondern eigene Zeichen, um sie kennzuzeichnen, verwenden. Weil nämlich alle Formen von Nichts einander gleich sind, scheint es überflüssig, sie mit verschiedenen Zeichnen zu bezeichnen. Aber obwohl jegliche zwei Nullen so einander gleich sind, dass deren Differenz nichts ist, ist dennoch, weil es zwei Arten des Vergleiches gibt, zum einen den arithmetischen, zum anderen den geometrischen, von welchen wir in jenem die Differenz, in diesem hingegen den aus zwei zu vergleichenden Größen entspringenden Quotienten anschauen, das arithmetische Verhältnis zwischen jeglichen zwei Nullen ist zwar das der Gleichheit, aber nicht das geometrische Verhältnis. Dies wird sehr leicht aus dieser geometrischen Proportion $2 : 1 = 0 : 0$ erkannt werden, in welcher der vierte Term $= 0$ ist wie der dritte. Aus der Natur der Proportionen, weil der erste Term doppelt so groß ist wie der zweite, ist es notwendig, dass der dritte doppelt so groß ist wie der vierte.

§85 Diese Dinge sind aber auch in der gewöhnlichen Arithmetik vollkommen klar; jedem beliebigen ist nämlich bekannt, dass die Null mit jeder Zahl multipliziert wieder die Null gibt und $n \cdot 0 = 0$ ist und so $n : 1 = 0 : 0$ sein wird. Daher tritt es klar zutage, dass es geschehen kann, dass zwei Nullen zueinander irgendein geometrisches Verhältnis haben, auch wenn, indem die Sache arithmetisch betrachtet wird, deren Verhältnis immer das der Gleichheit ist. Weil also zwischen zwei Nullen irgendein Verhältnis bestehen kann, werden, um diese Diversität anzuzeigen, klugerweise verschiedene Charaktere benutzt, besonders dann, wenn das geometrische Verhältnis, was verschiedene Nullen zueinander haben, ausfindig zu machen ist. Im Kalkül des unendlich Kleinen wird aber von nichts anderem gehandelt, außer dass das geometrische Verhältnis zwischen verschiedenen unendlich kleinen Größen untersucht wird, welche Aufgaben deshalb, wenn wir nicht verschiedene Zeichen, um sie anzuzeigen, gebrauchen würden, in größte Unordnung gerieten und auf keine Weise erledigt werden können.

§86 Wenn also, welche Bezeichnungsweise in der Analysis des Unendlichen gebräuchlich geworden ist, dx eine unendlich kleine Größe bezeichnet, wird so $dx = 0$ wie $adx = 0$ sein, während a irgendeine endliche Größe bezeichnet. Weil dies dennoch nicht im Wege steht, wird das geometrische Verhältnis $adx : dx$ endlich sein, nämlich wie $a : 1$, und dieser Sache wegen werden die zwei unendlich kleinen Größen dx und adx, auch wenn jede der beiden $= 0$ ist, miteinander nicht vermischt werden können, wenn freilich deren Verhältnis untersucht wird. Auf die gleiche Weise, wenn verschiedene unendlich kleine Größen dx und dy auftauchen, auch wenn jede der beiden $= 0$ ist, ist dennoch deren Verhältnis nicht bekannt. Und im Ausfindigmachen des Verhältnisses zwischen jeglichen zwei unendlich kleinen Größen dieser Art besteht die ganze Kraft des Differentialkalküls. Der Nutzen dieses Vergleiches, auch wenn er auf den ersten Blick äußerst gering scheint, wird aber dennoch als sehr umfangreich entdeckt und wird sich noch nach und nach zeigen.

§87 Weil also das unendlich Kleine in Wahrheit nichts ist, tritt es klar zutage, dass eine endliche Größe weder vermehrt noch vermindert wird, wenn wir zu ihr etwas unendlich Kleines entweder addieren oder von ihr subtrahieren. Es sei a eine endliche und dx eine unendlich kleine Größe; es wird so $a + dx$ wie $a - dx$ und allgemein $a \pm ndx = a$ sein. Ob wir nämlich die Relation zwischen $a \pm ndx$ und a entweder arithmetisch oder geometrisch betrachten, in jedem der beiden Fälle wird ein Verhältnis der Gleichheit entdeckt werden. Das arithmetische Verhältnis der Gleichheit ist freilich offenbar; weil nämlich $ndx = 0$ ist, wird sein

$$a \pm ndx - a = 0;$$

das geometrische Verhältnis der Gleichheit tritt hingegen daher klar zutage, weil gilt

$$\frac{a \pm ndx}{a} = 1$$

Daher folgt also jene im höchsten Maße gebräuchliche Regel, dass unendlich kleine Größen in Bezug auf endliche verschwinden und daher in Anbetracht dieser verworfen werden können. Daher entfällt jener Einwand, in welchem behauptet wird, dass die Analysis des Unendlichen die geometrische Strenge missachtet, von selbst, weil nicht anderes verworfen wird, außer was in Wahrheit nichts ist. Und deshalb lässt sich mit Recht behaupten, dass in dieser höheren Wissenschaft die höchste geometrische Strenge, die in den Büchern der Alten entdeckt wird, gleichermaßen sorgsam bewahrt wird.

