Kapitel 1
Über das Variationskalkül im Allgemeinen

Leonhard Euler

Definition 1

§1 *Die Relation zwischen zwei Variablen wird gesagt variiert zu werden, wenn der Wert, mit welchem die eine daher durch die andere bestimmt wird, um einen unendlich kleinen Zuwachs vermehrt zu werden aufgefasst wird, welchen Zuwachs wir die Variation der Größe, welcher er hinzugefügt wird, nennen werden.*

Erläuterung

§2 Zuerst wird also hier irgendeine Relation zwischen den zwei Variablen x und y betrachtet, die mit irgendeiner Gleichung zwischen denselben ausgedrückt wurde und mit welcher für die einzelnen x zugeteilten Werte die entsprechenden Werte von y bestimmt werden; dann aber werden die einzelnen Werte von y mit unendlich kleinen Stücken auf irgendeine Weise vermehrt zu werden aufgefasst, sodass diese variierten Werte von den wahren, welche sie aus der vorgelegten Relation erhalten, unendlich wenig abweichen, und auf diese Weise wird die Relation zwischen x und y gesagt variiert zu werden und zugleich werden jene unendlich kleinen Stücke, die den wahren Werten von y hinzugefügt wurden, *Variationen* genannt. Besonders ist hier aber zu bemerken, dass diese Variation, mit denen diese einzelnen Werte von y vermehrt zu werden aufgefasst werden, weder einander gleich festgelegt werden noch auf irgendeine andere Weise voneinander abhängig sind, sondern so unserem Belieben überlassen werden, dass alle außer einem oder einige, die gewissen Werten von y entsprechen, sich als keine betrachten lassen. Diese Variationen sind natürlich keinem Gesetz unterworfen aufzufassen und die zwischen x und y gegebene Relation ist auch anzusehen keine Bestimmung in diese Variationen einzubringen, welche als vollkommen beliebig betrachtet werden müssen.

KOROLLAR 1

§3 Daher ist klar, dass Variationen sich in der ganzen Natur von Differentialen unterscheiden, auch wenn beide unendlich klein sind und daher natürlich verschwinden; denn die Variation betrifft denselben Wert von y, der dem Wert von x entspricht, während sein Differential $\mathrm{d}y$ zugleich den unmittelbar folgenden Wert $x + \mathrm{d}x$ mit einbezieht.

KOROLLAR 2

§4 Wenn nämlich aus der zwischen x und y vorgelegten Relation y einem x entspricht, der $x + \mathrm{d}x$ entsprechende Wert von y aber y' gesetzt wird, dann ist $\mathrm{d}y = y' - y$; aber diese Variation von y hängt in keinster Weise vom folgenden Wert y' ab, ja es lässt sich sogar jedem der beiden y und y' nach Belieben seine Variation jeweils einzeln zuteilen.

BEMERKUNG

§5 Diese Idee der Variationen, die an sich so zu diffus wie unfruchtbar erscheinen kann, wird besonders gut illustriert werden, wenn wir ihre Entstehung und wie zu dieser gelangt worden ist erläutert haben werden. Es hat aber dorthin hauptsächlich die Frage über das Finden von Kurven hingeführt, die mit einer gewissen Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehen sind, woher, damit nicht beim Betrachten der Sache im Allgemeinen eine Unklarheit angetroffen wird, wir das Problem betrachten wollen, in welchem die gekrümmte Linie verlangt wird, über welcher ein schwerer herabgleitender Körper von einem gegebenen Punkt aus am schnellsten zu einem anderen gegebenem Punkt herabsinkt. Und hier ist freilich aus der Natur der

Maxima und der Minima sofort klar, dass die Kurve so beschaffen sein muss, dass, wenn an ihrer Stelle irgendeine andere sich unendlich wenig von jener unterscheidende Kurve eingesetzt wird, die Zeit des Herabsinkens über ihr vollkommen dieselbe sein wird. Die Lösung muss also so gegeben werden, dass, während die gesuchte Kurve als gegeben betrachtet wird, die Rechnung auch auf die andere von ihr nur unendlich wenig abweichende Kurve angewendet wird und daher der Unterschied, welcher sich auf den Ausdruck der Zeit niederschlägt, berechnet wird; dann nämlich wird dieser Unterschied selbst gleich Null gesetzt die Natur der gesuchten Kurve aufzeigen. Diese unendlich wenig von der gesuchten abweichenden Kurven werden am besten so betrachtet, dass die Ordinaten, die den einzelnen Abszissen entsprechen, um unendlich kleine Stücke entweder vermehrt oder vermindert werden, das heißt, wie *Variationen* zu erhalten aufgefasst werden. Für gewöhnlich genügt es freilich, eine Variation dieser Art bei einer einzigen Ordinate festgelegt zu haben; nichts hindert aber daran, dass mehreren und sogar allen Ordinaten solche Variationen zugeteilt werden, weil es nötig ist, dass man immer auf dieselbe Lösung geführt wird. Aber auf diese Weise wird nicht nur das Vermögen dieser Methode vorzüglicher aufgezeigt, sondern daher werden auch vollständigere und reichhaltigere Lösungen von Fragen dieser Art erhalten, woher es möglich ist, auch Fragen, die sich auf andere Bedingungen beziehen, zu beantworten. Dieses Grundes wegen scheint es ganz und gar notwendig, dass das Variationskalkül in der weitesten Ausdehnung, der es freilich fassungsfähig ist, behandelt wird.

