Kapitel IV
Über die Natur von Differentialen jeglicher Ordnung *

Leonhard Euler

§112 Im ersten Kapitel haben wir gesehen, wenn die variable Größe x eine Vermehrung $= \omega$ erhält, dass dann die daher herstammende Vermehrung einer jeden Funktion von x mit einer solchen Form $P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + \text{etc}$ ausgedrückt wird, ob dieser Ausdruck endlich ist oder ins Unendliche läuft. Also wird die Funktion y, wenn in ihr anstelle von x $x + \omega$ geschrieben wird, den folgenden Wert annehmen

$$y^I = y + P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \text{etc};$$

wenn von diesem der erste Wert y subtrahiert wird, wird die Differenz der Funktion y zurückbleiben, die so ausgedrückt werden wird

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \text{etc},$$

und weil der folgende Wert von x $x^I = x + \omega$ ist, wird die Differenz von x, natürlich Δx, $= \omega$ sein. Die Buchstaben P, Q, R, etc bezeichnen aber von y abhängende Funktion von x, welche wir im ersten Kapitel zu finden gelehrt haben.

---

*Originaltitel: "Caput IV. De differentialium cuiusque ordinis natura", erstmals publiziert im Jahre 1755", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 10, pp 83-98", Eneström-Nummer E212, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

§113 Daher wird also, um welchen Zuwachs ω auch immer die variable Größe x vermehrt wird, zugleich die Vermehrung bestimmt werden können, welche der Funktion y von x hinzukommt, solange wir für jeden Wert von y die Funktionen P, Q, R, S, etc bestimmen können. In diesem Kapitel aber und in der ganzen Analysis des Unendlichen werden wir jene Vermehrung ω, um welche wir die variable Größe x zu wachsen angenommen haben, unendlich klein und daher verschwindend oder $= 0$ festlegen. Daher ist es offenbar, dass der Zuwachs oder die Differenz der Funktion y auch unendlich klein sein wird. Weil aber in dieser Annahme die einzelnen Terme des Ausdrucks

$$P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \text{etc}$$

in Bezug auf die vorausgehenden verschwinden (§88 und ff.), wird uns allein der erste $P\omega$ zurückbleiben und es wird deshalb in diesem Fall, in dem ω unendlich klein ist, die Differenz von y, natürlich Δy, $= P\omega$ sein.

§114 Es wird also die Analysis des Unendlichen, die wir hier zu behandeln begonnen haben, nichts anderes sein als ein spezieller Fall der im ersten Kapitel dargestellten Methode der Differenzen, der entspringt, während die Differenzen, die zuvor endlich angenommen worden waren, unendlich klein festgelegt werden. Damit also dieser Fall, in welchem die ganze Analysis des Unendlichen enthalten ist, von der Methode der Differenzen getrennt wird, wird es passend sein, sowohl eigene Benennungen als auch eigene Zeichen, um diese unendlich kleinen Differenzen zu bezeichnen, zu gebrauchen. Die unendlich kleinen Differenzen werden wir also hier mit Leibniz Differentiale nennen; und nachdem wir im ersten Kapitel verschiedene Ordnungen von Differenzen festgelegt haben, wird aus ihnen nun leicht auch eingesehen werden, was die ersten, zweiten, dritten, etc Differentiale einer jeden Funktion bedeuten. Anstelle des Charakters Δ, mit welchem wir zuvor die Differenzen angezeigt hatten, werden wir aber nun den Charakter d gebrauchen, so dass dy das erste Differential von y bedeutet, ddy das zweite, d^3y das dritte und so weiter.

§115 Weil wir ja unendlich kleine Differenzen, die wir hier behandeln, Differentiale nennen, pflegt daher das ganze Kalkül, mit welchem Differentiale ausfindig gemacht werden und zum Nutzen verwendet werden, Differentialkalkül genannt zu werden. Die englischen Mathematiker, unter welchen zuerst Newton genauso wie Leibniz unter den germanischen, diesen neuen Teil der

Analysis auszuarbeiten begonnen haben, haben so andere Namen wie andere Zeichen gebraucht. Denn die unendlich kleinen Differenzen, welche wir Differentiale nennen, pflegen sie hauptsächlich Fluxionen zu nennen, manchmal auch Inkrement; wie diese Namen mehr der lateinischen Sprache zukommen, so drücken sie auch die Sachen aus, welche sie bezeichnen, hinreichend vorteilhaft aus. Denn eine beim Wachsen die einen und die anderen Werte erhaltende variable Größe kann als fließend betrachtet werden und daher ist das Wort Fluxion, welches zuerst von Newton für die Geschwindigkeit des Wachsens verwendet wurde, um einen unendlich kleinen Zuwachs, welchen die Größe quasi beim Fließen erhält, zu bezeichnen, analog übertragen worden.

§116 Obwohl es aber nicht passend wäre, über den Gebrauch von Namen mit den Engländern zu verhandeln und wir objektiv betrachtet, wenn ein Richter die Reinheit der lateinischen Sprache und den Vorteil der Ausdrücke beurteilt, leicht überstimmt werden würden, so besteht dennoch kein Zweifel, dass wir die Engländer in Hinblick auf Bezeichungsweise übertrumpfen. Denn Differentiale, die selbige Fluxionen nennen, pflegen sie mit Punkten, die über die Buchstaben geschrieben werden, zu bezeichnen, so dass $\dot{y}$ für sie die erste Fluxion von y bedeutet, $\ddot{y}$ die zweite Fluxion, $\dddot{y}$ die dritte Fluxion und so weiter. Diese Bezeichnungsweise, wie vom Belieben abhängend, auch wenn sie nicht missbilligt werden kann, wenn die Anzahl der Punkte klein war, dass sie durch Zählen leicht erkannt werden kann, bringt dennoch, wenn mehrere Punkte hinzugeschrieben werden müssen, größte Unordnung und sehr viele Unannehmlichkeiten mit sich. Denn das zehnte Differential oder die zehnte Fluxion wird äußerst unvorteilhaft auf diese Weise $\overset{\vdots\vdots}{y}$ dargestellt, während sie mit unserer Bezeichnungsweise $d^{10}y$ sehr leicht erfasst wird. Es entspringen aber Fälle, in denen noch um Vieles höhere Ordnungen von Differentialen und sogar unbestimmte ausgedrückt werden müssen, für welche die englische Art völlig ungeeignet ist.

