

KAPITEL V

ÜBER DIE DIFFERENTIATION VON EINE EINZIGE VARIABLE INVOLVIERENDEN ALGEBRAISCHEN FUNKTIONEN *

Leonhard Euler

§152 Weil das Differential der variablen Größe $x = dx$ ist, wird, indem x zum unmittelbar nächsten Ort noch vorne bewegt wird, $x^I = x + dx$ sein. Daher, wenn y irgendeine Funktion von x war, wenn in ihr anstelle von x $x + dx$ gesetzt wird, wird sie in y^I übergehen und die Differenz $y^I - y$ wird das Differential von y geben. Wenn wir also $y = x^n$ setzen, wird werden

$$y^I = (x + dx)^n = x^n + nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}dx^2 + \text{etc}$$

und es wird daher gelten

$$dy = y^I - y = nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}dx^2 + \text{etc}$$

Aber in diesem Ausdruck verschwindet der zweite Term mit den übrigen folgenden in Bezug auf den ersten und deshalb wird $nx^{n-1}dx$ das Differential von x^n sein oder es wird gelten

$$d.x^n = nx^{n-1}dx.$$

*Originaltitel: "Caput V. De differentiatione functionum algebraicarum unicum variabilem involventium", erstmals publiziert im Jahre 1755", Nachdruck in „Opera Omnia: Series 1, Volume 10, pp 99-120“, Eneström-Nummer E212, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz“

Daher, wenn a eine Zahl oder konstante Größe ist, wird auch $d.ax^n = nax^{n-1}dx$ sein. Das Differential von irgendeiner Potenz von x wird also gefunden, indem sie mit dem Exponenten multipliziert wird durch x geteilt wird und das Übrige mit dx multipliziert wird, welche Regel leicht im Gedächtnis behalten wird.

§153 Nachdem also das erste Differential von x^n bekannt geworden ist, wird aus ihm leicht das zweite Differential gefunden, solange, wie wir hier durchgehend annehmen werden, das Differential dx konstant festgelegt wird. Weil nämlich im Differential $nx^{n-1}dx$ der Faktor ndx konstant ist, muss das Differential des anderen Faktors x^{n-1} genommen werden, welches also $(n-1)x^{n-2}dx$ sein wird. Dieses wird also mit ndx multipliziert das zweite Differential geben, nämlich

$$dd.x^n = n(n-1)x^{n-2}dx^2.$$

Auf die gleiche Weise, wenn das Differential von x^{n-2} , was $= (n-2)x^{n-3}dx$ ist, mit $n(n-1)dx^2$ multipliziert wird, wird das dritte Differential hervorgehen als

$$d.^3x^n = n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3.$$

Weiter wird deshalb das vierte Differential dieses sein

$$d.^4x^n = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}dx^4$$

und das fünfte Differential dieses

$$d.^5x^n = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}dx^5;$$

daher wird zugleich die Form der folgenden Differentiale sehr leicht erschlossen.

§154 Sooft also n eine ganze positive Zahl ist, sooft wird schließlich zu verschwindenden Differentialen gelangt; diese sind natürlich so $= 0$, dass sie in Bezug auf alle Potenzen von dx verschwinden. Von diesen sind aber die einfacheren Fälle hier anzumerken.

$$d.x = dx, \quad dd.x = 0, \quad d.^3x = 0 \text{ etc}$$

$$d.x^2 = 2xdx, \quad dd.x^2 = 2dx^2, \quad d.^3x^2 = 0, \quad d.^4x^2 = 0 \text{ etc}$$

$$\begin{aligned}
d.x^3 &= 3x^2dx, \quad dd.x^3 = 6xdx^2, \quad d.^3x^3 = 6dx^3, \quad d.^4x^3 = 0 \text{ etc} \\
d.x^4 &= 4x^3dx, \quad dd.x^4 = 12x^2dx^2, \quad d.^3x^4 = 24xdx^3, \quad d.^4x^4 = 24dx^4, \quad d.^5x^4 = 0 \text{ etc} \\
d.x^5 &= 5x^4dx, \quad dd.x^5 = 20x^3dx^2, \quad d.^3x^5 = 60x^2dx^3, \quad d.^4x^5 = 120xdx^4, \\
&\quad d.^5x^5 = 120dx^5, \quad d.^6x^5 = \text{ etc}
\end{aligned}$$

Es tritt also klar zutage, wenn n eine ganze positive Zahl war, dass das Differential der Ordnung n der Potenz x^n konstant ist, natürlich $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots ndx^n$, und daher die Differentiale aller höheren Ordnungen $= 0$ sind.

§155 Wenn n eine ganze negative Zahl ist, werden die Differentiale von negativen Potenzen von x von dieser Art $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}$ etc genommen werden können, weil $\frac{1}{x} = x^{-1}, \frac{1}{xx} = x^{-2}$ und allgemein $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$ ist. Wenn also in der vorhergehenden Formel $n = -m$ gesetzt wird, wird das erste Differential von $\frac{1}{x^m} = \frac{-mdx}{x^{m+1}}$ sein, das zweite Differential $= \frac{m(m+1)dx^2}{x^{m+2}}$, das dritte Differential $= \frac{m(m+1)(m+2)dx^3}{x^{m+3}}$ etc, wovon die folgenden einfacheren Fälle es verdienen an dieser Stelle angemerkt zu werden.

$$\begin{aligned}
d.\frac{1}{x} &= \frac{-dx}{x^2}, \quad dd.\frac{1}{x} = \frac{2dx^2}{x^3}, \quad d.^3\frac{1}{x} = \frac{-6dx^3}{x^4} \quad \text{etc} \\
d.\frac{1}{x^2} &= \frac{-2dx}{x^3}, \quad dd.\frac{1}{x^2} = \frac{6dx^2}{x^4}, \quad d.^3\frac{1}{x^2} = \frac{-24dx^3}{x^5} \quad \text{etc} \\
d.\frac{1}{x^3} &= \frac{-3dx}{x^4}, \quad dd.\frac{1}{x^3} = \frac{12dx^2}{x^5}, \quad d.^3\frac{1}{x^3} = \frac{-60dx^3}{x^6} \quad \text{etc} \\
d.\frac{1}{x^4} &= \frac{-4dx}{x^5}, \quad dd.\frac{1}{x^4} = \frac{20dx^2}{x^6}, \quad d.^3\frac{1}{x^4} = \frac{-120dx^3}{x^7} \quad \text{etc} \\
d.\frac{1}{x^5} &= \frac{-5dx}{x^6}, \quad dd.\frac{1}{x^5} = \frac{30dx^2}{x^7}, \quad d.^3\frac{1}{x^5} = \frac{-210dx^3}{x^8} \quad \text{etc} \\
&\quad \text{etc}
\end{aligned}$$