§88 Weil ja die unendlich keine Größe dx in Wirklichkeit $= 0$ ist, wird auch ihr Quadrat dx^2, Kubus dx^3 und jegliche andere Potenz, die einen positiven Exponenten hat, $= 0$ zu setzen sein und daher werden sie gleichermaßen in Bezug auf endliche Größen verschwinden. Aber tatsächlich verschwindet die unendlich kleine Größe dx^2 sogar in Bezug auf dx selbst; es wird nämlich $dx \pm dx^2$ zu dx im Verhältnis der Gleichheit stehen, ob der Vergleich arithmetisch oder geometrisch angestellt wird. Über das Erste besteht kein Zweifel; aber indem geometrisch verglichen wird, wird sein

$$dx \pm dx^2 : dx = \frac{dx \pm dx^2}{dx} = 1 \pm dx = 1.$$

Auf die gleiche Weise wird $dx \pm dx^3 = dx$ und allgemein $dx \pm dx^{n+1} = dx$ sein, solange n eine größere Zahl als Null ist; denn das geometrische Verhältnis wird $dx \pm dx^{n+1} : dx = 1 \pm dx^n$ und daher wegen $dx^n = 0$ das Verhältnis der Gleichheit sein. Wenn also, wie es bei Potenzen geschieht, dx als unendlich kleine Größe erster Ordnung, dx^2 als eine zweiter Ordnung, dx^3 dritter Ordnung und so weiter bezeichnet wird, so ist es offenbar, dass sie in Bezug auf die unendlich kleinen Größen höherer Ordnung verschwinden.

§89 Auf die gleiche Weise wird gezeigt werden, dass unendlich kleine Größen dritter und höherer Ordnungen in Bezug auf die unendlich kleinen Größen zweiter Ordnung verschwinden und im Allgemeinen unendlich kleine Größen jeglicher höheren Ordnung in Bezug auf unendlich kleine Größen einer geringeren Ordnung verschwinden. So, wenn m eine größere Zahl als n war, wird sein

$$adx^m + bdx^n = adx^m,$$

weil dx^n in Bezug auf dx^m verschwindet, wie wir gezeigt haben. Und dies hat auch bei gebrochenen Exponenten Geltung; so wird dx in Bezug auf $\sqrt{dx}$ oder

$dx^{\frac{1}{2}}$ verschwinden und es wird sein

$$a\sqrt{dx} + bdx = a\sqrt{dx}.$$

Wenn daher aber der Exponent von $dx = 0$ ist, wird $dx^0 = 1$ sein, obgleich $dx = 0$ ist; daher wird die Potenz dx^n, weil sie $= 1$ wird, wenn $n = 0$ ist, aus einer endlichen sofort eine unendlich kleine Größe, obgleich der Exponent n größer als Null wird. Daher gibt es also unendlich viele Ordnung des unendlich Kleinen, die, auch wenn sie $= 0$ sind, dennoch sorgsam voneinander unterschieden werden müssen, wenn wir auf deren gegenseitige Relation, die durch das geometrische Verhältnis erklärt wird, achten.

§90 Nachdem also festgesetzt worden ist, wie das unendlich Kleine zu verstehen ist, werden wir leichter die Beschaffenheit des Unendlichen oder unendlich Großen darlegen können. Es ist bekannt, dass der Wert des Bruches $\frac{1}{z}$ umso größer wird, umso mehr der Nenner z vermindert wird; daher, wenn z eine Größe kleiner als jede angebbare Größe oder sie unendlich klein war, ist es von Nöten, dass der Wert des Bruches $\frac{1}{z}$ größer als jede angebbare Größe und daher unendlich wird. Deswegen, wenn die Einheit oder jede andere endliche Größe durch das unendlich Kleine oder 0 geteilt wird, wird der Quotient unendlich groß und daher eine unendliche Größe sein. Weil also dieses Zeichen ∞ eine unendlich große Größe bezeichnet, wird man diese Gleichung haben

$$\frac{a}{dx} = \infty;$$

deren Gültigkeit tritt auch daher klar zutage, dass durch Invertieren gilt

$$\frac{a}{\infty} = dx = 0.$$

Denn umso größer der Nenner z des Bruches $\frac{a}{z}$ festgelegt wird, umso kleiner wird der Wert des Bruches, und wenn z eine unendlich große Größe oder $z = \infty$ wird, ist es von Nöten, dass der Wert des Bruches $\frac{a}{\infty}$ unendlich klein wird.