§117 Wir werden also so unsere Namen wie unsere Zeichen gebrauchen, von welchen jene in unseren Regionen schon gebräuchlich und den meisten vertraut, diese hingegen vorteilhafter sind. Dennoch war es indes nicht unpassend, die Bezeichnungen und Bedeutungen der Anglen hier zu erwähnen, damit diejenigen, die deren Bücher lesen, sie auch verstehen können. Denn auch die Anglen bestehen auf ihre Art nicht so hartnäckig, dass sie, was in unserer Art geschrieben ist, völlig meiden und für lesensunwürdig halten.

Wir haben freilich die größten Werke selbiger mit Bewunderung durchgelesen und aus ihnen den größten Ertrag erhalten; oftmals haben wir in der Tat sogar beobachtet, dass selbige die Schriften der Unseren nicht ohne Nutzen gelesen haben. Deswegen, auch wenn überall die gleiche und dieselbe Art und Weise, die eigenen Gedanken auszudrücken, im höchsten Maße wünschenswert wäre, ist es dennoch nicht sehr schwer, dass wir uns an jede der beiden gewöhnen, im Vergleich dazu wie viel das Verständnis der auf fremde Weise geschriebenen Bücher verlangt.

§118 Weil also der Buchstabe ω für uns bisher die Differenz oder den Zuwachs bezeichnet hat, um welchen die variable Größe x zu wachsen aufgefasst wird, nun aber ω unendlich klein festgelegt wird, wird ω das Differential von x sein und deswegen wird in der gebräuchlichen Bezeichnungsweise $\omega = dx$ sein; und dx wird daher eine unendlich kleine Differenz sein, um welche selbst x zu wachsen aufgefasst wird. Auf die gleiche Weise wird das Differential von y so ausgedrückt werden dy; und wenn y irgendeine Funktion von x war, wird das Differential dy den Zuwachs bezeichnen, welchen die Funktion y erhält, während x in $x + dx$ übergeht. Daher, wenn in der Funktion y überall anstelle von x $x + dx$ eingesetzt wird und die resultierende Größe $= y^I$ gesetzt wird, wird $dy = y^I - y$ sein und auf diese Weise wird das Differential einer jeden Funktion aufgefunden werden; dies ist freilich über das erste Differential oder das erster Ordnung zu verstehen; über die übrigen werden wir es später sehen.

§119 Es ist also sittsam festzuhalten, dass der Buchstabe d hier keine Größe bezeichnet, sondern nur anstelle eines Zeichens verwendet wird, um das Wort Differential auszudrücken, und zwar auf dieselbe Weise, auf die in der Lehre der Logarithmen der Buchstabe l (heute log oder ln) für das Zeichen des Logarithmus und in der Algebra den Charakter $\surd$ für das Zeichen einer Wurzel zu gebrauchen pflegen. Daher bedeutet dy nicht, wie es in der Analysis für gewöhnlich üblich ist, das Produkt aus der Größe d mit der Größe y, sondern muss so ausgesprochen werden, dass Differential von y zu sein gesagt wird. Auf die gleiche Weise, wenn d^2y geschrieben wird, bedeutet die zwei weder den Exponenten noch bedeutet d^2 die Potenz von d, sondern wird nur verwendet, um den Wortausdruck zweites Differential kurz und passend auszudrücken. Weil also der Buchstabe d im Differential keine Größe, sondern nur ein Zeichen darbietet, kann, um Verwirrung in Rechnungen zu vermeiden, wo mehrere konstante Größen auftauchen, der Buchstabe d für die Bezeichnung nicht benutzt werden, genauso wie wir den Buchstaben l als konstante Größe in die Rechnung einzuführen zu vermeiden pflegen, wo zugleich Logarithmen auftauchen. Es wäre aber zu wünschen, dass diese Buchstaben d und l durch ein klein wenig abgeänderte Charaktere ausgedrückt werden würden, damit sie nicht mit den Buchstaben des Alphabets, mit denen Größen bezeichnet zu werden pflegen, vermischt werden; natürlich auf die gleiche Weise, auf die anstelle des Buchstabens r, mit welchem zuerst das Wort Wurzel angezeigt wurde, nun dieser entartete Charakter $\sqrt{}$ gerbräuchlich ist.

§120 Weil wir ja also gesehen haben, dass das Differential von y, wenn y irgendeine Funktion von x war, eine Form von dieser Art haben wird $P\omega$, wird wegen $\omega = dx$ $dy = Pdx$ sein. Was für eine Funktion auch immer nämlich y von x war, ihr Differential dy wird mit einer gewissen Funktion von x ausgedrückt werden, für die wir hier P setzen, die mit dem Differential von x, natürlich mit dx, multipliziert worden ist. Auch wenn also in Wirklichkeit die Differentiale von x und y unendlich klein und daher Null gleich sind, werden sie dennoch ein endliches Verhältnis zueinander haben; es wird natürlich $dy = dx = P : 1$ sein. Nachdem also diese Funktion P gefunden worden ist, wird das Verhältnis zwischen dem Differential dx und dem Differential dy bekannt. Obwohl also das Differentialkalkül im Finden der Differentiale besteht, werden darin nicht so sehr die Differentiale selbst, die gleich Null sind und deshalb ohne Mühe gefunden werden würden, wie deren gegenseitiges geometrisches Verhältnis untersucht.

§121 Differentiale werden also um Vieles leichter gefunden als endliche Differenzen. Für die endliche Differenz Δy, um welche die Funktion y wächst, während die variable Größe x den Zuwachs ω erhält, reicht es nicht aus, die Funktion P zu kennen, sondern es müssen darüber hinaus die Funktionen Q, R, S etc ausfindig gemacht werden, welche in die endliche Differenz, die wir wie folgt festgelegt haben

$$= P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + \text{etc},$$

eingehen; um aber das Differential von y zu finden, ist es genug, wenn wir allein die Funktion P kennen. Deswegen wird aus den bekannten endlichen Differenzen einer jeden Funktion von x sehr leicht ihr Differential bestimmt; aber dagegen kann aus dem Differential der Funktion noch nicht seine endliche Differenz herausgefunden werden. Dennoch wird indes unten [§49 des zweiten Teils] gelehrt werden, wie aus den bekannten Differentialen aller Ordnungen zugleich jegliche endliche Differenz einer jeden vorgelegten Funktion gefunden werden kann. Im Übrigen ist es aus diesen Dingen offenbar, dass das erste Differential $dy = Pdx$ den ersten Term der endlichen Differenz liefert, der natürlich $= P\omega$ ist.