§156 Indem darauf für n gebrochene Zahlen festgelegt werden, werden wir die Differentiale von irrationalen Formeln erhalten. Es sei nämlich $n = \frac{\mu}{\nu}$; es wird das erste Differential der Formel $x^{\frac{\mu}{\nu}}$ oder $\sqrt[\nu]{x^\mu}$ dieses sein

$$= \frac{\mu}{\nu} x^{\frac{\mu-\nu}{\nu}} = \frac{\mu}{\nu} dx \sqrt[\nu]{x^{\mu-\nu}},$$

das zweite

$$= \frac{\mu(\mu - \nu)}{\nu^2} x^{\frac{\mu-2\nu}{\nu}} dx^2 = \frac{\mu(\mu - \nu)}{\nu\nu} dx^2 \sqrt{x^{\mu-2\nu}} \text{ etc}$$

Daher wird sein

$$\begin{aligned} d.\sqrt{x} &= \frac{dx}{2\sqrt{x}}, & dd.\sqrt{x} &= \frac{-dx^2}{4x\sqrt{x}}, & d.^3\sqrt{x} &= \frac{1 \cdot 3dx^3}{8x^2\sqrt{x}} & \text{etc} \\ d.^3\sqrt{x} &= \frac{dx}{3^3\sqrt{x^2}}, & dd.^3\sqrt{x} &= \frac{-2dx^2}{9x^3\sqrt{x^2}}, & d.^3.^3\sqrt{x} &= \frac{2 \cdot 5dx^3}{27x^2.^3\sqrt{x^2}} & \text{etc} \\ d.^4\sqrt{x} &= \frac{dx}{4^4\sqrt{x^4}}, & dd.^4\sqrt{x} &= \frac{-3dx^2}{16x^4\sqrt{x^3}}, & d.^3.^4\sqrt{x} &= \frac{3 \cdot 7dx^3}{64x^2.^4\sqrt{x^3}} & \text{etc} \end{aligned}$$

Wenn diese Ausdrücke ein wenig genauer angeschaut werden, wird man leicht die Fähigkeit erlangen, Differentiale von dieser Art, auch ohne vorherige Reduktion auf die Form einer Potenz, zu finden.

§157 Wenn μ nicht 1 war, sondern eine andere entweder positive oder negative ganze Zahl, werden die Differentiale gleichermaßen leicht bestimmt werden. Weil aber die zweiten Differentiale und die der höheren Ordnungen nach demselben Gesetz wie diese aus den Potenzen selbst deriviert werden, wollen wir einfachere Beispiele nur der ersten Differentiale beifügen.

$$d.x\sqrt{x} = \frac{3}{2}dx\sqrt{x}, \quad d.x^2\sqrt{x} = \frac{5}{2}x dx\sqrt{x}, \quad d.x^3\sqrt{x} = \frac{7}{2}x^2 dx\sqrt{x} \quad \text{etc}$$

$$d.\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{-dx}{2x\sqrt{x}}, \quad d.\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{-3dx}{2xx\sqrt{x}}, \quad d.\frac{1}{xx\sqrt{x}} = \frac{-5}{2x^3\sqrt{x}} \quad \text{etc}$$

$$d.^3\sqrt{x^2} = \frac{2dx}{3.^3\sqrt{x}}, \quad d.x.^3\sqrt{x} = \frac{4}{3}dx.^3\sqrt{x}, \quad d.x.^3\sqrt{x^2} = \frac{5}{3}dx.^3\sqrt{x^2} \quad ,$$

$$d.xx.^3\sqrt{x} = \frac{7}{3}x dx.^3\sqrt{x}, \quad d.xx.^3\sqrt{x^2} = \frac{8}{3}x dx.^3\sqrt{x^2} \quad \text{etc}$$

$$d.\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{-dx}{3x\sqrt[3]{x}}, \quad d.\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-2dx}{3x\sqrt[3]{x^2}}, \quad d.\frac{1}{x\sqrt[3]{x}} = \frac{-4dx}{3x^2\sqrt[3]{x}}$$

$$d.\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-5dx}{3x^2\sqrt[3]{x^2}}, \quad d.\frac{1}{x^2\sqrt[3]{x}} = \frac{-7dx}{3x^3\sqrt[3]{x}} \quad \text{etc}$$

§158 Aus diesen Dingen werden schon die Differentiale von allen ganz rationalen Funktionen gefunden werden können, deshalb weil deren einzelne Terme Potenzen von x sind, welche wir nun zu differenzieren wissen. Weil nämlich eine Größe von dieser Art für $x + dx$ anstelle von x gesetzt in diese übergeht

$$p + dp + q + dq + r + dr + s + ds + \text{etc},$$

wird ihr Differential sein

$$= dp + dq + dr + ds + \text{etc}$$

Daher, wenn wir die Differentiale der einzelnen Größen p, q, r, s angeben können, wird zugleich auch das Differential des Aggregates derer bekannt werden. Und weil das Differential eines Vielfachen von p gleichermaßen ein Vielfaches von dp ist, das heißt $d.ap = adp$, wird das Differential der Größe $ap + bq + cr = adp + bdq + cdr$ sein. Weil schließlich die Differentiale von konstanten Größen Null sind, wird auch das Differential von dieser Größe $ap + bq + cr + f = adp + bdq + cdr$ sein.