§91 Wer also jeden der beiden dieser logischen Schüsse verneint hat, der gerät notwendigerweise in größte Unannehmlichkeiten und stößt sogar die sichersten Fundamente der Analysis um. Wer nämlich behauptet, dass der Wert des Bruches $\frac{a}{0}$ endlich wie b ist, ginge, indem auf beiden Seiten mit dem

Nenner multipliziert wird, $a = 0 \cdot b$ hervor und daher würde die endliche Größe b mit Null, 0, multipliziert eine endliche Größe liefern, was absurd wäre. Um Vieles weniger wird jener Wert b des Bruches $\frac{a}{0} = 0$ sein können; denn 0 wird mit 0 multipliziert auf keine Weise die Größe a hervorbringen können. Auf dieselbe Absurdität stößt der, der verneint, dass $\frac{a}{\infty} = 0$ ist; er wird nämlich zu sagen haben, dass $\frac{a}{\infty} =$ der endlichen Größe b ist; daher weil aus der Gleichung $\frac{a}{\infty} = b$ nach den Rechenregeln diese $\infty = \frac{a}{b}$ folgt, wäre dies der Wert des Bruches $\frac{a}{b}$, dessen Zähler und Nenner endliche Größen sind, unendlich groß, was absurd wäre. Und in der Tat können die Werte der Brüche $\frac{a}{0}$ und $\frac{a}{\infty}$ auch nicht imaginär gesetzt werden, deshalb weil der Wert des Bruches, dessen Zähler endlich ist, dessen Nenner hingegen imagär ist, weder endlich groß noch unendlich klein sein kann.

§92 Also wird eine unendlich große Größe, zu welcher uns diese Betrachtung geführt hat und die allein in der Analysis des Unendlichen auftritt, am angenehmsten definiert, indem gesagt wird, dass eine unendlich große Größe der Quotient ist, der aus der Division einer endlichen Größe durch eine unendlich kleine entspringt. Umgekehrt wird also eine unendlich kleine Größe der Quotient sein, der aus der Division einer endlichen Größe durch eine unendlich große entspringt. Daher, weil eine geometrische Proportion solcher Art besteht, dass sich eine unendlich kleine Größe zu einer endlichen wie eine endliche zu einer unendlich großen verhält: so, wie eine unendlich große Größe unendlich größer ist als eine endliche, wird eine endliche Größe unendlich mal größer als eine unendlich kleine sein. Redewendungen von dieser Art, die vielen missfallen, sind nicht zu verwerfen, weil sie auf sicherste Prinzipien gestützt sind. Des Weiteren folgt aus der Gleichung $\frac{a}{0} = \infty$ auch, dass es geschehen kann, dass Null mit einer unendlich großen Größe multipliziert eine endliche Größe hervorbringt, was befremdlich erscheinen könnte, wenn es nicht sehr klar durch eine legitime logische Schlussfolgerung abgeleitet worden wäre.

§93 Weil ja also zwischen den unendlich kleinen Größen, wenn sie nach dem geometrischen Verhältnis miteinander verglichen werden, ein sehr großer Unterschied entdeckt wird, so besteht auch zwischen unendlich großen Größen eine um Vieles größere Differenz, weil sie sich nicht nur geometrisch, sondern auch arithmetisch verglichen unterscheiden. Es werde jene unendliche Größe, die aus der Division der endlichen Größe a durch die unendlich kleine dx

entspringt, $= A$ gesetzt, so dass $\frac{a}{dx} = A$ ist; es wird natürlich gelten

$$\frac{2a}{dx} = 2A \quad \text{und} \quad \frac{na}{dx} = nA;$$

weil also auch nA eine unendliche Größe ist, folgt, dass zwischen unendlich großen Größen irgendein Verhältnis bestehen kann. Und daher, wenn eine unendliche Größe mit einer endlichen Zahl entweder multipliziert oder aber durch sie geteilt wird, wird eine unendliche Größe hervorgehen. Und daher kann also über unendliche Größen nicht verneint werden, dass sie weiter vermehrt werden können. Leicht wird aber erkannt, wenn das geometrische Verhältnis, welches zwei unendliche Größen zueinander haben, nicht das der Gleichheit war, dass dann um Vieles weniger deren arithmetisches Verhältnis das der Gleichheit sein kann, weil deren Differenz viel mehr immer unendlich groß ist.

