Kapitel 4
Über die Variation zwei Variablen involvierender zusammengesetzter Integralformeln

Leonhard Euler

Problem 8

§105 *Wenn nach Setzen von $v = \int \mathfrak{V} \mathrm{d}x$, während $\mathfrak{V}$ irgendeine Funktion der zwei Variablen x, y und deren Differentialen*

$$\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}p = q\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}q = r\mathrm{d}x \quad \textit{etc.}$$

ist, V irgendeine Funktion von v bezeichnet, die Variation der zusammengesetzten Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ zu finden.

Lösung

Weil die Größe v selbst eine Integralformel $\int \mathfrak{V}\mathrm{d}x$ ist, ist die Formel $\int V\mathrm{d}x$ natürlich zusammengesetzt. Weil also die Funktion V allein die Größe v zu involvieren festgelegt wird, wollen wir $\mathrm{d}V = L\mathrm{d}v$ setzen; dann aber wird für die Funktion $\mathfrak{V}$ ihr Differential sein

$$\mathrm{d}\mathfrak{V} = \mathfrak{M}\mathrm{d}x + \mathfrak{N}\mathrm{d}y + \mathfrak{P}\mathrm{d}p + \mathfrak{Q}\mathrm{d}q + \mathfrak{R}\mathrm{d}r + \text{etc.}$$

Weil nach Festlegen dieser die gesuchte Variation

$$\delta \int V\mathrm{d}x = \int \delta(V\mathrm{d}x) = \int (\delta V\mathrm{d}x + V\mathrm{d}\delta x)$$

ist, ist durch die oben [§77] verwendete Reduktion

$$\delta\int V\mathrm{d}x = V\delta x + \int\left(\mathrm{d}x\delta V - \mathrm{d}V\delta x\right).$$

Weil aber per Annahme $\mathrm{d}V = L\mathrm{d}v$ ist, wird für die Variation $\delta V = L\delta v$ sein; aber wegen $v = \int \mathfrak{V}\mathrm{d}x$ wird zuerst $\mathrm{d}v = \mathfrak{V}\mathrm{d}x$ und daher $\mathrm{d}V = L\mathfrak{V}\mathrm{d}x$ sein, dann aber

$$\delta v = \delta\int \mathfrak{V}\mathrm{d}x = \mathfrak{V}\delta x + \int(\mathrm{d}x\delta\mathfrak{V} - \mathrm{d}\mathfrak{V}\delta x)$$

und darum

$$\delta V = L\mathfrak{V}\delta x + L\int(\mathrm{d}x\delta\mathfrak{V} - \mathrm{d}\mathfrak{V}\delta x),$$

und daher

$$\delta\int V\mathrm{d}x = V\delta x + \int\left(L\mathfrak{V}\mathrm{d}x\delta x + L\mathrm{d}x\int(\mathrm{d}x\delta\mathfrak{V} - \mathrm{d}\mathfrak{V}\delta x) - L\mathfrak{V}\mathrm{d}x\delta x\right)$$

oder

$$\delta\int V\mathrm{d}x = V\delta x + \int L\mathrm{d}x\int\left(\mathrm{d}x\delta\mathfrak{V} - \mathrm{d}\mathfrak{V}\delta x\right).$$

Aus dem vorhergehenden Kapitel [§86] ist aber klar, dass gilt

$$\begin{aligned}
&\int(\mathrm{d}x\delta\mathfrak{V} - \mathrm{d}\mathfrak{V}\delta x) = \delta\int\mathfrak{V}\mathrm{d}x - \mathfrak{V}\delta x\\
=&\int w\mathrm{d}x\left(\mathfrak{N} - \frac{\mathrm{d}\mathfrak{P}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}^4S}{\mathrm{d}x^4} - \text{etc.}\right)\\
&+ w\left(\mathfrak{P} - \frac{\mathrm{d}\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right)\\
&+ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\left(\mathfrak{Q} - \frac{\mathrm{d}\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.}\right)\\
&+ \frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}\left(\mathfrak{R} - \frac{\mathrm{d}\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}\right)\\
&+ \text{etc.}
\end{aligned}$$

nachdem das Element $\mathrm{d}x$ konstant angenommen wurde und der Kürze wegen daher $w = \delta y - p\delta x$ gesetzt wurde.

Aber weil daher die Substitution nur Mühe verursacht, wird es besser sein, die Sache aus der ersten Quelle herzuholen. Weil also aus dem Differential und der Variation der Größe $\mathfrak{V}$ wird

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x\delta\mathfrak{V} - \mathrm{d}\mathfrak{V}\delta x =&\mathrm{d}x\left(\mathfrak{M}\delta x + \mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.}\right)\\
&-\delta x\left(\mathfrak{M}\mathrm{d}x + \mathfrak{N}\mathrm{d}y + \mathfrak{P}\mathrm{d}p + \mathfrak{Q}\mathrm{d}q + \mathfrak{R}\mathrm{d}r + \text{etc.}\right),
\end{aligned}$$

wird wegen

$$\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}p = q\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}q = r\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}r = s\mathrm{d}x \quad \text{etc.}$$

dann sein

$$\mathrm{d}x\delta\mathfrak{B} - \mathrm{d}\mathfrak{B}\delta x = \mathfrak{N}\mathrm{d}x\,(\delta y - p\delta x) + \mathfrak{P}\mathrm{d}x\,(\delta p - q\delta x) + \mathfrak{Q}\mathrm{d}x\,(\delta q - r\delta x) + \text{etc.}$$