§159 Weil also in ganz rationalen Funktionen die einzelnen Terme entweder Konstanten oder Potenzen von x sind, wird die Differentiation gemäß der gegebenen Vorschriften leicht durchgeführt werden. So wird sein

$$\begin{aligned} d(a + x) &= dx, & d(a + bx) &= bdx \\ d(a + xx) &= 2xdx, & d(aa - xx) &= -2xdx \\ d(a + bx + cxx) &= bdx + 2cxdx \\ d(a + bx + cxx + ex^3) &= bdx + 3cxdx + 3ex^2dx \\ d(a + bx + cxx + ex^3 + fx^4) &= bdx + 2cxdx + 3ex^2dx + 4fx^3dx. \end{aligned}$$

Und wenn die Exponenten unbestimmt waren, wird gelten

$$d(1 - x^n) = -nx^{n-1}dx, \quad d(1 + x^m) = mx^{m-1}dx$$

$$d(a + bx^m + cx^n) = mbx^{m-1}dx + ncx^{n-1}dx$$

§160 Weil also ganz rationale Funktionen nach der größten Potenz von x in Grade eingeteilt werden, ist es offenbar, wenn ununterbrochen die Differentiale von Funktionen dieser Art genommen werden, dass sie schließlich konstant werden und danach in Null übergehen, wenn freilich das Differential dx konstant angenommen wird. So ist das erste Differential der Funktion ersten Grades $a + bx$, also bdx , konstant, das zweite mit allen folgenden ist Null. Es sei die Funktion vom zweiten Grad $a + bx + cxx = y$; es wird gelten

$$dy = bdx + 2cxdx, \quad ddy = 2cdx^2, \quad d^3y = 0.$$

Auf die gleiche Weise, wenn eine Funktion dritten Graden $a + bx + cxx + ex^3 = y$ gesetzt wird, wird sein

$$dy = bdx + 2cxdx + 3ex^2dx, \quad ddy = 2cdx^2 + 6exdx^2 \quad \text{und} \quad d^3y = 6edx \quad \text{sowie} \quad d^4y = 0.$$

Daher wird allgemein, wenn eine Funktion von dieser Art vom Grad n war, ihr Differential der Ordnung n konstant und alle folgenden Null sein.

§161 Und die Differentiation wird auch nicht schwieriger, wenn unter den Potenzen von x , die eine Funktion dieser Art bilden, solche auftauchen, deren Exponenten negative oder gebrochene Zahlen sind. So ergibt sich beispielsweise folgendes

I. Wenn $y = a + b\sqrt{x} - \frac{c}{x}$ ist, wird gelten

$$dy = \frac{bdx}{2\sqrt{x}} + \frac{cdx}{xx}.$$

II. Wenn $y = \frac{a}{\sqrt{x}} + b + c\sqrt{x} - ex$ ist, wird gelten

$$dy = \frac{-adx}{2x\sqrt{x}} + \frac{cdx}{2\sqrt{x}} - edx \quad \text{und} \quad ddy = \frac{3adx^2}{4xx\sqrt{x}} - \frac{cdx^2}{4x\sqrt{x}}$$

III. Wenn $y = a + \frac{b}{\sqrt[3]{xx}} - \frac{c}{x\sqrt[3]{x}} + \frac{f}{xx}$ ist, wird gelten

$$dy = \frac{-2bdx}{3x\sqrt[3]{xx}} + \frac{4cdxd}{3xx\sqrt[3]{x}} - \frac{3fdx}{x^3} \quad \text{und} \quad ddy = \frac{10bdx^2}{9x^2\sqrt[3]{xx}} - \frac{28cdx^3}{9x^3\sqrt[3]{x}} + \frac{6fdx^2}{x^4}.$$

Beispiele von dieser Art werden mit Hilfe der angegebenen Vorschriften sehr leicht bewältigt.

§162 Wenn die vorgelegte zu differenzierende Größe eine Potenz einer Funktion solcher Art war, deren Differential wir darbieten können, reichen die vorhergehenden Vorschriften aus, um ihr erstes Differential zu bestimmen. Es sei nämlich p irgendeine Funktion von x , deren Differential dp in unserer Macht steht; es wird das erste Differential der Potenz von p^n selbst $= np^{n-1}dp$ sein. Daher werden die folgenden Beispiele gelöst.

I. Wenn $y = (a + x)^n$ ist, wird sein

$$dy = n(a + x)^{n-1}dx$$

II. Wenn $y = (aa - xx)^2$ ist, wird sein

$$dy = -4xdx(aa - xx)$$

III. Wenn $y = \frac{1}{aa+xx}$ oder $y = (aa + xx)^{-1}$ ist, wird sein

$$dy = \frac{-2xdx}{(aa + xx)^2}$$

IV. Wenn $y = \sqrt{a + bx + cxx}$ ist, wird sein

$$dy = \frac{bdx + 2cxdx}{2\sqrt{a + bx + cxx}}$$

V. Wenn $y = \sqrt[3]{(a^4 - x^4)^2}$ oder $y = (a^4 - x^4)^{\frac{2}{3}}$ ist, wird sein

$$dy = -\frac{8}{3}x^3 dx (a^4 - x^4)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-8x^3 dx}{3\sqrt[3]{a^4 - x^4}}$$

VI. Wenn $y = \frac{1}{\sqrt{1-xx}}$ oder $y = (1 - xx)^{-\frac{1}{2}}$ ist, wird sein

$$dy = x dx (1 - xx)^{-\frac{3}{2}} = \frac{x dx}{(1 - xx)\sqrt{1 - xx}}$$

VII. Wenn $y = \sqrt[3]{a + \sqrt{bx} + x}$ ist, wird sein

$$dy = \frac{dx\sqrt{b} : 2\sqrt{x} + dx}{3\sqrt[3]{(a + \sqrt{bx} + x)^2}} = \frac{dx\sqrt{b} + 2dx\sqrt{x}}{6\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{(a + \sqrt{bx} + x)^2}}$$

VIII. Wenn $y = \frac{1}{x + \sqrt{aa - xx}}$ ist, wird wegen $d.\sqrt{aa - xx} = \frac{-x dx}{2\sqrt{aa - xx}}$ gelten

$$dy = \frac{-dx + x dx : \sqrt{aa - xx}}{(x + \sqrt{aa - xx})^2} = \frac{x dx - dx\sqrt{aa - xx}}{(x + \sqrt{aa - xx})^2 \sqrt{aa - xx}}$$

oder

$$dy = \frac{dx(x - \sqrt{aa - xx})^3}{(2xx - aa)^2 \sqrt{aa - xx}}$$

IX. Wenn $y = \sqrt[4]{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(1 - xx)^2}\right)^3}$ ist, werde festgelegt

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = p \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{(1 - xx)^2} = q;$$

wegen $y = \sqrt[4]{(1-p+q)^3}$ wird sein

$$dy = \frac{-3dp + 3dq}{4\sqrt[4]{1-p+q}}$$

Nun ist durch das Vorausgehende

$$dp = \frac{-dx}{2x\sqrt{x}} \quad \text{und} \quad dy = \frac{-4xdx}{3\sqrt[3]{1-xx}},$$

nach Einsetzen welcher Werte werden wird

$$dy = \frac{3dx : 2x\sqrt{x} - 4xdx : \sqrt[3]{1-xx}}{4\sqrt[4]{1-\frac{1}{\sqrt{x}}} + \sqrt[3]{(1-xx)^2}}$$

Auf die gleiche Weise, indem die einzelnen Buchstaben anstelle ein wenig höher zusammengesetzter Terme eingesetzt werden, werden die Differentiale von allen Funktionen dieser Art leicht gefunden.