DEFINITION 2

§6 *Für eine gegebene Relation zwischen zwei variablen Größen wird jede der beiden derselben gesagt variiert zu werden, wenn jede der beiden einzeln um einen unendlich kleinen Zuwachs vermehrt zu werden aufgefasst wird; daher ist klar, wie es zu verstehen ist, wenn jeder der beiden ihre Variation zugeteilt wird.*

ERLÄUTERUNG

§7 Wenn irgendeine Gleichung zwischen den zwei Variablen x und y vorgelegt ist, mit welcher deren gegenseitige Relation ausgedrückt wird, kann diese Relation nach Definition auf zweifache Weise variiert werden, auf die eine, indem, während die Werte von x dieselben bleiben, den einzelnen y eine Variation zugeteilt wird, auf die andere aber, indem, während die Werte von y dieselben bleiben, die einzelnen x variiert zu werden aufgefasst werden. Nichts verbietet es also, dass jede der beiden Variablen zugleich ihre Variationen zu erhalten verstanden wird, welche sich sogar so annehmen lassen, dass sie ohne irgendeinen Zusammenhang miteinander zusammenhängen; hier wird also eine zweifache Variation betrachtet, obwohl in der ersten Definition nur eine zugelassen worden ist. Wir betrachten aber diese Sache hier so allgemein, damit keine der beiden Variationen einem Gesetz unterworfen ist und auch die Variationen von y auf keine Weise von den Variationen von x abhängen.

Korollar 1

§8 Aus dem Fall, in welchem eine zweifache Variation festgelegt wird, entspringt also der erste Fall als Gattung, wenn die Variationen der anderen Variable vollkommen vernachlässigt werden; daher ist es offenkundig, dass der Fall der zweiten Definition den Fall der ersten in sich umfasst.

Korollar 2

§9 Daher zeigt sich umso mehr, wie eine gegebene Relation zwischen zwei Variablen auf unendlich viele Weisen variiert werden kann, und zugleich wird eingesehen, weil wir ja diese Variationen als keinem Gesetz unterworfen annehmen, dass ganz und gar alle möglichen Variationen jener Relation auf diese Weise angezeigt werden.

Bemerkung 1

§10 Zwar erfassen nur die der einen der beiden Variablen aufgeprägten Variationen schon alle möglichen Variationen, die der vorgelegten Relation zwischen den zwei Variablen zukommen können, sodass es überflüssig erscheinen kann, dass das Kalkül auf eine zweifache Variation angewendet wird; aber wenn wir die natürliche Beschaffenheit der Sache und den Gebrauch, mit welcher er verknüpft ist, aufmerksamer erwägen, wird die Betrachtung der doppelten Variation keinesfalls als überflüssig festgestellt werden, was durch die Geometrie am offenkundigsten auf folgende Weise illustriert werden wird.

Weil irgendeine Relation zwischen zwei Variablen am genauesten durch eine in der Ebene beschriebene gekrümmte Linie dargestellt wird, sei AYM (Fig. 1) die gekrümmte Linie, die mit einer Gleichung zwischen den Koordinaten $AX = x$ und $XY = y$ bestimmt wurde und die also jene gegebene Relation darbiete;