§94 Wie verdächtig aber auch einigen die Idee des Unendlichen, die wir in der Mathematik gebrauchen, erscheinen mag, die dann dieser Sache wegen die Analysis zugrunde zu richten müssen glauben, so können wir dennoch dieser Idee nicht einmal in trivialen Teilen der Mathematik entsagen. Denn in der Arithmetik, wo die Lehre der Logarithmen angegeben zu werden pflegt, wird der Logarithmus von Null sowohl negativ als auch unendlich groß festgelegt und keiner ist sogar im Geiste dermaßen befangen, dass er es wagt, diesen Logarithmus entweder endlich oder sogar gleich Null zu festzulegen. Aber in der Geometrie und der Trigonometrie wird dies noch besser klar; wer wird nämlich jemals verneinen, dass der Tangens oder der Sekans eines rechten Winkels nicht unendlich groß ist? Und weil das Rechteck aus Tangens mit Kotangens dem Quadrat des Radius' gleich ist, der Kotangens eines rechten Winkels aber $= 0$ ist, muss in der Geometrie daher eingeräumt werden, dass das Produkt eines aus Null und Unendlich endlich ist.

§95 Weil $\frac{a}{dx}$ eine unendliche Größe A ist, tritt es klar zutage, dass die Größe $\frac{A}{dx}$ eine unendlich mal größere Größe sein wird als A; es ist nämlich $\frac{a}{dx} : \frac{A}{dx} = a : A$, das heißt eine endliche Zahl zu einer unendlich großen. Es sind also unter den unendlich großen Größen Relationen solcher Art gegeben, dass die einen unendlich mal größer sein können als die anderen. So wird die unendliche Größe $\frac{a}{dx^2}$ unendlich mal so groß sein wie $\frac{a}{dx}$; denn für $\frac{a}{dx} = A$ gesetzt wird $\frac{a}{dx^2} = \frac{A}{dx}$ sein. Auf die gleiche Weise wird die unendliche Größe

$\frac{a}{dx^3}$ unendlich mal so groß sein wie $\frac{a}{dx^2}$ und daher unendlich mal so groß wie $\frac{a}{dx}$. Es sind also Unendlichkeitsgrade gegeben, von denen jeder einzelne jeweils unendlich mal kleiner ist als der jeweilige vorhergehende; und daher, wenn die Zahl m auch nur ein klein wenig größer als n ist, wird die unendliche Größe $\frac{a}{dx^n}$ unendlich mal kleiner sein als die unendliche Größe $\frac{a}{dx^n}$.

§96 Wie aber bei den unendlich kleinen Größen geometrisch ungleiche Größe gegeben sind, obwohl dennoch deren arithmetische Verhältnisse alle gleich sind, so sind auch bei den unendlich großen Größen geometrisch gleiche Verhältnisse gegeben, obwohl dennoch die arithmetischen dermaßen ungleich sind. Wenn nämlich a und b endliche Größen bezeichnen, haben diese zwei unendlichen Größen $\frac{a}{dx}+b$ und $\frac{a}{dx}$ ein geometrisches Verhältnis der Gleichheit; denn der aus deren Teilung entstehender Quotient wird $= 1+\frac{bdx}{a} = 1$ wegen $dx = 0$ sein; dennoch wird indes, wenn sie arithmetisch verglichen werden, wegen der Differenz $= b$ das Verhältnis das der Ungleichheit sein. Auf die gleiche Weise hat $\frac{a}{dx^2}+\frac{a}{dx}$ zu $\frac{a}{dx^2}$ ein geometrisches Verhältnis der Gleichheit, obwohl der Exponent des Verhältnisses ist $= 1+dx = 1$; aber dennoch ist die Differenz $\frac{a}{dx}$ und daher unendlich. Daher, wenn wir auf das geometrische Verhältnis schauen, verschwinden die unendlich großen Größen der geringeren Grade in Bezug auf die unendlich großen der höheren Grade.

§97 Nachdem diese Dinge über die Grade des Unendlichen im Voraus angemerkt worden sind, wird bald klar werden, dass es geschehen kann, dass das Produkt aus einer unendlich großen Größe mit einer unendlich kleinen Größe nicht nur eine endliche Größe hervorbringt, was wir oben passiert zu sein gesehen haben, sondern auch es wird auch ein Produkt von dieser Art entweder unendlich groß oder unendlich klein sein können. So, wenn die unendliche Größe $\frac{a}{dx}$ mit der unendlich kleinen Größe dx multipliziert wird, gibt sie das endliche Produkt $= a$; wenn aber $\frac{a}{dx}$ mit der unendlich kleinen Größe dx^2 oder dx^3 oder einer anderen von höheren Ordnung multipliziert wird, wird das Produkt entweder adx oder adx^2 oder adx^3 etc und daher unendlich klein sein. Auf dieselbe Weise wird eingesehen werden, wenn die unendliche Größe $\frac{a}{dx^2}$ mit der unendlich kleinen dx multipliziert wird, dass das Produkt unendlich groß sein wird; und allgemein, wenn $\frac{a}{dx^n}$ mit bdx^m multipliziert wird, wird das Produkt ab dx^{m-n} unendlich klein sein, wenn m n übersteigt, endlich wenn m n gleich wird, und unendlich groß, wenn m von n überragt wird.