§163 Wenn die zu differenzierende Größe ein Produkt aus zwei oder mehreren Funktionen von x war, deren Differentiale bekannt sind, wird ihr Differential auf die folgende Weise äußerst angenehm gefunden werden. Es seien p und q Funktionen von x , deren Differentiale dp und dq schon bekannt sind; weil, nachdem $x + dx$ anstelle von x gesetzt worden ist, p und $p + dp$ und q in $q + dq$ übergeht, wird das Produkt pq verwandelt werden in

$$(p + dp)(q + dq) = pq + pdq + qdp + dpdq,$$

woher das Differential des Produktes $pq = pdq + qdp + dpdq$ sein wird; weil dort pdq und qdp unendlich kleine Größen erster Ordnung sind, aber $dpdq$ eine zweiter Ordnung, wird der letzte Term verschwinden und es wird daher sein

$$d.pq = pdq + qdp.$$

Das Differential des Produktes pq besteht also aus zwei Gliedern, die erhalten werden, wenn jeder der beiden Faktoren mit dem Differential des anderen Faktors multipliziert wird. Daher wird leicht die Differentiation eines aus drei

Faktoren bestehenden Produktes abgeleitet; es werde nämlich $qr = z$ gesetzt; es wird $pqr = pz$ und $d.pqr = pdz + zdp$ sein, nach Einsetzen welcher Werte anstelle von z und dz sein wird

$$d.pqr = pqdr + prdq + qrdp.$$

Auf die gleiche Weise, wenn die zu differenzierende Größe vier Faktoren hat, wird gelten

$$d.pqrs = pqrds + pqsd r + prsdq + qrsdp,$$

woher jeder beliebige die Differentiation von Produkten mehrerer Faktoren leicht erkennen wird.

I. Wenn also $y = (a + x)(b - x)$ war, wird sein

$$dy = -dx(a + x) + dx(b - x) = -adx + bdx - 2xdx,$$

welches selbe Differential auch gefunden wird, wenn die vorgelegte Größe entwickelt wird, es wird nämlich $y = ab - ax + bx - xx$ und daher durch die oberen Vorschriften

$$dy = -adx + bdx - 2xdx.$$

II. Wenn $y = \frac{1}{x}\sqrt{aa - xx}$ war, werde festgelegt

$$\frac{1}{x} = p \quad \text{und} \quad \sqrt{aa - xx} = q;$$

weil gilt

$$dp = \frac{-dx}{xx} \quad \text{und} \quad dq = \frac{-xdx}{\sqrt{aa - xx}},$$

wird auch gelten

$$dy = pdq + qdp = -\frac{dx}{\sqrt{aa - xx}} - \frac{dx}{xx}\sqrt{aa - xx};$$

diese werden auf denselben Nenner gebraucht geben

$$\frac{-xxdx - aadx + xxdx}{xx\sqrt{aa - xx}} = \frac{-aadx}{xx\sqrt{aa - xx}}.$$

Daher wird das gesuchte Differential sein

$$dy = \frac{-aadx}{xx\sqrt{aa-xx}}$$

III. Wenn $y = \frac{xx}{\sqrt{a^4+x^4}}$ war, werde festgelegt

$$xx = p \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{a^4+x^4}} = q;$$

weil wir gefunden haben

$$dp = 2xdx \quad \text{und} \quad dq = \frac{-2x^3dx}{(a^4+x^4)^{\frac{3}{2}}},$$

wird gelten

$$pdq + qdp = \frac{-2x^5dx}{(a^4+x^4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2xdx}{\sqrt{a^4+x^4}} = \frac{2a^4xdx}{(a^4+x^4)^{\frac{3}{2}}}.$$

Daher wird also das gesuchte Differential sein

$$dy = \frac{2a^4xdx}{(a^4+x^4)\sqrt{a^4+x^4}}$$

IV. Wenn $y = \frac{x}{x+\sqrt{1+xx}}$ war, wird durch Festlegen von

$$x = p \quad \text{und} \quad \frac{1}{x+\sqrt{1+xx}} = q$$

wegen

$$\begin{aligned} dp = dx \quad \text{und} \quad dq &= \frac{-dx - xdx : \sqrt{1+xx}}{(x+\sqrt{1+xx})^2} = \frac{-dx(x+\sqrt{1+xx})}{(x+\sqrt{1+xx})^2\sqrt{1+xx}} \\ &= \frac{-dx}{(x+\sqrt{1+xx})\sqrt{1+xx}} \end{aligned}$$

sein

$$pdq + qdp = \frac{-xdx}{(x + \sqrt{1+xx})\sqrt{1+xx}} + \frac{dx}{x + \sqrt{1+xx}} = \frac{dx(\sqrt{1+xx} - x)}{(x + \sqrt{1+xx})\sqrt{1+xx}}.$$

Es wird also das gesuchte Differential werden

$$dy = \frac{dx(\sqrt{1+xx} - x)}{(x + \sqrt{1+xx})\sqrt{1+xx}};$$

wenn Zähler und Nenner dieses Bruches mit $\sqrt{1+xx} - x$ multipliziert werden, wird werden

$$dy = \frac{dx(1 + 2xx - 2x\sqrt{1+xx})}{\sqrt{1+xx}} = \frac{dx + 2xxdx}{\sqrt{1+xx}} - 2xdx.$$

Dasselbe Differential kann auf andere Weise angenehmer gefunden werden; weil nämlich gilt

$$dy = \frac{x}{x + \sqrt{1+xx}},$$

werden Zähler sowie Nennen mit $\sqrt{1+xx} - x$ multipliziert und es wird werden, deren Differential durch die erste Regel dieses ist

$$dy = \frac{xdx + 2x^3dx}{\sqrt{xx + x^4}} - 2xdx = \frac{dx + 2xxdx}{\sqrt{1+xx}} - 2xdx$$