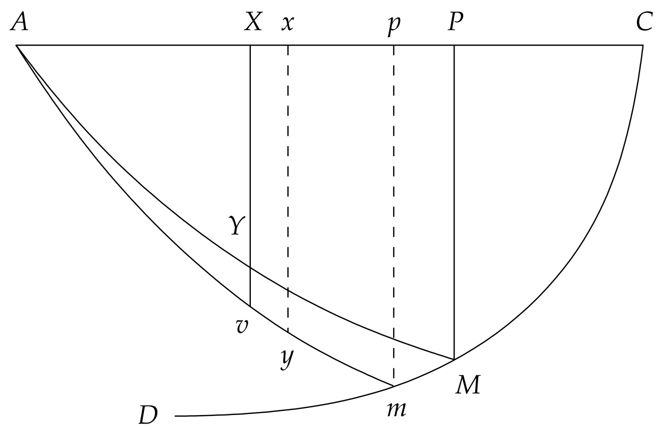

Fig. 1

nun wird also jede beliebige von jener nur unendlich wenig abweichende andere gekrümmte Linie Aym jene variierte Relation darstellen, die, wie auch immer sie sich verhält, immer so betrachtet werden kann, dass derselben Abszisse $AX = x$ die variierte Ordinate Xv entspricht, während das Stück Yv ihre Variation ist; diese Betrachtung genügt auch für die meisten über Maxima und Minima vorgelegten Fragen, wo sogar die Kurve AM in nur einigen Elementen variiert zu werden aufgefasst zu werden pflegt. Aber wenn die Frage so beschaffen ist, dass unter allen Kurven, welche sich vom gegebenen Punkt A aus bis hin zu einer gewissen gegebenen Kurve CD zeichnen lassen, die durch AYM bestimmt wird, welcher eine gewisse Eigenschaft des Maximums oder Minimums entspricht, dann muss dieselbe Eigenschaft auch irgendeiner anderen sehr nahen Kurven Aym, die auch in einem anderen Punkt m der Linie CD begrenzt wurde, gleichermaßen zufallen und so ist für den letzten Punkt M der gesuchten Kurve so diese Abszisse AP wie die

Ordinate PM eine Variation zu erhalten anzusehen und freilich von dieser Art, die der Natur der Linie CD verträglich ist. Damit also das Kalkül auf eine solche dem letzten Element aufgeprägten Variation angewendet werden kann, ist es ganz und gar notwendig, dass für die einzelnen Zwischenpunkte der Kurve AM vollkommen allgemein so der Abszisse $AX = x$ wie der Ordinate $XY = y$ irgendwelche Variationen zugeteilt werden und die Variation jener als das Stück Xx, von dieser aber gleich $xy - XY$ festgelegt wird, woher die Gestalt und zugleich der Gebrauch einer doppelten Variation von dieser Art sehr deutlich erkannt wird.

Bemerkung 2

§11 Wie diese Betrachtung des letzten Punktes der zu untersuchenden und zu findenden Kurve uns diese riesige Erleuchtung verschafft hat, so muss auch von da aus dem ersten Punkt eine Variation zugeteilt werden. Wie wenn beispielsweise unter allen Linien, welche sich von einer gewissen gegebenen Kurve AB (Fig. 2) zu einer gewissen ebenso gegebenen CD gezogen auffassen lassen, die zu suchen ist, die mit der Eigenschaft eines gewissen Maximums oder Minimums versehen ist, dann wird es um vieles mehr notwendig sein, dass so den einzelnen Abszissen AX wie den Ordinaten XY irgendwelche keinem Gesetz unterworfenen Variationen in der Rechnung angegeben werden, sodass sie darauf so auf die Variation des Anfangs G der gesuchten Kurve wie ihr Ende M übertragen werden können.