§122 Wenn also der Zuwachs ω, welchen die variable Größex zu erhalten aufgefasst wird, winzig klein war, so dass im Ausdruck $P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + \text{etc}$ die Terme $Q\omega^2$ und $R\omega^3$ und um Vieles mehr die übrigen Terme so klein werden, dass sie in der Rechnung, in welcher die höchste Strenge nicht bewahrt wird, in Bezug auf den ersten $P\omega$ vernachlässigt werden können, dann wird nach Erkennen des Differentials aus ihm die endliche Differenz in der Tat näherungsweise erkannt werden, die natürlich $= P\omega$ sein wird; daher wird bei den vielen Begebenheiten, in denen dieses Kalkül für die Praxis verwendet wird, nicht wenig an Ertrag geerntet. Und daher glauben einige, dass Differentiale als sehr kleine Zuwächse betrachtet werden können und sagen, dass sie in Wirklichkeit nicht gleich Null sind und setzen sie nur unbestimmt klein fest. Und diese Idee lieferte anderen die Gelegenheit, die Analysis des Unendlichen anzuklagen, dass sie nicht die wahren Größen von Sachen findet, sondern in Wirklichkeit nur sehr nahe; dieser Einwand behielte immer eine gewisse Gültigkeit, wenn wir nicht das unendlich Kleine vollkommen Null gleich festlegen würden.

§123 Die, die aber nicht wollen, dass das unendlich Kleine in Null übergeht, womit sie den Einwandes zu entkräftigen scheinen, vergleichen Differentiale mit kleinsten Staubkörnchen im Verhältnis zu ganzen Erde, deren wahre Größe niemand angegeben zu haben angesehen werden würde, der um ein einziges Staubkörnchen von der Wahrheit abweicht. Sie wollen also, dass ein solches Verhältnis zwischen endlichen Größen unendlich klein ist, wie es zwischen der ganzen Erde und einem sehr kleinen Staubkörnchen der Fall ist; und wenn jemandem dieser Unterschied noch nicht groß genug scheint, vermehren sie dieses Verhältnis tausend fach und mehr, dass die Kleine überhaupt nicht weiter erfasst werden kann. Dennoch sind sie indes gezwungen anzuerkennen, dass die höchste geometrische Strenge ein wenig untergraben wird; daher, damit sie diesem Einwand entgegnen, flüchten sie sich zu Beispielen solcher Art, deren Lösungen so durch die Geometrie wie durch die Analysis des

Unendlichen gefunden werden können, und aus deren Übereinstimmung sie die Güte der zweiten Methode schließen. Obwohl aber dieses Argument die Aufgabe nicht erledigt, weil oftmals durch fehlerhafte Methoden das Wahre gefunden werden kann, tut es dennoch, weil es nicht diesen Mangel hat, besser dar, dass die Größen, die in der Rechnung vernachlässigt worden sind, nicht nur nicht unerfassbar klein, sondern gänzlich keine sind, wie wir annehmen. Daher verletzen wir die geometrische Strenge in überhaupt keiner Weise.

§124 Wir wollen dazu fortschreiten, die Natur von Differentialen zweiter Ordnung zu erklären, die aus den im ersten Kapitel dargelegten zweiten Differenzen entspringen, indem die Größe ω unendlich klein $= dx$ festgelegt wird. Weil also, wenn wir die Variable x um gleiche Inkremente zu wachsen festlegen, so dass, wenn der zweite Wert $x^{II} = x + dx$ war, die folgenden $x^{I} = x + 2dx$, $x^{III} = x + 3dx$, etc sein werden, wegen der konstanten ersten Differenzen $= dx$ die zweiten verschwinden, wird daher auch das zweite Differential, natürlich ddx, $= 0$ sein und dieses Grundes wegen werden auch die weiteren Differentiale $= 0$ sein, natürlich ist $d^3x = 0$, $d^4x = 0$, $d^5x = 0$ etc. Es kann freilich eingewendet werden, dass diese Differentiale, weil sie unendlich klein sind, per se $= 0$ sind und dies der variablen Größe x geschuldet ist, deren Zuwächse gleich aufgefasst werden, dass die Differentiale ddx, d^3x etc nicht nur für sich betrachtet null sind, sondern auch in Bezug auf Potenz von dx, mit welchen die anderen verglichen werden könnten, verschwinden.

§125 Damit diese Dinge besser verstanden werden, ist zu bedenken, dass die zweite Differenz einer jeden Funktion von x, die y sei, in einer Form von dieser Art ausgedrückt werden kann $P\omega^2 + Q\omega^3 + R\omega^4 +$ etc. Wenn daher also ω unendlich klein ist, werden die Terme $Q\omega^3$, $R\omega^4$ etc in Bezug auf den ersten $P\omega^2$ verschwinden, woher für $\omega = dx$ das zweite Differential von y $= Rdx^2$ sein wird, während dx^2 das Quadrat des Differentials bezeichnet. Daher, auch wenn das zweite Differential von y, natürlich ddy, per se $= 0$ ist, wird es dennoch, weil $ddy = Prdx^2$ ist, zu dx^2 ein endliches Verhältnis haben wie P zu 1; wenn aber $y = x$ ist, dann wird $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ etc sein und daher verschwindet in diesem Fall das zweite Differential von x auch in Bezug auf dx^2 und höhere Potenzen von dx. Und auf diese Weise sind die Dinge zu verstehen, die wir zuvor gesagt haben, dass natürlich $ddx = 0$, $d^3x = 0$ etc ist.

§126 Weil die zweiten Differenzen nichts anderes als die Differenzen der ersten Differenzen sind, wird auch das zweite Differential oder, wie es oft genannt zu werden pflegt, das Differenzen-Differential nichts anderes sein als das Differential des ersten Differentials. Weil des Weiteren eine konstante Größe weder Zuwächse noch Abnahmen erhält und keine Differenzen zulässt, die allein variablen Größen zu eigen sind, sagen wir in demselben Sinn, dass alle Differentiale von konstanten Größen von jeder Ordnung $= 0$ sind, das heißt in Bezug auf sogar alle Potenzen von dx verschwinden. Weil also das Differential von dx, das heißt ddx, $= 0$ ist, kann das Differential dx schließlich als konstante Größe betrachtet werden, und sooft das Differential einer gewissen Größe konstant zu sein gesagt wird, sooft ist die Größe zu verstehen, ununterbrochen gleiche Zuwächse zu erfahren. Wir nehmen hier aber x für die Größe, deren Differential konstant ist, und so werden wir die Veränderlichkeit der einzelnen Funktionen von selbigem, welcher deren Differentiale unterworfen sind, einschätzen.