V. Wenn $y = (a+x)(b-x)(x-c)$ war, wird sein

$$dy = (a+x)(b-x)dx - (a+x)(x-c)dx + (b-x)(x-c)dx$$

VI. Wenn $y = x(aa+xx)\sqrt{aa-xx}$ war, wird wegen der drei Faktoren also aufgefunden werden

$$dy = dx(aa+xx)\sqrt{aa-xx} + 2xxdx\sqrt{aa-xx} - \frac{xxdx(aa+xx)}{\sqrt{aa-xx}} = \frac{dx(a^4 + aaxx - 4x^4)}{\sqrt{aa-xx}}$$

§164 Obwohl auch Brüche in den Faktoren erfasst werden können, werden wir dennoch besser eine für das Differenzieren von Brüchen dienende Regel gebrauchen. Es sei also dieser Bruch $\frac{p}{q}$ vorgelegt, dessen Differential gefunden werden muss. Weil ja aber für $x + dx$ anstelle von x gesetzt jener Bruch übergeht in

$$\frac{p + dp}{q + dq} = (p + dp) \left(\frac{1}{q} - \frac{dq}{qq} \right) = \frac{p}{q} - \frac{pdq}{qq} + \frac{dp}{q} - \frac{dpdq}{qq},$$

woher, wenn der Bruch $\frac{p}{q}$ selbst subtrahiert wird, sein Differential zurückbleibt

$$d.\frac{p}{q} = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{qq}$$

wegen des verschwindenden Termes $\frac{dpdq}{qq}$; daher wird also gelten

$$d.\frac{p}{q} = \frac{qdp - pdq}{qq},$$

woher diese Regel für die Differentiation einer jeden Bruches hervorgeht: Vom mit dem Nenner multiplizierten Differential des Zählers werde das mit dem Zähler multiplizierte Differential des Nenners subtrahiert, der Rest werde durch das Quadrat des Nenners geteilt und der Quotient wird das gesuchte Differential des Bruches sein.

I. Wenn $y = \frac{x}{aa+xx}$ war, wird durch diese Regel sein

$$dy = \frac{(aa + xx)dx - 2xxdx}{(aa + xx)^2} = \frac{(aa - xx)dx}{(aa + xx)^2}.$$

II. Wenn $y = \frac{\sqrt{aa+xx}}{aa-xx}$ war, wird aufgefunden

$$dy = \frac{(aa - xx)xdx : \sqrt{aa + xx} + 2xdx\sqrt{aa + xx}}{(aa - xx)^2}$$

und nach einer Reduktion

$$dy = \frac{(3aa + xx)xdx}{(aa - xx)^2\sqrt{aa + xx}}$$

Oftmals ist es zuträglich, die Regel zu gebrauchen, die aus der ersten Formel folgt, nämlich

$$d.\frac{p}{q} = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{qq},$$

nach welcher das Differential eines Bruches dem durch den Nenner getheilten Differential des Zählers gleich aufgefunden wird, nachdem das mit dem Zähler multiplizierte, aber durch das Quadrat des Nenners geteilte Differential des Nenners weggenommen worden ist. So ergibt sich dann Folgendes:

III. Wenn $y = \frac{aa-xx}{a^4+aaax+x^4}$ war, wird sein

$$dy = \frac{-2xdx}{a^4+aaax+x^4} - \frac{(aa-xx)(2aaaxdx+4x^3dx)}{(a^4+aaax+x^4)^2},$$

welche auf denselben Nenner gebracht liefert

$$dy = \frac{-2xdx(2a^4+2aaax-x^4)}{(a^4+aaax+x^4)^2}.$$

§165 Diese Dinge reichen schon aus um das Differential einer jeden vorgelegten rationalen Funktion ausfindig zu machen; wenn sie ganz war, ist die Differentiationsweise schon oben dargestellt worden. Es sei also die vorgelegte Funktion gebrochen, welche immer auf eine Form dieser Art zurückgeführt werden wird

$$y = \frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+\text{etc}}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\epsilon x^4+\zeta x^5+\text{etc}}$$

Der Zähler werde = p und der Nenner = q gesetzt, dass $y = \frac{p}{q}$ wird, und es wird gelten

$$dy = \frac{qdp - pdq}{qq}$$

Aber weil ja gilt

$$p = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc}$$

und

$$q = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \text{etc},$$

wird sein

$$dp = Bdx + 2Cxdx + 3Dx^2dx + 4Ex^3dx + \text{etc},$$

und

$$dq = \beta dx + 2\gamma x dx + 3\delta x^2 dx + 4\epsilon x^3 dx + \text{etc},$$

woher durch Multiplikation erhalten werden wird

$$\begin{aligned} qdp &= \alpha B dx + 2\alpha C x dx + 3\alpha D x^2 dx + 4\alpha E x^3 dx + \text{etc} \\ &+ \beta B x dx + 2\beta C x^2 dx + 3\beta D x^3 dx + \text{etc} \\ &+ \gamma B x^2 dx + 2\gamma C x^3 dx + \text{etc} \\ &+ \delta B x^3 dx + \text{etc} \\ pdq &= \beta A dx + \beta B x dx + \beta C x^2 dx + \beta D x^3 dx + \text{etc} \\ &+ 2\gamma A x dx + 2\gamma B x^2 dx + 2\gamma C x^3 dx + \text{etc} \\ &+ 3\delta A x^2 dx + 3\delta B x^3 dx + \text{etc} \\ &+ 4\epsilon A x^3 dx + \text{etc} \end{aligned}$$

Aus diesen wird deshalb das gesuchte Differential erhalten werden

$$dy = \frac{\left. \begin{array}{l} + \alpha B \\ - \beta A \end{array} \right\} dx + \left. \begin{array}{l} + 2\alpha C \\ - 2\gamma A \end{array} \right\} x dx + \left. \begin{array}{l} + 3\alpha D \\ - \beta C \\ - \gamma B \\ - 3\delta A \end{array} \right\} x^2 dx + \left. \begin{array}{l} + 4\alpha E \\ - 2\beta D \\ - 2\delta B \\ - 4\epsilon A \end{array} \right\} x^3 dx + \left. \begin{array}{l} + 5\alpha F \\ + 3\beta E \\ + \gamma D \\ - \delta C \\ - 3\epsilon B \\ - 5\zeta A \end{array} \right\} x^4 dx \text{ etc.}}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \zeta x^5 + \text{etc})^2}$$

Dieser Ausdruck ist, um das Differential einer jeden rationalen Funktion bequem zu finden, im höchsten Maße geeignet. Wie nämlich der Zähler des Differentials aus den Koeffizienten des Zählers und des Nenners der vorgelegten Funktion kombiniert wird, wird aus einer eingehenden Betrachtung schnell verstanden. Der Nenner des Differentials ist hingegen das Quadrat des Nenners der vorgelegten Funktion.