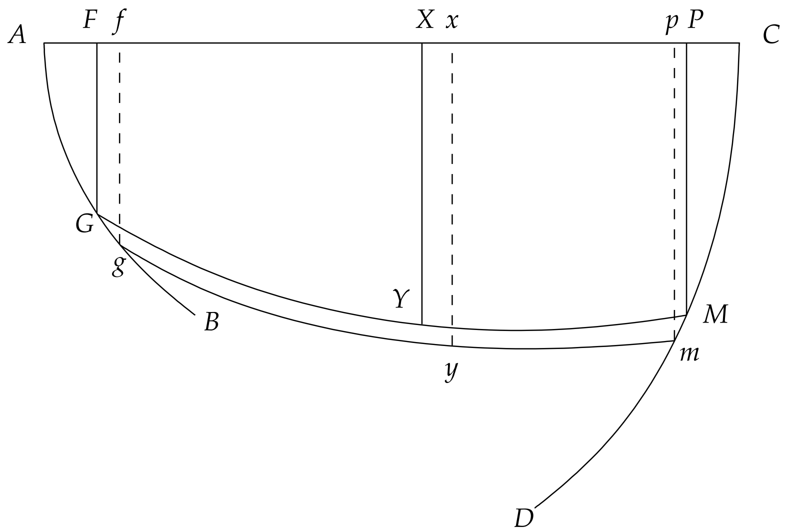

FIG. 2

Obwohl aber diese Illustration aus der Geometrie entnommen worden ist, wird dennoch leicht eingesehen, dass die daher hergeholte Idee der Variationen sich um vieles weiter erstreckt und in der davon losgelösten Analysis vom größten Nutzen nicht frei sein wird. Aber der hochgeehrte LAGRANGE, der scharfsinnigste Geometer Turins, welchem wir die ersten Entdeckungen, die über dieses Kalkül erhalten wurden, zuschreiben müssen, hat diese Methode auf höchst brillante Weise sogar auf nicht stetige Linien übertragen wie z. B. auf zur Art der Polygone zu zählende, bei welcher Aufgabe diese zweifachen Variationen selbigem sehr großen Nutzen geleistet haben.

DEFINITION 3

§12 *Eine Relation zwischen drei Variablen, mit zwei Gleichungen bestimmt, wird gesagt variiert zu werden, wenn von selbigen entweder eine oder zwei oder gar alle diese um unendlich kleine Stücke vermehrt werden, die deren Variationen genannt werden.*

Erläuterung

§13 Weil drei variable Größen vorgelegt werden wie beispielsweise x, y und z, zwischen welchen zwei Gleichungen gegeben zu sein aufgefasst werden, lassen sich aus irgendeiner derer die zwei übrigen bestimmen, sodass so y wie z als Funktion von x betrachtet werden kann. Auf diese Weise aber pflegt eine gekrümmte Linie bestimmt zu werden, die nicht in derselben Ebene beschrieben wurde, während ihre einzelnen Punkte durch diese drei Koordinaten x, y und z auf gewohnte Weise angegeben werden. Wenn daher nun eine solche Kurve von einer an ihr sehr nahen begleitet wird, dass die Differenz unendlich klein ist, wird diese neue Kurve die variierte der vorgelegten sein und jene variierte Relation zwischen den drei Variablen x, y, z ist aufzufassen ihre Natur auszudrücken. Daher, je nachdem wie die zwei sehr nahen Punkte, der eine auf der vorgelegten Kurve selbst, der andere in der variierten Begleitkurve angenommen, miteinander verglichen werden, kann es geschehen, dass für die variierte entweder alle drei Koordinaten voneinander verschieden hervorgehen oder nur zwei oder zumindest eine, und deren Differenzen von den anfänglichen Koordinaten der Kurve werden deren Variationen darstellen; dass diese Dinge hier aber derart allgemein betrachtet werden, ist gefällig, weil sie auf ganz und gar alle sehr nahen Kurven ausgedehnt werden, ob sie in ihrem ganzen Verlauf von der vorgelegten Kurve verschieden waren oder nur in gewissen Anteilen von ihr abweichen, sodass auch nicht stetige Linien, solange sie der grundlegenden sehr nahe sind, davon nicht ausgeschlossen werden. Denn diese variierten Kurven sind keinem einzigen Gesetz der Fortsetzung zu unterwerfen, dass sie ganz und gar alle möglichen von der grundlegenden unendlich wenig abweichenden Kurven in sich umfassen.

Korollar 1

§14 Es wird also ein gewisser Punkt der variierten Kurve mit irgendeinem Punkt der vorgelegten oder anfänglichen Kurve verglichen, der unendlich wenig von jenem entfernt gelegen ist, und daher werden die Variationen der Koordinaten bestimmt zu werden verstanden.

Korollar 2

§15 Weil weiter aus einer angenommenen Variable x die zwei übrigen y und z und daher ein Punkt der vorgelegten Kurve bestimmt wird, lassen sich auch die Variationen der einzelnen Variationen als Funktionen von x betrachten, solange deren Größe als unendlich klein betrachtet wird.

Korollar 3

§16 Es lassen sich also irgendwelche zwei wie sehr auch immer voneinander verschiedene Funktionen von x auffassen, die mit unendlich kleinen Faktoren multipliziert geeignet sein werden um drei Variationen von Koordinaten darzustellen. Dieses selbe ist auch über drei irgendwelche Variablen festzuhalten, auch wenn sie nicht zur Geometrie gerechnet werden.

Korollar 4

§17 Auf die gleiche Weise, wenn eine Relation zwischen nur zwei Variablen vorgelegt wird, können deren Variationen als Funktionen der einen Variable betrachtet werden, seien sie nur unendlich klein oder, was auf dasselbe hinausläuft, mit einer unendlich kleinen Größe multipliziert.