§127 Wir wollen festlegen, dass das erste Differential von $y = pdx$ ist und, um das zweite Differential davon zu finden, muss erneut das Differential von pdx gesucht werden. Weil aber dx konstant ist und nicht verändert wird, auch wenn anstelle von x $x + dx$ geschrieben wird, ist es nur nötig, dass das Differential der endlichen Größe p gesucht wird; es sein also $dp = qdx$, weil wir ja gesehen haben, dass die Differentiale von allen Funktionen von x auf eine Form von dieser Art zurückgeführt werden; und weil, wie wir über die endlichen Differenzen gezeigt haben, das Differential von $np = nqdx$ ist, wenn n eine konstante Größe ist, werde dx anstelle von n gesetzt und das Differential von pdx wird $= qdx^2$ sein. Dieser Sache wegen, wenn $dx = pdx$ und $dp = qdx$ ist, wird das zweite Differential $ddy = qdx^2$ sein und so steht fest, wie wir zuvor angedeutet haben, dass das zweite Differential von y zu dx^2 ein endliches Verhältnis hat.

§128 Im ersten Kapitel haben wir schon angemerkt, dass die zweiten und folgenden Differenzen nur festgelegt werden können, wenn deren aufeinander folgende Werte von x nach einem gewissen Gesetz fortzuschreiten angenommen werden, weil dieses Gesetz beliebig ist, haben wir diesen Werten eine arithmetische Progression als leichteste und zugleich geeignetste zugeteilt. Desselben Grundes wegen wird also über die zweiten Differentiale nichts Sicheres festgelegt werden können, wenn nicht die ersten Differentiale, um die

die variable Größe x ununterbrochen zu wachsen aufgefasst wird, nach einem gegebenen Gesetz fortschreiten; wir legen deshalb die ersten Differentiale von x, natürlich dx, dx^I, dx^{II}, etc, alle einander gleich fest, woher die zweiten Differentiale dann werden

$$ddx = dx^I - dx = 0, \; ddx^I = dx^{II} - dx^I = 0, \text{ etc.}$$

Weil ja also die zweiten und höheren Differentiale von der Ordnung, welche die Differentiale der variablen Größe x zueinander haben, abhängen und diese Ordnung beliebig ist, welche Bedingung die ersten Differentiale nicht betrifft, besteht daher ein riesiger Unterschied zwischen den ersten und den folgenden Differentiale in Hinblick des Findens.

§129 Wenn daher aber die aufeinander folgenden Werte von x x, x^I, x^{II}, x^{III}, x^{IV} etc nicht gemäß einer arithmetischen Progression festgesetzt werden, sondern nach irgendeinem anderen Gesetz fortzuschreiten festgelegt werden, dann werden auch deren erste Differentiale dx, dx^I, dx^{II} etc nicht einander gleich sein und deshalb wird nicht $ddx = 0$ sein. Dieser Sache wegen werden die zweiten Differentiale jeglicher Funktionen von x eine andere Form annehmen; wenn nämlich das erste Differential von einer Funktion y dieser Art $= pdx$ war, reicht es, um ihr zweites Differential zu finden, nicht aus, das Differential von p mit dx multipliziert zu haben, sondern es muss darüber hinaus das Differential von dx, welches ddx ist, berücksichtigt werden. Weil ja nämlich das zweite Differential entspringt, wenn pdx von seinem folgenden Wert, der entspringt, während $x + dx$ anstelle von x und $dx + ddx$ anstelle von dx gesetzt wird, subtrahiert wird, wollen wir festlegen, dass der folgende Wert von $p = p + qdx$ ist und es wird der folgende Wert von pdx dieser sein

$$= (p + qdx)(dx + ddx) = pdx + pddx + qdx^2 + qdxddx;$$

von diesem werde pdx subtrahiert und das zweite Differential wird dieses sein

$$ddy = pddx + qdx^2 + qdxddx = pddx + qdx^2,$$

weil $qdxddx$ in Bezug auf $pddx$ verschwindet.

§130 Obwohl aber das Verhältnis der Gleichheit das einfachste und geeignete ist, welches ununterbrochen den Zuwächsen von x zugeteilt wird, pflegt es dennoch häufig zu geschehen, dass von der variablen Größe x, von welcher y

eine Funktion ist, nicht gleiche Zuwächse angenommen werden, sondern von einer anderen gewissen Größe, von welcher x selbst eine gewisse Funktion ist. Ja es werden sogar oft die ersten Differentiale einer anderen Größe von solcher Art gleich festgelegt, deren Relation zu x nicht einmal bekannt ist. Im ersten Fall werden die zweiten und folgenden Differentiale von x zu jener Größe, die gleichmäßzg zu wachsen festgelegt wird, abhängen und müssen aus ihr auf die gleiche Weise bestimmt werden, auf die wir die zweiten Differentiale von y aus den Differentialen von x zu bestimmen gelehrt haben. Im zweiten Fall werden aber die zweiten und folgenden Differentiale von x als Unbekannte angesehen werden und anstelle derer die Zeichen ddx, d^3x, d^4x etc benutzt werden müssen.