§98 So unendlich kleine wie unendlich große Größen tauchen in Reihen von Zahlen sehr oft auf; weil sie in diesen mit endlichen Zahlen vermischt sind, wird aus ihnen glänzend klar werden, wie gemäß der Kontinuitätsgesetze der Übergang von endlichen Größen zu unendlich großen und unendlich kleinen geschieht. Wir wollen zuerst die Reihe der natütlichen Zahlen betrachten, die zugleich rückwärts fortgesetzt diese sein wird

$$\text{etc} \ -4, \ -3, \ -2, \ -1, \ +0, \ +1, \ +2, \ +3, \ +4, \text{etc.}$$

Also liefern die Zahlen beim ununterbrochenen Abnehmen schließlich 0 oder das unendlich Kleine, von wo aus sie weiter fortgesetzt negativ werden. Deswegen wird daraus eingesehen, dass sie von abnehmenden positiven endlichen Zahlen durch 0 hindurch zu wachsenden negativen übergehen. Wenn aber die Quadrate dieser Zahlen angeschaut werden, weil sie alle positiv sind,

$$\text{etc} \ +16, \ +9, \ +4, \ +1, \ +0, \ +1, \ +4, \ +9, \ +16, \text{etc,}$$

wird 0 auch der Übergang der abnehmenden positiven Zahlen zu zunehmenden positiven sein; und wenn die Vorzeichen verändert werden, wird auch 0 der Übergang der abnehmenden negativen Zahlen zu negativen wachsenden sein.

§99 Wenn die Reihe betrachtet wird, deren allgemeiner Term $\sqrt{x}$ ist, die auch rückwärts fortgesetzt von dieser Art sein wird

$$\text{etc} \ +\sqrt{-4}, \ +\sqrt{-3}, \ +\sqrt{-2}, \ +\sqrt{-1}, \ +0, \ +\sqrt{1}, \ +\sqrt{2}, \ +\sqrt{3}, \ +\sqrt{4}, \text{etc,}$$

tritt aus ihr klar zutage, dass 0 auch als Grenze betrachtet werden kann, durch welche hindurch von reellen zu imaginären Größen übergegangen wird. Wenn diese Terme als Ordinaten von Kurven betrachtet werden, wird erkannt, wenn sie positiv waren und soweit abgenommen haben, dass sie schließlich verschwinden, dass sie dann weiter fortgesetzt entweder negativ oder wiederum positiv oder sogar imaginär werden. Dasselbe wird passieren, wenn die Ordinaten zuerst negativ waren; dann werden sie nämlich gleichermaßen, nachdem sie verschwunden sind, wenn sie weiter fortgesetzt werden, entweder positiv oder negativ oder imaginär werden; von diesem Phänomenen liefert die im vorhergehenden Buch behandelte Lehre über gekrümmte Linien sehr viele Beispiele.

§100 Auf dieselbe Weise tauchen in Reihen oft unendliche Terme auf; so wird in der harmonischen Reihe, deren allgemeiner Term $\frac{1}{x}$ ist, dem Index $x = 0$ der unendlichen große Term $\frac{1}{0}$ entsprechen und die ganze Reihe wird sich so verhalten

$$\text{etc } -\frac{1}{4}, \ -\frac{1}{3}, \ -\frac{1}{2}, \ -\frac{1}{1}, \ +\frac{1}{0}, \ +\frac{1}{1}, \ +\frac{1}{2}, \ +\frac{1}{3}, \ +\frac{1}{4}, \text{ etc.}$$

Beim Fortschreiten von rechts nach links wachsen also die Terme, so dass $\frac{1}{0}$ schon unendlich groß ist; wenn sie diesen durchlaufen haben werden, werden sie negative abnehmende werden. Daher kann jene unendlich große Größe als Grenze angesehen werden, nach Passieren von welcher die positiven Zahlen negativ werden und umgekehrt; daher meinten viele, dass negative Zahlen als größere als das Unendliche betrachtet werden können, deshalb weil in dieser Reihe die ununterbrochen wachsenden Terme, nachdem sie das Unendliche erreicht haben, in negative übergehen. Aber in der Tat, wenn wir unsere Aufmerksamkeit auf die Reihe, deren allgemeiner Term $\frac{1}{xx}$ ist, richten, gehen nach dem Durchgang durch das Unendliche wiederum positive Terme hervor, ist es natürlich

$$\text{etc } +\frac{1}{9}, \ +\frac{1}{4}, \ +\frac{1}{1}, \ +\frac{1}{0}, \ +\frac{1}{1}, \ +\frac{1}{4}, \ +\frac{1}{9}, \text{ etc,}$$

welche dennoch niemand größer als unendlich bezeichnet hat.