Bemerkung 1

§18 Aber die geometrische Betrachtung ist in höchstem Maße geeignet um diese Entdeckungen zu illustrieren, die im Allgemeinen betrachtet zu abstrakt und auch zu schlüpfrig erscheinen können. Der Fall dreier Variablen also, deren Relation mit zwei Gleichungen bestimmt zu werden angenommen wird, wird am vortrefflichsten durch eine nicht in derselben Ebene beschriebene Kurve erklärt, während mit jenen Variablen die drei Koordinaten bezeichnet werden. Wenn daher nämlich über Kurven von dieser Art die Frage gestellt wird, dass unter ihnen die bestimmt wird, die mit einer gewissen Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehen ist, ist es von Nöten, dass dieselbe Eigenschaft allen anderen von ihre unendlich wenig abweichenden Kurven gleichermaßen zufällt, was aus den entsprechend in die Rechnung eingeführten Variationen zu beurteilen ist. Was für einen Nutzen aber die höchste hier in den Variationen festgelegte Allgemeinheit haben wird, lässt sich daher einsehen, wenn anstelle der zwei Kurven AB und CD (Fig. 2) irgendwelche zwei Oberflächen gegeben sind, von jener von welchen beiden aus zu dieser eine gekrümmte Linie solcher Art gezogen werden muss, die sich einer gewissen Eigenschaft des Maximums oder Minimums erfreut. Dann müssen nämlich so allgemeine Variationen der drei Koordinaten betrachtet werden, dass die Variationen der gesuchten Kurve, nachdem der Punkt zum Anfang zur Oberfläche AB hin verschoben wurde, dort an dieselbe Oberfläche angepasst werden können und das auf die gleiche Weise am Ende zur Oberfläche CD geschehen kann. Daher ist es ersichtlich, dass im Allgemeinen drei Variationen in die Rechnung eingeführt werden müssen, dass sie sich so für den Anfang wie für das Ende der zu findenden Kurve auf die begrenzenden Oberflächen übertragen lassen, deren Gestalt natürlich in jeder der beiden Grenzen eine gegenseitige Relation zwischen den Variationen bestimmen wird.

Bemerkung 2

§19 So wie wir diese drei Variablen betrachtet haben, deren Relation mit zwei Gleichungen bestimmt wird, so kann die Rechnung der Variablen auch auf vier oder mehr Variablen ausgedehnt werden, wenn freilich die Relation durch so viele Gleichungen ausgedrückt wird, dass durch eine einzige Variable alle übrigen ihre Bestimmung erhalten, auch wenn die Illustration dieses Falles nicht weiter aus der Geometrie, die von nur drei Dimensionen eingeschlossen wird, hergeholt werden kann, außer wenn wir vielleicht die Zeit zur Hilfe nehmen wollen, einen stetigen Fluss von der Oberfläche AB zur Oberfläche CD fließend, aber dennoch den Verlauf der Zeit ununterbrochen unverändert betrachten, sodass dann auch das Momentum der Zeit anzugeben ist, in welchem eine gewisse Ader des Flusses, sich von der Oberfläche AB zur Oberfläche CD bewegend, mit einer gewissen Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehen ist. Wenn wir zu diesen Variablen darüber hinaus die Veränderlichkeit der Geschwindigkeit hinzufügen, werden diese zum Illustrieren einer größeren Anzahl der Variationen dienen können. Besonders wird aber daher eingesehen, auch wenn alle Variablen durch eine einzige bestimmt zu werden angenommen werden, dass die Art der Untersuchung dennoch von der, wo nur zwei Variablen zugelassen werden, in höchstem Maße abweicht, deshalb weil den einen ihre von den übrigen nicht abhängenden Variationen zugeteilt werden müssen; denn daher sind auch nicht, was zwischen der Variablen selbst als eine gewisse Relation erkannt wird, deren Variationen einer Relation unterworfen anzusehen; wie beispielsweise aus dem zuvor erwähnten Fall klar ist, wo die Kurve, sich zwischen den zwei Oberflächen AB und CD ausbreitend und mit einer gewissen Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehen natürlich in sich bestimmt ist, sodass nach Annahme einer der Koordinaten die zwei übrigen bestimmt werden; nichtsdestoweniger erhalten alle variierten Kurven, die sich in alle Richtungen von jener entfernen können, für die einzelnen Koordinaten keineswegs voneinander abhängende Variationen, nachdem allein der Anfang und das Ende davon ausgeschlossen wurde, wo sie auch an gegebene Oberflächen angepasst werden müssen.