§131 Weil aber, wie in diesen Fällen die einzelnen Differentiationen durchgeführt werden müssen, wie wir unten ausführlicher zeigen werden, wollen wir hier dazu übergehen, die variable Größe x als gleichmäßig wachsend anzunehmen, so dass ihre ersten Differentiale dx, dx^I, dx^{II} etc einander alle gleich und deshalb die zweiten und folgenden Differentiale Null gleich gesetzt werden; diese Bedingung pflegt so ausgesprochen zu werden, dass das Differential von x, natürlich dx, konstant angenommen zu werden gesagt wird. Es sei des Weiteren y irgendeine Funktion von x; weil diese durch x und Konstanten definiert wird, werden auch ihre ersten, zweiten, dritten, vierten etc Differentiale, die mit diesen Zeichen dy, ddy, d^3y, d^4y, etc angezeigt werden, durch x und dx ausgedrückt werden können. Natürlich, wenn in y anstelle von x $x + dx$ geschrieben wird und von diesem Wert der erste subtrahiert wird, wird das erste Differential dx zurückbleiben, wenn in diesem weiter anstelle von x $x + dx$ gesetzt wird, wird dy^I hervorgehen und es wird $ddy = dy^I - dy$ sein; auf die gleiche Weise wird durch Setzen von $x + dx$ anstelle von x aus ddy ddy^I entsprießen und $ddy^I - ddy$ wird d^3y geben und so weiter, in diesen Operationen wird das Differential dx durchgehend als konstante Größe angesehen, die kein Differential erhält.

§132 Aus der Relation, mit welcher die Funktion y durch x bestimmt wird, wird so mit Hilfe der Methode der endlichen Differenzen wie um Vieles bequemer aus den Dingen, die wir später angeben werden, der Wert der Funktion p definiert werden, der mit dx multipliziert das erste Differential dy liefert. Für $dy = pdx$ gesetzt wird also das Differential von pdx das zweite Differential ddy geben; daher, wenn $dp = qdx$ war, wird wegen des konstanten

$dx\, ddy = ydx^2$ entspringen, wie wir schon zuvor gezeigt haben. Indem also weiter fortgeschritten wird, weil das Differential des zweiten Differentials das dritte Differential liefert, wollen wir festlegen, dass $dq = rdx$ ist und es wird $d^3y = rdx^3$ sein; auf die gleiche Weise, wenn von dieser Funktion r das Differential gesucht wird und $dr = sdx$ war, wird man das vierte Differential $d^4y = sdx^4$ und so weiter haben, solange wir das erste Differential einer jeden Funktion zu finden wissen, werden wir das Differential einer jeden Ordnung angeben können.

§133 Um also die Formen dieser einzelnen Differentiale und zugleich die Methode sie zu finden dem Geiste deutlicher darzustellen, scheint es ratsam, sie in der folgenden Tabelle zu erfassen.
Wenn y irgendeine Funktion von x war,

wird gelten	und nach Setzen von
$dy = pdx$	$dp = qdx$
$ddy = qdx^2$	$dq = rdx$
$d^3y = rdx^3$	$dr = sdx$
$d^4y = sdx^4$	$ds = tdx$
$d^5y = tdx^5$	etc

Weil also die Funktion p aus der Funktion y durch Differentiation erkannt wird und auf die gleiche Weise aus p q gefunden wird und daher weiter r und aus diesem weiter s etc, werden die Differentiale einer jeden Ordnung von y leicht aufgefunden werden, solange das Differential dx als konstant angenommen wird.

§134 Weil p, q, r, s, t etc endliche Größen sind, natürlich Funktionen von x, wird das erste Differential von y ein endliches Verhältnis zum ersten Differential von x haben, natürlich wie p zu 1, und dieses Grundes wegen werden die Differentiale dx und dy homogen genannt. Des Weiteren, weil ddy zu dx^2 ein endliches Verhältnis wie q zu 1 hat, werden ddy und dx^2 homogen sein; auf die gleiche Weise werden d^3y und dx^3 homogen sein und ebenso d^4y und dx^4 und so weiter. Daher, wie die ersten Differentiale einander homogen oder solche, die ein endliches Verhältnis haben, sind, werden so die zweiten Differentiale mit den Quadraten der ersten Differentiale, die dritten Differentiale aber mit den Kuben der ersten Differentiale und so weiter homogen sein. Und allgemein wird das Differential von y der Ordnung n, was mit $d^n y$ ausgedrückt wird, homogen mit dx^n sein, das heißt mit der Potenz des Differentials dx, deren Exponent n ist.

§135 Weil also in Bezug auf dx all seine Potenzen verschwinden, deren Exponenten größer als die Einheit sind, werden in Bezug auf dy auch dx^2, dx^3, dx^4 etc verschwinden, und auch die zu Differentiale der höheren Ordnungen ddy, d^3y, d^4y etc, die zu dessen Potenzen ein endliches Verhältnis haben. Auf die gleiche Weise werden in Bezug auf ddy, weil es mit dx^2 homogen ist, alle höheren Potenzen von dx, also dx^3, dx^4 etc, verschwinden; es werden also auch d^3y, d^4y, etc verschwinden. Und in Bezug auf d^3y werden dx^4, d^4y, dx^5, d^5y etc verschwinden. Und daher werden, wenn irgendwelche Differentiale von dieser Art involvierende Ausdrücke vorgelegt waren, sie leicht erkannt werden können, ob sie homogen sind oder nicht. Es werden nämlich nur die Differentiale beachtet werden müssen, nachdem alle endlichen Größen weggelassen worden sind, die natürlich die Homogenität nicht stören; und für Differentiale zweiter und höherer Ordnungen werden die dx homogenen Potenzen geschrieben; wenn diese überall dieselbe Anzahl an Dimensionen liefern, werden die Ausdrücke homogen sein.

§136 So wird es klar zutage treten, dass diese Ausdrücke $Pddy^2$ und $Qdyd^3y$ einander homogen sind. Denn ddy^2 bezeichnet das Quadrat von ddy, und weil ddy homogen mit dx^2 ist, wird ddy^2 homogen mit dx^4 sein. Weil des Weiteren dy mit dx und d^3y mit dx^3 homogen ist, wird das Produkt dyd^3y mit dx^4 homogen sein; daraus folgt, dass die Ausdrücke $Pddy^2$ und Qdd^3y einander homogen sind und daher ein endliches Verhältnis zu einander haben. Auf die gleiche Weise wird erschlossen werden, dass diese Ausdrücke

$$\frac{Pd^3y^2}{dxddy} \quad \text{und} \quad \frac{Qd^5y}{dy^2}$$

homogen sind; nachdem nämlich für dy, ddy, d^3y und d^5y die selbigen homogenen Potenzen von dx, also dx, dx^2, dx^3 und dx^5, eingesetzt worden sind, werden diese Ausdrücke Pdx^3 und Qdx^3 entspringen, die natürlich einander homogen sein werden.