§101 Oftmals legt in Reihen der unendlich Term auch eine die reellen von den imaginären Termen absondernde Grenze fest, wie es in dieser Reihe geschieht, deren allgemeiner Term $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ist,

$$\text{etc } +\frac{1}{\sqrt{-3}}, \ +\frac{1}{\sqrt{-2}}, \ +\frac{1}{\sqrt{-1}}, \ +\frac{1}{0}, \ +\frac{1}{\sqrt{1}}, \ +\frac{1}{\sqrt{2}}, \ +\frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ etc,}$$

und dennoch folgt daher nicht, dass das imaginäre größer als das Unendliche ist, weil ja aus der zuvor angeführten Reihe

$$\text{etc } +\sqrt{-3}, \ +\sqrt{-2}, \ +\sqrt{-1}, \ +0, \ +\sqrt{1}, \ +\sqrt{2}, \ +\sqrt{3}, \text{ etc}$$

gleichermaßen folgen würde, dass das Imaginäre kleiner als Null ist. Des Weiteren kann in der Tat sogar der Übergang von reellen zu imaginären Größen dargeboten werden, deren Grenze weder 0 noch ∞ ist, wie es geschieht, wenn der allgemeine Term $1 + \sqrt{x}$ war. In diesen Fällen, weil wegen der

Irrationalität jeder beliebige Term zwei Werte hat, werden an der Grenze zwischen dem Reellen und dem Imaginären immer je zwei einander gleich. Aber sooft Terme, die zuvor positiv waren, in negative übergehen, geschieht der Übergang immer durch ein entweder unendlich kleine oder unendlich große Grenze, all welche Dinge sich aus dem Kontinuitätsgesetz, welches wir bei gekrümmten Linien entdeckt haben, deutlicher zeigen.

§102 Auch aus der Summation von ins Unendliche laufenden Reihen können hier viele Dinge angeführt werden, die sowohl dazu, um diese Lehre des Unendlichen mehr zu beleuchten, als auch in der Tat, um die vielen Zweifel, die bei dieser Aufgabe aufzukommen pflegen, zu beseitigen, dienen. Und zuerst besteht freilich, wenn die Reihe aus gleichen Termen besteht wie

$$1+1+1+1+1+1+\text{etc}$$

und sie ohne Ende, das heißt ins Unendliche, fortgesetzt wird, kein Zweifel, dass die Summe als dieser Terme größer als jede angebbare Zahl sein wird; und deshalb ist sie notwendigerweise unendlich. Und dies bestätigt auch ihr Ursprung, während sie aus der Entwicklung dieses Bruches entspringt

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\text{etc},$$

indem $x=1$ gesetzt wird; es wird also gelten

$$\frac{1}{1-1}=1+1+1+1+\text{etc}$$

und daher wird die Summe sein

$$=\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}=\text{Unendliche.}$$

§103 Obgleich aber hier kein Zweifel entstehen kann, weil dieselbe Zahl unendlich oft genommen ins Unendliche übergehen muss, scheint dennoch der Ursprung aus der allgemeinen Reihe selbst

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\text{etc}$$

die schwerwiegendsten Unannehmlichkeiten zu bedeuten; wenn nämlich für x nacheinander die Zahlen 1, 2, 3, 4, etc eingesetzt werden, werden die folgenden Reihen mit ihren Summen hervorgehen

$$\begin{aligned}
&A \ldots 1+1+1 \quad +1 \quad +1 \quad\;\; +\text{etc} = \frac{1}{1-1} = \text{Unendlich}\\
&B \ldots 1+2+4 \quad +8 \quad +16 \;\; +\text{etc} = \frac{1}{1-2} = -1\\
&C \ldots 1+3+9 \quad +27+81 \;\; +\text{etc} = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}\\
&D \ldots 1+4+16+64+256+\text{etc} = \frac{1}{1-4} = -\frac{1}{3}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc}
\end{aligned}$$

Weil also die Reihe B nur, bis auf den ersten, größere einzelne Terme hat als die Reihe A, müsste die Summe der Reihe B notwendigerweise um Vieles größer sein als die Summe der Reihe A; dennoch zeigt indes diese Rechnung, dass die Summe der Reihe A unendlich ist, die Summe der Reihe B hingegen negativ, das heißt kleiner als Null, was sich nicht vorgestellt werden kann. Um vieles weniger kann mit den üblichen Ideen in Einklang gebracht werden, wie diese Summen von dieser und folgenden Reihen C, D etc negativ werden, obwohl dennoch alle Terme positiv sind.