Definition 4

§20 *Eine Relation zwischen drei Variablen, mit einer einzigen Gleichung bestimmt, eine derer einer Funktion der zwei übrigen gleich wird, wird gesagt variiert zu werden, wenn entweder eine oder zwei oder gar alle drei jene Variablen um unendlich kleine Stücke vermehrt werden, die deren Variationen genannt werden.*

Erläuterung

§21 Weil ja hier eine Variation zwischen drei Variablen mit einer einzigen Gleichung bestimmt zu werden festgelegt wird, wird erst nach Annahme zweier nach Belieben die dritte bestimmt werden, sodass sie für eine Funktion von zwei Variablen zu halten ist. Mit dieser Relation wird also nicht eine gewisse gekrümmte Linie, wenn wir die Sache auf Figuren übertragen wollen, beschrieben, sondern eine ganz bestimmte Oberfläche, deren Natur mit einer Gleichung zwischen drei verschiedenen Koordinaten ausgedrückt wird; daher wird eingesehen, dass nach Variieren derselben Relation, eine andere von jener unendlich wenig abweichende Oberfläche dargestellt wird, welche Variation sich so sehr weit erstrecken muss, dass die Variation entweder nur auf einen gewissen Anteil der Oberfläche beschränkt wird oder durch die ganze hindurch erstreckt werden kann. Je nachdem mit welchem Punkt der gegebenen Oberfläche also ein anderer jener anderen variierten Oberfläche freilich sehr naher Punkt verglichen wird, kann es geschehen, dass von den drei Koordinaten nicht nur eine, sondern auch zwei oder gar alle drei variiert werden; daher, damit die Behandlung in ihrer ganzen Weite illustriert wird, wird es gefällig sein, dass den einzelnen Koordinaten sofort ihre Variationen zugeteilt werden, welche deshalb so beschaffen sein müssen, dass sie als Funktionen von zwei Variablen betrachtet werden können, weil erst nach der Bestimmung von zweien ein Punkt der Oberfläche bestimmt wird.

Korollar 1

§22 Wenn also die drei Variablen oder die drei Koordinaten x, y und z sind, wie sich aus der Relation den zweien x und y nach Belieben zuteilen lassen, woher dann auch z einen bestimmten Wert erhält, so ist die Variation von z von jeden der beiden jener x und y abzuhängen anzusehen, weil ja, ob die eine der beiden oder beide verändert werden, eine andere Variation von z resultieren muss.

Korollar 2

§23 Was hier über die Variation der einen Variable z bemerkt wurde, ist genauso über die zwei übrigen zu verstehen, sodass die Variationen der einzelnen als Funktionen von zwei Variablen anzusehen sind; weil ja aber zwischen x und y und z eine Gleichung gegeben ist, ist es egal, von welchen zweien die besagten Funktionen aufgefasst werden, weil die Funktion von y und z durch die Gleichung auf eine Funktion von x und y zurückgeführt werden kann, wenn natürlich anstelle von z sein durch x und y ausgedrückter Wert eingesetzt wird.

Bemerkung 1

§24 Diese Festlegung der Variationen wird zu gebrauchen sein, wenn eine Oberfläche zu finden war, die mit einer gewissen Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehen ist, weil ja die Rechnung so bereitet werden muss, dass dieselbe Eigenschaft allen jener sehr nahen und variierten Oberfläche gleichermaßen zufällt. Weil des Weiteren in mit der Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehenen Kurven das Verhältnis der beiden Grenzen vorgeschrieben zu werden pflegt, dass sie entweder in gegebenen Punkten oder zu gegebenen gekrümmten Linien oder gar Oberflächen hin begrenzt werden, ist hier eine ähnliche Bedingung zuzulassen, dass die zu suchende Oberfläche überall bestimmt wird oder von einer gewissen gegebenen Oberfläche begrenzt wird; damit diesen letzten Bedingungen Rechnung getragen werden kann, ist es ganz und gar notwendig, dass allen drei Koordinaten allgemeinste voneinander in keinster Weise abhängende Variationen zugeteilt werden, damit sie darauf an äußerster Stelle an die Natur der begrenzenden Oberfläche angepasst werden können. Hier ist freilich zu gestehen, dass die Methode der Maxima und Minima bis jetzt kaum zu Untersuchungen dieser Art vorwärts bewegt wurde und große Schwierigkeiten auftauchen, um welche zu überkommen, um vieles größere Zuwächse der Analysis verlangt zu werden scheinen. Aber dieses Grundes wegen wird sich umso mehr zu bemühen sein, dass die Grundlagen dieser Methode, die im Variationskalkül enthalten sind, streng aufgestellt werden und zugleich klar und deutlich vorgelegt werden.