§166 Wenn also entweder der Zähler oder der Nenner oder jeder der beiden des vorgelegten Bruches aus Faktoren besteht, wird nach tatsächlich durchgeführter Multiplikation freilich eine Form entspringen, wie wir sie gerade differenziert haben; aber dennoch wird leichter für diese Fälle eine eigene

Regel formuliert werden.

Es sei also ein Bruch von dieser Art $y = \frac{pr}{q}$ vorgelegt. Der Zähler werde $pr = P$ gesetzt, dass gilt

$$dP = pdr + rdp$$

Und wegen $y = \frac{P}{q}$ wird gelten

$$dy = \frac{qdP - Pdq}{qq};$$

nachdem aber anstelle von P und dP die Werte eingesetzt worden sind, wird man haben:

I. Wenn $y = \frac{pq}{q}$ war, wird sein Differential sein

$$dy = \frac{pqdr + qrdp - prdq}{qq}$$

Wenn $y = \frac{p}{qs}$ ist, wird, nachdem der Nenner $qs = Q$ gesetzt worden ist, sein

$$dQ = qds + sdq$$

und

$$dy = \frac{Qdp - pdQ}{qqss}.$$

Daher:

II. Wenn $y = \frac{p}{qs}$ war, wird sein

$$dy = \frac{qsdp - pqds - psdq}{qqss}.$$

Wenn $y = \frac{pr}{qs}$ war, werde $pr = P$ und $qs = Q$ gesetzt, dass man $y = \frac{P}{Q}$ hat und auch

$$dy = \frac{QdP - PdQ}{QQ}.$$

Weil aber gilt

$$dP = pdr + rdp \quad \text{und} \quad dQ = qds + sdq,$$

wird die folgende Differentiation hervorgehen:

III. Wenn $y = \frac{pr}{qs}$ war, wird sein

$$dy = \frac{pqsd r + qrsdp - pqrds - prsdq}{qqss}$$

oder

$$dy = \frac{rdp}{qs} + \frac{pdr}{qs} - \frac{prdq}{qqs} - \frac{prds}{qss}.$$

Auf die gleiche Weise, wenn Zähler und Nenner des vorgelegten Bruches mehrere Faktoren haben, werden die Differentiale auf dieselbe Art ausfindig gemacht werden und es wird dafür keine weitere Anleitung von Nöten sein. Deswegen lasse ich auch die sich hier auf beziehenden Beispiele aus, weil bald eine allgemeine alle diese partikulären Differentiationsmethoden umfassende Art und Weise angeführt wird.

§167 Es sind aber Fälle so von Produkten wie von Brüchen gegeben, in denen das Differential angenehmer ausgedrückt werden kann als durch die allgemeinen hier dargelegten Regeln. Dies passiert, wenn die Faktoren, die entweder die Funktion selbst oder die Zähler oder Nenner der Funktion festlegen, Potenzen waren.

Wir wollen festlegen, dass die zu differenzierende Funktionen $y = p^m q^n$ ist, um deren Differential zu finden, sei $p^m = P$ und $q^n = Q$, dass wird

$$y = PQ \quad \text{und} \quad dy = PdQ + QdP.$$

Weil aber gilt

$$dP = mp^{m-1}dp \quad \text{und} \quad dQ = nq^{n-1}dq,$$

wird nach Einsetzen dieser Werte werden

$$dy = np^m q^{n-1}dq + mp^{m-1} q^n dp = p^{m-1} q^{n-1} (npdq + mqdp),$$

woher die folgende Regel entsteht:

I. Wenn $y = p^m q^n$ war, wird sein

$$dy = p^{m-1} q^{n-1} (npdq + mqdp).$$

Auf die gleiche Weise, wenn es drei Faktoren waren, wird das Differential gefunden werden und auf diese Weise ausgedrückt aufgefunden werden:

II. Wenn $y = p^m q^n r^k$ war, wird sein

$$dy = p^{m-1} q^{n-1} r^{k-1} (mqrdp + nprdq + kpqdr).$$

§168 Wenn aber ein Bruch vorgelegt war, entweder dessen Zähler oder dessen Nenner einen Faktor hat, der eine Potenz ist, werden auch spezielle Regeln angegeben werden können.

Es sei zuerst ein Bruch von dieser Art vorgelegt $y = \frac{p^m}{q}$; es wird durch die für Brüche dienende Regel sein

$$dy = \frac{mp^{m-1}qdp - p^m dq}{qq},$$

welches Differential angenehmer so ausgedrückt werden wird:

I. Wenn $y = \frac{p^m}{q}$ war, wird sein

$$dy = \frac{p^{m-1}(mqdp - pdq)}{qq}.$$

Es sei nun $y = \frac{p}{q^n}$; es wird durch die dieselbe obere Regel werden

$$dy = \frac{q^n dp - npq^{n-1}dq}{q^{2n}};$$

Wenn Zähler so wie Nenner dieses Ausdrucks durch q^{n-1} geteilt werden; wird sein

$$dy = \frac{qdp - npdq}{q^{n+1}}.$$

Deswegen:

II. Wenn $y = \frac{p}{q^n}$ war, wird sein

$$dy = \frac{qdp - npdq}{q^{n+1}}.$$

Wenn daher aber $y = \frac{p^m}{q^n}$ vorgelegt wird, wird gefunden werden

$$dy = \frac{mp^{m-1}q^n dp - np^m q^{n-1} dq}{q^{2n}},$$

welche zurückgeführt wird auf

$$dy = \frac{mp^{m-1}qdp - np^m dq}{q^{n+1}}.$$

Deshalb:

III. Wenn $y = \frac{p^m}{q^n}$ war, wird sein

$$dy = \frac{p^{m-1}(mqdp - npdq)}{q^{n+1}}.$$

Wenn schließlich ein Bruch von dieser Art vorgelegt war $y = \frac{r}{p^m q^n}$, wird man durch die allgemeine Regel haben

$$dy = \frac{p^m q^n dr - mp^{m-1} q^n r dp - np^m q^{n-1} r dq}{p^{2m} q^{2n}}$$

Weil Zähler und Nenner dieses Ausdrucks durch $p^{m-1} q^{n-1}$ teilbar sind:

IV. Wenn $y = \frac{r}{p^m q^n}$ war, wird sein

$$dy = \frac{pqdr - mqr dp - npr dq}{p^{m+1} q^{n+1}}.$$

Wenn mehrere Faktoren auftauchen, werden spezielle Regeln von dieser Art, welche es überflüssig wäre, sie in Worten auszudrücken, als leichte Aufgabe für jeden Fall gefunden werden können.