§104 Dieses Grundes wegen scheint die oben angeführte Meinung vielen wahrscheinlich, natürlich, dass negative Größen irgendwann größer als das Unendliche oder mehr als unendliche Zahlen betrachtet werden können; und weil auch, indem die Zahlen über die Null hinaus vermindert werden, zu negativen Zahlen gelangt wird, legen sie einen Unterschied zwischen negativen Zahlen von dieser Art -1, -2, -3, etc von dieser Art $\frac{+1}{-1}$, $\frac{+2}{-1}$, $\frac{+3}{-1}$, etc fest, indem sie sagen, dass jene kleiner als Null, diese hingegen größer als Unendlich sind. Obgleich sie auf diese Weise die Schwierigkeit nicht beseitigen, welche diese Reihe entstehen lässt

$$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\text{etc} = \frac{1}{(1-x)^2}\,,$$

woher die folgenden Reihen entspringen

$$\begin{aligned}
&A \ldots 1+2+3 \quad +4 \quad +5 \quad +\text{etc} = \frac{1}{(1-1)^2} = \frac{1}{0} = \text{Unendlich}\\
&B \ldots 1+4+12+32+80+\text{etc} = \frac{1}{(1-2)^2} = 1;
\end{aligned}$$

weil dort die einzelnen Terme der Reihe B größer sind als die einzelnen Terme der Reihe sind, allein die jeweils ersten ausgenommen, so kann, wie die Summe der Reihe A unendlich ist, die Summe der Reihe B hingegen 1 ist, das heißt allein dem ersten Term gleich, aus jenem Prinzip überhaupt nicht erklärt werden.

§105 Weil ja aber, wenn wir verneinen wollen, dass $-1 = \frac{+1}{-1}$ und $\frac{+a}{-b} = \frac{-a}{+b}$ ist, die festesten Fundamente der Analysis zusammenbrächen, kann jene zuvor erwähnte Erklärung in keinster Weise zugelassen werden. Ja wir werden sogar verneinen müssen, dass jene Summen, welche die allgemeinen Formeln an die Hand gegeben haben, wahr sind. Weil nämlich diese Reihe aus ununterbrochener Division entspringen, während der Rest ununterbrochen weiter geteilt wird, der Rest aber immer größer wird, je weiter wir fortschreiten, werden wir ihn niemals missachten können; und keineswegs kann der letzte Rest, das heißt welcher bei der infinitesimalen Division zurückbleibt, weggelassen werden, welcher natürlich unendlich groß wird. Weil dies aber in den oberen Reihen nicht beachtet wird, während kein Rest berücksichtigt wird, ist es nicht verwunderlich, dass diese Summationen zu Absurdem führen. Und diese Antwort, wie in aus der Entstehung der Reihen selbst entnommen ist, ist also auch überaus wahr und beseitigt jeden Zweifel.

§106 Damit dies klarer wird, wollen wir die Entwicklung des Bruches $\frac{1}{1-x}$ betrachten, wie sie bei zuerst nur endlich vielen Termen durchgeführt wird. Es wird also sein

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + \frac{x}{1-x} \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + \frac{x^2}{1-x} \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x} \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{1-x} \\ &\text{etc} \end{aligned}$$

Wer also sagen wollte, dass die Summe der endlichen Reihe $1 + x + x^2 + x^3$ $\frac{1}{1-x}$ ist, der würde um die Größe $\frac{x^4}{1-x}$ vom wahren Wert abkommen, und wer die Summe dieser Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{1000}$$

$= \frac{1}{1-x}$ setzten wollte, der würde sich um die Größe $\frac{x^{1001}}{1-x}$ irren, welcher Fehler, wenn x eine kleinere größere Zahl als die Einheit ist, sehr groß wäre.

§107 Aus diesen Dingen ist es klar, dass der, wer die Summe derselben Reihe ins Unendliche fortgesetzt oder die Summe von dieser

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{\infty}$$

$= \frac{1}{1-x}$ setzen will, von der Wahrheit um die Größe $\frac{x^{\infty+1}}{1-x}$ abweichen wird, die, wenn $x < 1$ ist, natürlich unendlich groß sein wird. Zugleich tritt aber daher der Grund klar zutage, warum die Summe der ins Unendliche fortgesetzten Reihe $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{etc}$ in Wirklichkeit $= \frac{1}{1-x}$ ist, wenn x ein kleinerer Bruch als die Einheit war; dann wird nämlich der Bruch $\frac{x^{\infty+1}}{1-x}$ unendlich klein und daher keiner, der deshalb sicher vernachläsigt werden kann. So wird für $x = \frac{1}{2}$ gesetzt in der Tat gelten

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \text{etc} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

und gleichermasßen wird die wahre Summe der übrigen Reihen, wenn x ein Bruch kleiner als die Einheit ist, auf diese Weise angezeigt.