§137 Wenn daher nach der Reduktion die vorgelegten Ausdrücke keine gleichen Potenzen von dx enthalten, dann werden sie nicht homogen sein und deshalb kein endliches Verhältnis zueinander haben. Es wird also der eine entweder unendlich mal größer oder unendlich mal kleiner sein als der andere und daher wird der eine zu Bezug auf den anderen verschwinden. So wird $\frac{Pd^3y}{dx^2}$ zu $\frac{Qddy^2}{dy}$ ein unendlich großes Verhältnis haben; der erste Ausdruck wird nämlich auf Pdx und der andere auf Qdx^3 reduziert, woher dieser in Bezug auf jenen verschwinden wird. Wenn deswegen in einer gewissen Rechnung ein Aggregat von zwei Formeln dieser Art auftaucht

$$\frac{Pd^3y}{dx^2}+\frac{Qddy^2}{dy},$$

wird der zweite Term in Bezug auf den ersten sicher verworfen werden können und allein der erste $\frac{Pd^3y}{dx^2}$ in der Rechnung zurückbehalten werden können; es besteht nämlich ein vollkommenes Verhältnis der Gleichheit zwischen den Ausdrücken

$$\frac{Pd^3y}{dx^2}+\frac{Qddy^2}{dy} \quad \text{und} \quad \frac{Pd^3y}{dx^2},$$

weil der Exponent des Verhältnisses dieser ist

$$=1+\frac{Qdx^2ddy^2}{Pddyd^3y}=1 \quad \text{wegen} \quad \frac{Qdx^2ddy^2}{Pdyd^3y}=0.$$

Und auf diese Weise können Differentialausdrücke zu jeder Zeit wunderbar zusammengezogen werden.

§138 Im Differentialkalkül werden die Vorschriften angegeben, mit deren Hilfe das erste Differential einer jeden vorgelegten Größe gefunden werden kann; und weil ja die zweiten Differentiale aus der Differentiation der ersten, die dritten durch dieselbe Operation aus den zweiten und so weiter die folgenden aus den vorhergehenden aufgefunden werden, enthält das Differentialkalkül, die Methode alle Differentiale einer jeden Ordnung zu finden. Aus dem Wort Differential, mit welchem eine unendlich kleine Differenz bezeichnet wird, werden andere Namen und Bezeichnungen deriviert, die gebräuchlich geworden sind. So hat man das Verb differenzieren, welches das Differential finden bedeutet, und eine Größe wird gesagt differenziert zu werden, wann immer ihr Differential gefunden wird. Differentiation bezeichnet hingegen die Operation, mit welcher Differentiale gefunden werden. Daher wird das Differentialkalkül auch die Methode des Differenzierens genannt, weil sie die Art und Weise, Differentiale zu finden, enthält.

§139 Wie also im Differentialkalkül das Differential einer jeden Größe ausfindig gemacht wird, so wird umgekehrt auch eine Gattung von Kalkül im Finden der Größe festgelegt, dessen Differential vorgelegt wird, die Integralkalkül genannt wird. Wenn nämlich irgendein Differential vorgelegt war, pflegt in Hinblick auf dieses die Größe, deren Differential sie ist, das Integral genannt zu werden. Die Begründung für diese Benennung ist diese, dass, weil das Differential als unendlich kleiner Teil angesehen werden kann, um welchen eine gewisse Größe wächst, jene Größe selbst in Bezug auf diesen Teil als Ganzes oder Vollständiges angesehen werden kann und wird dieses Grundes wegen ihr Integral genannt. So, weil dy das Differential von y ist, wird umgekehrt y das Integral von dy sein, und weil ddy das Differential von dy ist, wird dy das Integral von ddy sein. Und auf die gleiche Weise wird ddy das Integral von d^3y das von d^4y sein und so weiter; daher bietet jede beliebige Differentiation, wenn sie umgekehrt betrachtet wird, ein Beispiel für Integration dar.

§140 Der Ursprung und die Natur der Integrale kann in gleicher Weise wie die der Differentiale aus der im ersten Kapitel dargestellten Lehre der endlichen Differenzen erklärt werden. Nachdem nämlich gezeigt worden war, auf welche Weise die Differenz einer jeder Größe gefunden werden kann, haben wir durch Rückwärtsgehen auch aufgezeigt, wie, wenn eine Differenz vorgelegt war, die Größe gefunden werden kann, deren Differenz jene ist; diese Größe haben wir in Hinblick auf ihre Differenz ihre Summe genannt. Wie also durch Fortschreiten zum unendlich Kleinen die Differenzen in Differentiale übergegangen sind, so erhalten die Summen, wie sie dort genannt worden waren, den Namen Integrale und dieses Grundes wegen pflegen auch Integrale nicht selten Summen genannt zu werden. Die Anglen, die Differentiale Fluxionen nennen, nennen die Integrale fließende Größen und aus deren Redensart ist die fließende Größe einer gegebenen Fluxion zu finden dasselbe, was wir in unserer Art das Integral eines gegebenen Differentials zu finden nennen.

§141 Wie wir Differentiale mit dem Charakter d bezeichnen, so gebrauchen wir, um Integrale anzuzeigen, diesen Buchstaben $\int$, der also Differentialgrößen vorangestellt die Größen bezeichnen wird, deren Differentiale jene sind. So, wenn das Differential von y pdx oder $dy = pdx$ war, wird y das Integral von pdx sein, was auf diese Weise $y = \int pdx$ geschrieben wird, weil $y = \int dy$ ist. Also bezeichnet das Integral von pdx, was durch $\int pdx$ angezeigt wird, die Größe, deren Differential pdx ist. Auf die gleiche Weise, weil $ddy = qdx^2$ ist, während $dp = qdx$ gilt, wird das Integral von ddy, das heißt $dy, = pdx$ sein und wegen $p = \int qdx$ wird $dy = dx \int qdx$ und deshalb $y = \int dx \int qdx$ sein. Wenn weiter $dq = rdx$ ist, wird $q = \int rdx$ und $dp = dx \int rdx$ sein, woher, wenn der Charakter $\int$ erneut vorangestellt wird, wird $p = \int dx \int rdx$ und weiter $dy = dx \int dx \int rdx$ und $y = \int dx \int dx \int rdx$ etc werden.