§169 Die Differentiationsregeln, die wir bisher dargelegt haben, erstrecken sich so weit, dass keine algebraische Funktion von x erdacht werden kann, die nicht mit deren Hilfe differenziert werden kann. Wenn nämlich die Funktion von x rational war, wird sie entweder ganz oder gebrochen sein; im ersten Fall haben wir in §159 die Art beschrieben, Funktionen von solcher Art zu differenzieren, im zweiten Fall haben wir hingegen in §165 Aufgabe bewältigt. Zugleich haben wir aber auch Anleitungen, wenn Faktoren involviert werden, für die Differentiation dargeboten. Darauf haben wir in der Tat auch irrationale Größen eines jeden Geschlechts zu differenzieren gelehrt, die, wie auch immer sie die vorgelegte Funktion betreffen, ob sie mit ihr durch Addition oder durch Subtraktion oder Multiplikation oder Differentiation verwickelt sind, immer auf die schon behandelten Fälle zurückgeführt werden können. Diese Dinge sind aber über explizite Funktionen zu verstehen, denn über implizite, deren Natur durch eine Gleichung gegeben ist, werden wir sie unten, nachdem wir Funktionen von zwei oder mehr Variablen zu differenzieren gelehrt haben werden, eingehender behandeln.

§170 Wenn wir die einzelnen hier angegebenen Regeln gründlich betrachten und sie zusammentragen, werden wir sie alle auf eine besonders allgemeine zurückführen können; diese wird sich aber erst unten mit einem strengen Beweis untermauern lassen [§214]; dennoch wird es auch an dieser Stelle für den aufmerksamen Leser nicht sehr schwierig sein, ihre Gültigkeit zu sehen. Irgendeine algebraische Funktion ist aus einzelnen Bestandteilen zusammengesetzt, die entweder durch Addition oder Subtraktion oder Multiplikation oder Division miteinander verbunden sein werden; und diese Teile werden alle entweder rational oder irrational sein. Wir wollen also diese eine jede Funktion festlegenden Größen ihre Teile nennen:

Dann werde für jeden beliebigen Teil die vorgelegte Funktion jeweils einzeln so differenziert, als wäre der Teil allein variabel, die übrigen Teile hingegen alle konstant. Danach werden diese Differentiale, die aus den einzelnen Teilen auf die beschriebene Weise gefunden werden, zu einer Summe gesammelt und so wird das Differential der vorgelegten Funktion erhalten werden.

Und mit Hilfe dieser Regel werden ganz und gar alle Funktionen differenziert werden können, nicht einmal transzendente werden davon ausgenommen, wie unten gezeigt werden wird.

§171 Um diese Regel zu illustrieren, wollen wir festlegen, dass die Funktion y aus zwei entweder durch Addition oder Subtraktion verbundenen Teilen besteht, so dass gilt

$$y = p \pm q$$

Es werde zuerst allein der Teil p variabel festgelegt, der andere q hingegen konstant; das Differential wird $= dp$ sein; darauf werde allein der andere Teil $\pm q$ variabel festgelegt, der andere p hingegen konstant und das Differential wird $= \pm dq$ sein. Und aus diesen Differentialen wird das Differential so zusammengesetzt werden, dass gilt

$$dy = dp \pm dq,$$

ganz und gar wie wir dasselbe schon oben gefunden haben. Daher ist in der Tat zugleich klar, wenn die Funktion aus mehreren entweder zueinander addierten oder voneinander subtrahierten Teilen besteht, natürlich

$$y = p \pm q \pm r \pm s,$$

dass mit Hilfe dieser Regel gefunden werden wird

$$dy = dp \pm dq \pm dr \pm ds,$$

gänzlich wie auch die obige Regel lehrt.

§172 Wenn aber die Teile miteinander multipliziert waren, so dass gilt

$$y = pq,$$

ist es offenbar, dass, nachdem allein der Teil p variabel festgelegt worden ist, das Differential = qdp sein wird; aber wenn allein der andere Teil q variabel festgelegt wird, wird das Differential = pdq sein. Diese zwei Differentiale werden zueinander addiert und das gesuchte Differential wird hervorgehen als

$$dy = qdp + pdq,$$

wie aus den schon angeführten Dingen bekannt ist. Wenn mehr Teile durch Multiplikation verbunden waren, natürlich

$$y = pqrs,$$

wenn nacheinander jeweils einer allein variabel festgelegt wird, werden diese Differentiale entspringen

$$qrsdp, \quad prsdq, \quad pqsd r \quad \text{und} \quad pqrds,$$

deren Summe das gesuchte Differential geben wird, natürlich

$$dy = qrsdp + prsdq + pqsd r + pqrds,$$

völlig wie wir zuvor gefunden haben. Das Differential ist also aus ebenso vielen Teilen zusammengesetzt, ob die die Funktion festlegenden Teile zueinander addiert oder voneinander subtrahiert oder miteinander multipliziert worden sind.