§108 Dieselbe Antwort ist für die Summen von diesen divergenten Reihen anwendbar, in denen die Vorzeichen $+$ und $-$ alternieren, die für gewöhnlich aus derselben Form dargeboten zu werden pflegen, indem für x negative Zahlen eingesetzt werden. Weil nämlich gilt

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \text{etc},$$

wenn der letzte Rest nicht berücksichtigt werden würde, wäre

$$\begin{aligned}
A \ldots 1 - 1 + 1 - 1 \;\; + 1 \;\; - 1 \quad + \text{etc} &= \frac{1}{2} \\
B \ldots 1 - 2 + 4 - 8 \;\; + 16 - 32 \;\; + \text{etc} &= \frac{1}{3} \\
C \ldots 1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 + \text{etc} &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

etc

Es tritt aber klar zutage, dass die Summe der zweiten Reihe B daher nicht $= 1$ sein kann, weil umso mehr Terme tatsächlich summiert werden, die Aggregate umso mehr von $\frac{1}{3}$ abweichen. Die Summe einer jeden Reihe muss aber immer einen Grenzwert haben, zu welchem sie umso näher gelangt, umso mehr Terme tatsächlich addiert werden.

§109 Aus diesen Dingen haben einige gefolgert, dass Reihen dieser Art, die divergente genannt werden, keine festen Summen haben, deshalb weil beim tatsächlichen Sammeln der Terme keine Annäherung an eine Grenze stattfindet, welche man für die Summe der ins Unendliche fortgesetzten Reihe halten könnte; diese Äußerung, weil diese Reihen schon wegen des vernachlässigten Restes als fehlerhaft aufgezeigt worden sind, ist vollkommen mit der Wahrheit verträglich. Dennoch kann indes dagegen mit dem jedem Recht eingewandt werden, dass diese erwähnten Summen, wie sehr sie auch von der Wahrheit abzuweichen scheinen, dennoch niemals zu Fehlern führen, ja sogar dass, nachdem sie zugelassen worden sind, sehr viele wunderschöne Dinge herausgefunden worden sind, die wir, wenn wir diese Summen völlig verwerfen wollten, nicht mehr hätten. Und in der Tat könnten diese Summen, wenn sie falsch sind, uns nicht immer wieder zur Wahrheit führen, ja sie müssten uns sogar, weil sie nicht wenig, sondern unendlich von der Wahrheit abweichen, auch bis ins Unendliche von der Wahrheit abweichen. Weil dies aber dennoch nicht passiert, bleibt für uns ein sehr schwer zu lösender Knoten zurück.

§110 Ich sage daher, dass im Wort Summe die ganze Schwierigkeit verborgen ist, wenn nämlich die Summe einer Reihe, wie es für gewöhnlich getan wird, für das Aggregat all ihrer tatsächlich gesammelten Terme genommen wird, dann besteht kein Zweifel, dass nur die Summen von ins Unendliche laufenden Reihen dargeboten werden können, die konvergent sind und immer näher zu einem gewissen und festen Wert führen, umso mehr Terme tatsächlich gesammelt werden. Aber divergente Reihen, deren Terme nicht abnehmen, ob die Vorzeichen $+$ und $-$ alternieren oder nicht, werden überhaupt keine festen Summen haben, wenn die Bezeichnung der Summe in diesem Sinn für das Aggregat aller Terme aufgefasst wird. Aber in der Tat geschieht es in den Fällen, die wir erwähnt haben, in denen aus fehlerhaften Summen von dieser Art dennoch die Wahrheit gefunden wird, nicht, weil der endliche Ausdruck, eines Beispiels wegen $\frac{1}{1-x}$, die Summe der Reihe $1 + x + x + x^3 +$ etc ist, sondern weil der Ausdruck entwickelt diese Reihe liefert; und so kann bei dieser Aufgabe der Name der Summe vollkommen weggelassen werden.

§111 Diese Unannehmlichkeit und diese scheinbaren Widersprüche werden wir also völlig vermeiden, wenn wir dem Wort Summe eine andere Bedeutung, als es für gewöhnlich zu geschehen pflegt, zuteilen. Wir wollen also sagen, dass die Summe einer jeden unendlichen Reihe der endliche Ausdruck ist, aus dessen Entwicklung jene Reihe entsprießt. Und in diesem Sinne wird die Summe der unendlichen Reihe $1 + x + x + x^3 +$ etc tatsächlich $= \frac{1}{1-x}$ sein, weil jene Reihe aus der Entwicklung dieses Bruches entspringt, welche Zahl auch immer anstelle von x eingesetzt wird. Auf diese Weise, wenn die Reihe konvergent war, wird diese neue Definition des Wortes Summe mit der üblichen übereinstimmen, und weil divergente keine eigens so genannten Summen haben, wird daraus keine Unannehmlichkeit aus dieser neuen Benennung entstehen. Schließlich werden wir mit Hilfe dieser Definition den Gebrauch von divergenten Reihen schützen und von allen Unrechten lösen können.