§142 Weil das Differential dy eine unendlich kleine Größe ist, ihr Integral y aber eine endliche Größe und in gleicher Weise das zweite Differential ddy unendlich mal kleiner als sein Integral dy ist, ist es offenbar, dass die Differentiale in Bezug auf ihre Integrale verschwinden. Damit diese Beschaffenheit besser begriffen wird, pflegen die unendlich kleinen Größen in Ordnungen unterteilt zu werden und es wird das unendlich Kleine erster Ordnung das genannt, wozu die ersten Differentiale dx, dy gerechnet werden; aber das unendlich Kleine zweiter Ordnung das, was homogen mit dx^2 ist, und auf die gleiche Weise werden die unendlich kleinen Größen, die mit dx^3 homogen sind, als solche dritter Ordnung bezeichnet, zu welchen also alle Differentiale dritter Ordnung gerechnet und so weiter. Wie daher die unendlich kleinen Größen erster Ordnung in Bezug auf endliche Größen verschwinden, so werden die unendlich kleinen Größen zweiter Ordnung in Bezug auf die unendlich kleinen Größen erster Ordnung und allgemein die unendlich kleinen Größen einer jeden höheren Ordnung in Bezug auf die unendlich kleinen Größen einer geringeren Ordnung verschwinden.

§143 Nachdem also diese Ordnungen des unendlich Kleinen festgelegt worden sind, ist, wie das Differential einer endlichen Größe eine unendlich kleine Größe erster Ordnung ist und das Differential einer unendlich kleinen Größe erster Ordnung eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung ist und so weiter, es so umgekehrt offenbar, dass das Integral einer unendlich kleinen Größe erster Ordnung eine endliche Größe ist, aber das Integral einer unendlich kleinen Größe zweiter Ordnung eine unendlich kleine Größe erster Ordnung ist und so weiter. Wenn daher das vorgelegte Differential eine unendlich kleine Größe der Ordnung n war, wird ihr Integral eine unendlich kleine Größe der Ordnung $n-1$ sein; und daher wie beim Differenzieren die Ordnung der unendlich kleinen Größen vermehrt wird, so schreiten wir bei der Integration zu geringeren Ordnungen voran, bis wir schließlich zu endlichen Größen selbst gelangen. Wenn wir aber endliche Größen erneut integrieren wollen, dann werden wir gemäß dieses Gesetzes zu unendlich großen Größen gelangen und von der ausgeführten Integration dieser aus zu noch einmal unendlich mal so großen und indem wir so fortschreiten, werden wir die gleichen Ordnungen des Unendlichen erhalten, von denen jede die vorhergehende unendlich mal übersteigt.

§144 Es ist also übrig, dass wir in diesem Kapitel etwas über die gebräuchlichen Zeichen erwähnen, damit der Vieldeutigkeit kein Platz gelassen wird. Und zuerst betrifft freilich das Differentiationszeichen d einzig den unmittelbar folgenden Buchstaben; so bezeichnet dxy nicht das Differential des Produktes xy, sondern das Differential von x mit der Größe y selbst multipliziert. Es pflegt aber, damit weniger Verwirrung entsteht, die Größe y vor das Zeichen d, auf diese Weise ydx, geschrieben zu werden, womit das Produkt aus y mit dx angezeigt wird. Aber dennoch, wenn y eine Größe ist, der entweder das Wurzelzeichen $\surd$ oder der Logarithmus vorangestellt worden ist, pflegt sie dann hinter das Differential gesetzt zu werden; selbstverständlich bedeutet $dx\sqrt{aa-xx}$ das Produkt aus der endlichen Größe $\sqrt{aa-xx}$ mit dem Differential dx und auf die gleiche Weise ist $dx\ln(1+x)$ das Produkt aus dem Logarithmus der Größe $1+x$ mit dx multipliziert. Desselben Grundes wegen drückt $ddy\sqrt{x}$ das Produkt des zweiten Differentials ddy mit der endlichen Größe $\sqrt{x}$ aus.

§145 Und in der Tat betrifft das Zeichen d nicht nur den unmittelbar folgenden Buchstaben allein, sondern bezieht sich nicht einmal auf den Exponenten, wenn er einen hat. So drückt dx^2 nicht das Differential von x^2 aus, sondern das Quadrat des Differentials von x, so dass der Exponent 2 nicht auf x sondern auf dx bezogen werden muss. Es könnte auch $dxdx$ geschrieben werden, wie das Produkt der zwei Differentiale dx und dy auf diese Weise $dxdy$ dargestellt wird; aber die zweite Art dx^2 ist so, wie sie kürzer ist, gebräuchlicher. Zumal wenn höhere Potenzen von dx anzuzeigen wären, wäre es zu lang dx ebenso oft zu wiederholen; so bezeichnet dx^3 den Kubus von dx und bei den Differentialen der höheren Ordnungen wird die gleiche Art beibehalten. Natürlich bezeichnet ddy^4 die vierte Potenz des Differentials von zweiter Ordnung ddy und $d^3y^2\sqrt{x}$ bedeutet, dass das Quadrat des Differenzen Differential dritter Ordnung von y mit $\sqrt{x}$ multipliziert worden ist; wenn aber mit der rationalen Größe x multipliziert werden müsste, wird sie auf diese Weise xd^3y^2 vorangestellt.

§146 Wenn wir aber wollen, dass das Zeichen d mehr als allein den unmittelbar nachfolgenden Buchstaben betrifft, muss das auf eigene Weise angezeigt werden. Wir gebrauchen also in diesem Fall vorzugsweise Klammern, in welchen die Größe eingeschlossen wird, deren Differential angezeigt werden muss; so wie $d(xx+yy)$ das Differential der Größe $xx+yy$ bezeichnet. Aber wenn wir das Differential einer Potenz einer Größe von dieser Art bezeichnen wollen, können wir die Mehrdeutigkeit kaum vermeiden; wenn wir nämlich $d(xx+yy)^2$ schreiben, könnte das Quadrat von $d(xx+yy)$ verstanden werden. Wir werden aber in diesem Fall einen Punkt zur Hilfe nehmen können, so dass $d.(xx+yy)^2$ das Quadrat von $(xx+yy)^2$ bezeichnet, nachdem aber der Punkt weggelassen worden ist, $d(xx+yy)^2$ das Quadrat von $d(xx+yy)$ bezeichnet. Mit dem Punkt kann natürlich vorteilhaft angezeigt werden, dass sich das Zeichen d auf die ganze nach dem Punkt folgenden Größe bezieht, so wird $d.xdy$ das Differential von xdy und $d.^3xdy\sqrt{aa+xx}$ das Differential dritter Ordnung des Ausdruckes $xdy\sqrt{aa+xx}$ ausdrücken, die das Produkt aus den endlichen Größen x und $\sqrt{aa+xx}$ und aus dem Differential dy ist.