Bemerkung 2

§25 Ich halte es kaum von Nöten hier anzumerken, dass dieses Kalkül auf gleiche Weise auf mehr als drei Variablen ausgedehnt werden kann, auch wenn geometrische Fragen nicht weiter eine Erklärung liefern; denn die Analysis selbst ist nicht wie die Geometrie durch eine gewisse Anzahl an Dimensionen begrenzt zu werden anzusehen. Wann immer aber mehrere Variablen betrachtet werden, sollte vor allem erwägt werden, ob deren gegenseitige Relation mit nur einer einzigen Gleichung oder mit mehreren ausgedrückt wird; diese können so viele sein, die der Menge nur um die Einheit von der Anzahl der Variablen abweicht, in welchem Fall sich alle als Funktionen einer Variablen betrachten lassen. Wenn aber die Relation aus weniger Gleichungen besteht, werden die einzelnen Variablen Funktionen zweier oder mehrerer sein und in einem beliebigen Fall müssen auch die den einzelnen zugeteilten Variationen als Funktionen genauso vieler Variablen betrachtet werden, wenn wir freilich diese Rechnung sehr allgemein erledigen wollen.

Definition 5

§26 *Das Variationskalkül ist die Methode die Variation zu finden, welche ein aus wie vielen Variablen wie auch immer zusammengesetzter Ausdruck erhält, während den Variablen, entweder allen oder einigen, Variationen zugeteilt werden.*

Erläuterung

§27 In dieser Definition geschieht keine Erwähnung der Relation, welche wir bisher zwischen den Variablen gegeben zu sein angenommen haben; weil nämlich dieses Kalkül hauptsächlich im Finden dieser Relation selbst gelegen ist, die natürlich mit der Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehen sein soll, lässt sich ihr im Kalkül keinesfalls Rechnung tragen, sondern es muss eher so behandelt werden, als wenn die Variablen mit keiner Relation miteinander verbunden wären. Dieses Kalkül muss also so aufgebaut werden, dass, wenn den einzelnen Variablen, die in die Rechnung eingehen, irgendwelche Variationen zugeteilt werden, die daher abstammenden Variationen Ausdrücke jeder Art, die irgendwie aus diesen zusammengesetzt wurden, gefunden zu werden gelehrt werden; nachdem diese im Allgemeinen gefunden wurden, tauchen erst dann zu entwickelnde Fragen solcher Art auf, was für eine Relation zwischen den Variablen festgelegt werden muss, dass jene gefundene Variation entweder keine ist, wie es bei der Untersuchung der Maxima und Minima passiert, oder auf eine andere gewisse Art beschaffen ist, je nachdem was die Natur der Fragen verlangt. Wenn auf diese Weise die Vorschriften des Kalküls angegeben werden, steht nichts im Wege, dass auch Fragen solcher Art behandelt werden, in denen sofort eine gewisse Relation zwischen den Variablen als gegeben angenommen wird und die aus den Variationen der Variablen entstandene Variation eines gewissen aus ihnen gebildeten Ausdruckes verlangt wird. Daher wird eingesehen, dass dieses Kalkül auf sehr viele Fragen verschiedenster Art angewendet werden kann.

Korollar 1

§28 In diesem Kalkül zu behandelnde Fragen gehen also darauf zurück, dass nach Vorlegen irgendeines aus wie vielen Variablen auch immer irgendwie zusammengesetzten Ausdruckes sein Zuwachs bestimmt wird, wenn die einzelnen Variablen um ihre Variationen vermehrt werden.

Korollar 2

§29 Das Variationskalkül ist dem Differentialkalkül vollkommen ähnlich, während in jedem von beiden den Variablen unendlich kleine Zuwächse zugeteilt werden. Wie aber, wie wir schon bemerkt haben [§3, 4], die Variationen von Differentiationen abweichen und daher zugleich mit ihnen bestehen können, so ist der größte Unterschied zwischen jedem der beiden Kalküle dennoch anzuerkennen.

Bemerkung

§30 Aus den oben erwähnten Bemerkungen wird dieser Unterschied besonders klar; sobald nämlich das Kalkül auf eine gekrümmte Linie übertragen wird, die mit einer anderen ihr sehr nahen verglichen werden muss, schreiten wir durch die Differentiale hindurch von einem Punkt der Kurve aus zu anderen Punkten derselben Kurve fort; wann immer aber wir von dieser Kurve zu einer anderen ihr sehr nahen hinüber springen, geschieht der Übergang, sofern er unendlich klein ist, durch Variationen. Dasselbe geschieht bei auf anderen ihr sehr nahe bezogenen Oberflächen, wo die Differentiale in derselben Oberfläche aufgefasst werden, bei den Variationen hingegen von der einen zu einer anderen hinüber gesprungen wird. Die Begründung ist ganz und gar dieselbe, wenn die Sache analytisch betrachtet wird, ohne Beachtung auf die geometrische Figuren, wo immer die Variationen variabler Größen von ihren Differentialen sorgsam unterschieden werden müssen, für welches Ziel es gefällig sein wird, dass die Variationen mit einem verschiedenen Symbol gekennzeichnet werden.