§173 Wenn die die Funktionen bildenden Teile durch Division verbunden sind, natürlich

$$y = \frac{p}{q},$$

werde gemäß der Regel zuerst allein der Teil p variabel festgelegt und es wird wegen des konstanten q das Differential = $\frac{dp}{q}$ sein; darauf werde allein der Teil q variabel festgelegt; wegen $y = pq^{-1}$ wird das Differential = $\frac{-pdq}{qq}$

sein, welche zwei Differentiale gesammelt das Differential der vorgelegten Funktion geben werden, nämlich

$$dy = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{qq} = \frac{qdp - pdq}{qq},$$

so wie wir schon oben gefunden haben. Auf die gleiche Weise, wenn die vorgelegte Funktion diese ist

$$y = \frac{pq}{rs},$$

indem nacheinander die einzelnen Teile p , q , r und s allein variabel festgelegt werden, werden die folgenden Differentiale hervorgehen

$$\frac{qdp}{rs}, \quad \frac{pdq}{rs}, \quad \frac{-pqdr}{rrs} \quad \text{und} \quad \frac{-pqds}{rss},$$

woher wird

$$dy = \frac{qrsdp + prsdq - pqdsr - pqrds}{rrss}.$$

§174 Solange also die einzelnen Teile, aus denen die Funktion zusammengesetzt ist, so beschaffen waren, dass deren Differentiale dargeboten werden können, wird zugleich auch das Differential der ganzen Funktion gefunden werden können. Wenn daher also die Teile rationale Funktionen waren, dann werden deren Differentiale nicht nur mit Hilfe der schon zuvor gegebenen Vorschriften gefunden, sondern werden auch aus dieser allgemeinen Regel selbst gefunden werden können; wenn aber die Teile irrational waren, weil Irrationalitäten auf Potenzen, deren Exponenten gebrochene Zahlen sind, zurückgeführt werden, werden sie durch die Differentiation von Potenzen, nach welcher $d.x^n = nx^{n-1}dx$ ist, differenziert werden. Und aus dieser Quelle wird auch die Differentiation von irrationalen Formeln solcher Art geschöpft werden, welche darüber hinaus sonderliche Ausdrücke involvieren. Daher tritt es klar zutage, wenn mit der hier gegebenen allgemeinen, hingegen unten zu beweisenden Regel die Regel Potenzen zu differenzieren verbunden wird, dass dann die Differentiale von ganz und gar allen algebraischen Funktionen dargeboten werden können.

§175 Aus all diesen Dingen folgt schon klar, wenn y irgendeine algebraische Funktion von x war, dass ihr Differential dy eine Form solcher Art haben wird $dy = pdx$, in welcher der Wert von p durch die hier dargelegten Vorschriften

immer angegeben werden kann. Es wird aber p auch eine algebraische Funktion von x sein, weil in ihre Bestimmung keine anderen Operationen eingehen als die üblichen, mit denen algebraische Funktionen festgelegt zu werden pflegen. Dieser Sache wegen, wenn y eine algebraische Funktion von x war, wird auch $\frac{dy}{dx}$ eine algebraische Funktion von x sein. Und wenn z auch eine algebraische Funktion von x war, so dass $dz = qdx$ ist, wird wegen der algebraischen Funktion q von x auch $\frac{dz}{dy}$ eine algebraische Funktion sein, die natürlich $= \frac{p}{q}$ ist. Daher, wenn Formeln von dieser Art $\frac{dz}{dy}$ in den ansonsten algebraischen Ausdruck eingehen, werden sie nicht verhindern, dass dieser Ausdruck algebraisch ist, solange y und z algebraische Funktionen waren.

§176 Wir werden aber die Schlussweise auch auf zweite Differentiale und die der höheren Ordnungen ausdehnen können. Wenn nämlich, während y eine algebraische Funktion von x bleibt, $dy = pdx$ und $dp = qdx$ war, wird für konstant genommenes Differential dx $ddy = qdx$ sein, wie wir oben gesehen haben. Weil also wegen der zuvor angeführten Gründe auch q eine algebraische Funktion von x ist, wird auch $\frac{ddy}{dx^2}$ nicht nur eine endliche Größe, sondern auch eine algebraische Funktion von x sein, solange y eine Funktion solcher Art war. Auf die gleiche Weise wird erkannt werden, dass $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ etc algebraische Funktionen von x sein werden, solange y eine solche war; und wenn z auch eine algebraische Funktion von x ist, werden alle endlichen Ausdrücke, die aus den Differentialen einer jeden Ordnung von y , z und dx zusammengesetzt sind, von welcher Art $\frac{ddy}{dz}$, $\frac{d^3y}{dzddy}$, $\frac{dx d^4y}{dy^3 dz}$ etc sind, zugleich algebraische Funktionen von x sein.

§177 Weil nun also die Methode angegeben worden ist, das erste Differential einer jeden algebraischen Funktion von x zu finden, werden wir mit derselben Methode auch die zweiten Differentiale und die der höheren Ordnungen ausfindig machen können. Wenn nämlich y irgendeine Funktion von x war, wird aus ihrer Differentiation der Wert von p bekannt werden. Wenn dieser erneut differenziert wird und $dp = qdx$ aufgefunden wird, wird für konstant gesetztes dx $ddy = qdx^2$ sein und so wird das zweite Differential bestimmt werden. Indem weiter q differenziert wird, dass $dq = rdx$ ist, wird man das dritte Differential $d^3y = rdx^3$ haben und so werden weiter die Differentiale der höheren Ordnungen ausfindig gemacht werden, weil ja die Größen p , q , r etc alle algebraische Funktionen von x sind, um welche zu differenzieren, die

gegebenen Vorschriften ausreichen. Damit wird also eine ununterbrochene Differentiation bewerkstelligt werden; nachdem nämlich dx in der Differentiation von y weggelassen worden ist, wird der Wert von $\frac{dy}{dx} = p$ hervorgehen, welcher erneut differenziert und durch dx geteilt, was geschieht, indem überall das Differential dx weggelassen wird, den Wert von $q = \frac{ddy}{dx^2}$ geben wird. Auf die gleiche Weise wird weiter $r = \frac{d^3y}{dx^3}$ etc gefunden.

I. Es sei $y = \frac{aa}{aa+xx}$, deren so erstes Differential wie die der folgenden Ordnungen verlangt werden.

Zuerst wird also durch Differenzieren und zugleich durch Dividieren durch dx sein

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2aax}{(aa + xx)^2}$$

und daher weiter

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2a^4 + 6aaxx}{(aa + xx)^3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{24a^4x - 24aax^3}{(aa + xx)^4}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24a^6 - 240a^4xx + 120aax^4}{(aa + xx)^5}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{-720a^6x + 2400a^4x^3 - 720aax^5}{(aa + xx)^6}$$

etc

II. Es sei $y = \frac{1}{\sqrt{1-xx}}$ und das erste und die folgenden Differentiale werden