§147 Wie aber das Differentiationszeichen d allein die unmittelbar folgende Größe betrifft, wenn nicht mit einem dazwischen gesetzten Punkt sein Gültigkeitigkeitsbereich auf den ganzen folgenden Ausdruck ausgedehnt wird, so umfasst dagegen das Integrationszeichen $\int$ immer den ganzen Ausdruck, welchem es vorangestellt ist. So bezeichnet $\int ydx(aa-xx)^n$ das Integral oder die Größe, deren Differential $ydx(aa-xx)^n$ ist, und dieser Ausdruck $\int xdx \int dx \ln(x)$ bezeichnet die Größe, deren Differential $ydx \int dx \ln(x)$ ist. Wenn wir daher das Produkt von zwei Integralen, natürlich $\int ydx$ und $\int zdx$, ausdrücken wollen, wird das auf diese Weise $\int ydx \int zdx$ unrichtig geschehen; es würde nämlich das Integral der Größe $ydx \int zdx$ verstanden werden. Dieses Grundes wegen pflegt diese Vieldeutigkeit wiederum mit einem Punkt beseitigt zu werden, so dass $\int ydx \cdot \int zdx$ das Produkt der Integrale $\int ydx$ und $\int zdx$ bedeutet.

§148 Die Analysis des Unendlichen besteht also sowohl im Finden von Differentialen als auch von Integralen und dieser Sache wegen wird sie in zwei grundlegende Teile unterteilt, von den der eine Differentialkalkül, der andere Integralkalkül genannt wird. Im ersten werden die Vorschriften angegeben, die Differentiale jeglicher Größen zu finden; im zweiten wird hingegen der Weg gezeigt, die Integrale von vorgelegten Differentialen ausfindig zu machen; in jeder der beiden wird zugleich der sehr große Nutzen, welchen diese Kalküle so für die Analysis selbst wie für die höhere Geometrie verschaffen, aufzeigt. Dieses Grundes wegen hat dieser Teil der Analysis schon so große Zuwächse erhalten, dass er in einem mäßig dicken Buch überhaupt nicht erfasst werden kann. Besonders aber im Integralkalkül werden nach und nach so neue Integrationskunstgriffe wie Hilfsmittel beim Lösen von Problemen verschiedenen Geschlechts entdeckt, dass diese neuen Funde, die ununterbrochen hinzukommen, niemals erschöpft, um Vieles weniger vollständig beschrieben und erklärt werden können. Ich werde mir aber Mühe geben, dass ich, was bis jetzt aufgefunden worden ist, entweder alles in diesen Büchern darlege oder zumindest die Methoden erkläre, woher es leicht abgeleitet werden kann.

§149 Es pflegen für gewöhnlich mehrere Teile der Analysis des Unendlichen aufgezählt zu werden; außer dem Differential- und Integralkalkül wird nämlich überall verstreut das Differenzen-Differential- und Exponentialkalkül gefunden. Im Differenzen-Differenzialkalkül pflegt die Methode angegeben zu werden, Differentiale zweiter und höherer Ordnungen zu finden; weil ich aber ja die Art und Weise, die Differentiale einer jeden Ordnung zu finden, im Differentialkalkül selbst darlegen werde, werden wir uns diese Unterteilung, die eher aus der Bedeutung des Findens als aus der Sache selbst gemacht worden zu sein scheint, ersparen. Was darauf das Exponentialkalkül betrifft, in welchem der hochgeehrte Johann Bernoulli, welchem wir wegen der unzähligen und größten Zuwächse der Analysis des Unendlichen ewigen Dank schulden, die Methode des Differenzierens und Integrierens auf Exponentialgrößen übertragen hat, weil ich jedes der beiden Kalküls so auf algebraische wie transzendente Größen jeden Geschlechts anzuwenden beschlossen habe, wäre es daher überflüssig, einen eigenen Teil festzulegen und auch dem Unterfangen entgegen.

§150 Ich habe also beschlossen, zuerst das Differentialkalkül in diesem Buch zu behandeln und die Art und Weise darzulegen, mit deren Hilfe nicht nur die ersten Differentiale aller variablen Größen, sondern auch die zweiten und die höherer Ordnungen bequem gefunden werden können. Zuerst werde ich also algebraische Größen betrachten, ob sie Funktionen einer einzigen Variable oder von mehreren sind, ob sie explizit gegeben sind oder durch Gleichungen. Darauf werde ich das Finden von Differentialen auch auf nicht algebraische Funktionen anwenden, zu deren Erkenntnis sich freilich ohne die Hilfe des Integralkalküls nicht gelangen lässt; von solcher Art sind Logarithmen und Exponentialgrößen, des Weiteren auch Kreisbogen und umgekehrt die Sinus und Tangenten von Kreisbogen. Schließlich werde ich auch irgendwie aus diesen zusammengesetzte und gemischte Größen zu differenzieren lehren und so wird der erste Teil des Differentialkalküls, natürlich die Methode des Differenzierens, abgehandelt werden.

§151 Der andere Teil ist dem Erklären des Nutzens, welchen die Methode des Differenzierens so für die Analysis wie die höhere Geometrie mit sich bringt, gewidmet. Auf die allgemeine Algebra ergießen sich daher nämlich sehr viele Vorteile, teils um die Wurzeln von Gleichungen zu finden, teils um Reihen zu behandeln und zu summieren, teils um Maxima und Minima zu finden, teils um die Werte von Ausdrücken, die in gewissen Fällen unbestimmt scheinen, zu bestimmen und viele andere. Aber die höhere Geometrie hat aus dem Differentialkalkül die größten Zuwächse erhalten, während mit seiner Hilfe die Tangenten von gekrümmten Linien und deren Krümmung selbst mit wunderbarer Leichtigkeit bestimmt werden und viele andere Probleme über die von gekrümmten Linien entweder reflektieren oder gebrochenen Strahlen aufgelöst werden können. Auch wenn mit diesen Dingen ein sehr umfangreicher Traktat gefüllt werden könnte, werde ich dennoch versuchen, so sehr es sich machen lässt, alles kurz und klar erklären.