Annahme

§31 *Wir werden im Nachfolgenden die Variation einer gewissen variablen Größe mit dem derselben Größe vorangestellten Buchstaben δ bezeichnen, sodass δx, δy, δz die Variationen der Größen x, y, z bezeichnen, und wenn V irgendein aus ihnen* *zusammengesetzter Ausdruck war, wird seine Variation von uns auf diese Weise δV gekennzeichnet werden.*

KOROLLAR 1

§32 Es bezeichnet also δx jenen unendlich kleinen Zuwachs, um welchen die Größe x vermehrt zu werden aufgefasst wird, sodass der variierte Wert desselben hervorgeht, aus welchem umgekehrt eingesehen wird, dass $x + \delta x$ der variierte Wert von x sein wird.

KOROLLAR 2

§33 Sofern also der Ausdruck V aus den Variablen x, y und z zusammengesetzt ist, wenn an deren Stelle die variierten Werte $x + \delta x$, $y + \delta y$ und $z + \delta z$ geschrieben werden und vom auf diese Weise für V resultierenden Wert V selbst subtrahiert wird, wird der Rest die Variation δV sein.

KOROLLAR 3

§34 Bisher verhält sich also alles genauso wie im Differentialkalkül, und wenn V irgendeine Funktion von x, y und z war, werde, nachdem ihre Differentiale auf gewohnte Weise genommen wurde, nur δ anstelle von d geschrieben und man wird ihre Variation δV haben.

BEMERKUNG 1

§35 Sooft also V irgendeine Funktion der variablen Größen x, y, z ist, wird ihre Variation daher nach denselben Regeln gefunden wie ihr Differential, woher das Variationskalkül vollkommen mit dem Differentialkalkül übereinstimmend erscheinen könnte, weil die Verschiedenheit des Zeichens von allzu geringer Bedeutung ist. Aber es ist genau darauf zu achten, dass hier nicht alle Größen, deren Variationen verlangt wurden, im Geschlecht der Funktionen erfasst werden können; deswegen habe ich auch in der Definition [§26] das Wort *Ausdruck* benutzt, welchem ich eine weit umfassendere Bedeutung attestiere. Wie sich nämlich nicht auf die gegenseitige Relation der Variablen blicken lässt, weil sie unbekannt ist, so werden Ausdrücke solcher Art oder Formeln, in welchen Differentiale der Variablen und auch Integrale eingehen, nicht weiter lediglich als Funktionen von Variablen betrachtet werden können und die Variation von Formeln, sowohl von Differentialen als auch von Integralen, erfordert spezielle Vorschriften; und so geht die ganze Aufgabe darauf zurück, dass wir lehren, wie die Variationen von Formeln jeder der beiden Arten gefunden werden muss, woher unser Traktat zweiteilig wird.

Bemerkung 2

§36 Aber im Traktat selbst entsteht der größte Unterschied aus der Anzahl der Variablen, wenn welche die zwei übersteigen, kaum erkannt wird, wie dieses Kalkül zu erledigen ist. Weil nämlich nach Einführen mehrerer Variablen auch die Betrachtung der Differentiale weit anders ausgedehnt wird, während meistens Differentiale von nur zwei Variablen so miteinander verglichen zu werden pflegen, als wenn die übrigen Variablen konstant blieben, wird auch bei den Variationen eine ähnliche Methode zu verwenden sein, wobei immer noch so große Schwierigkeiten auftauchen, dass es kaum klar ist, wie sie sich überkommen lassen; vor allem aber wird es gewiss nötig sein, dass die ersten Grundlagen dieses Kalküls entwickelt werden, sodass aus der tiefen Natur der Sache die Vorschriften des Kalküls hergeholt werden, worin meistens die größten Schwierigkeiten aufgefunden zu werden pflegen. Zuerst also werde ich versuchen dieses Kalkül auf nur zwei Variablen angewandt, wie es freilich bis jetzt behandelt zu werden pflegte, zu erklären, der ich dabei die Variationen von Differential- wie Integralformeln finden werde; dann aber, wenn etwas Licht aus dieser Behandlung selbst auf die Sache geworfen wurde, werde ich auch dazu fortschreiten, drei oder mehrere Variablen zu betrachten.