Aber wegen des konstanten dx aus §79 wird sein

$$\delta y - p\delta x = w, \;\; \delta p - q\delta x = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}, \;\; \delta q - r\delta x = \frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}, \;\; \delta r - s\delta x = \frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3}, \;\; \text{etc.},$$

und so wird man haben

$$\mathrm{d}x\delta\mathfrak{B} - \mathrm{d}\mathfrak{B}\delta x = \mathfrak{N}w\mathrm{d}x + \mathfrak{P}\mathrm{d}w + \mathfrak{Q}\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x} + \mathfrak{R}\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^2} + \mathfrak{S}\frac{\mathrm{d}^4w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.},$$

dessen Integral freilich den oberen Ausdruck liefert. Es werde nun das Integral $\int L\mathrm{d}x = I$ gesetzt und es wird sein

$$\delta\int V\mathrm{d}x = V\delta x + I\int(\mathrm{d}x\delta\mathfrak{B} - \mathrm{d}\mathfrak{B}\delta x) - \int I\,(\mathrm{d}x\delta\mathfrak{B} - \mathrm{d}\mathfrak{B}\delta x)\,.$$

Nun wird aber leicht [§81-85] berechnet, dass gelten wird

$$\begin{aligned}\int I\,(\mathrm{d}x\delta\mathfrak{B} - \mathrm{d}\mathfrak{B}\delta x) = \int w\mathrm{d}x\left(I\mathfrak{N} - \frac{\mathrm{d}.I\mathfrak{P}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}.I\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3.I\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right)\\ + w\left(I\mathfrak{P} - \frac{\mathrm{d}.I\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}.I\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x^2} + \text{etc.}\right)\\ + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\left(I\mathfrak{Q} - \frac{\mathrm{d}.I\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}\right)\\ + \text{etc.,}\end{aligned}$$

woher nach der Substitution die gesuchte Variation gefolgert wird

$$\begin{aligned}
\delta \int V \mathrm{d}x = V\delta x + I \int w \mathrm{d}x \left(\mathfrak{N} - \frac{\mathrm{d}\mathfrak{P}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right) \\
- \int w \mathrm{d}x \left(I\mathfrak{N} - \frac{\mathrm{d}.I\mathfrak{P}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}.I\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3.I\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right) \\
+ Iw \left(\mathfrak{P} - \frac{\mathrm{d}\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right) \\
- w \left(I\mathfrak{P} - \frac{\mathrm{d}.I\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}.I\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3.I\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right) \\
- \frac{I\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \left(\mathfrak{Q} - \frac{\mathrm{d}\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.} \right) \\
- \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \left(I\mathfrak{Q} - \frac{\mathrm{d}.I\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}.I\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.} \right) \\
+ \frac{I\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} \left(\mathfrak{R} - \frac{\mathrm{d}\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x} + \text{etc.} \right) \\
- \frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} \left(I\mathfrak{R} - \frac{\mathrm{d}.I\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x} + \text{etc.} \right) \\
+ \frac{I\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} (\mathfrak{S} - \text{etc.}) \\
- \frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} (I\mathfrak{S} - \text{etc.}) \\
+ \text{etc.}
\end{aligned}$$

Wenn hier die zwei ersten differentierten Teil wiederum integriert werden, werden wir nach Reduktion der Übrigen, indem wir anstelle von dI wieder den Wert $L\mathrm{d}x$ einsetzen, erhalten

$$\begin{aligned}\delta\int V\mathrm{d}x = V\delta x &+ \int L\mathrm{d}x \int w\mathrm{d}x\left(\mathfrak{N} - \frac{\mathrm{d}\mathfrak{P}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right)\\
&+ \int w\mathrm{d}x\left(L\mathfrak{P} - \frac{L\mathrm{d}\mathfrak{Q} + \mathrm{d}.L\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x} + \frac{L\mathrm{dd}\mathfrak{R} + \mathrm{d}.L\mathrm{d}\mathfrak{R} + \mathrm{dd}.L\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.}\right)\\
&+ w\left(L\mathfrak{Q} - \frac{L\mathrm{d}\mathfrak{R} + \mathrm{d}.L\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x} + \frac{L\mathrm{dd}\mathfrak{S} + \mathrm{d}.L\mathrm{d}\mathfrak{S} + \mathrm{dd}.L\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.}\right)\\
&+ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\left(L\mathfrak{R} - \frac{L\mathrm{d}\mathfrak{S} + \mathrm{d}.L\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}\right)\\
&+ \frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}\left(L\mathfrak{S} - \text{etc.}\right)\\
&+ \text{etc.},\end{aligned}$$

welche Form die einfachste und zum Gebrauch am meisten geeignetste zu sein scheint.

KOROLLAR 1

§106 Wenn eine Relation solcher Art zwischen x und y gesucht wird, dass das Integral $\int V\mathrm{d}x$ ein Maximum oder Minimum wird, müssen die Integralanteile der Variation gleich Null werden; dies kann im Allgemeinen nicht geschehen, sondern es muss auf die Grenze, bis wohin auch das Integral $\int V\mathrm{d}x$ erstreckt wird, geachtet werden; wenn wir für diese festlegen, dass $I = \int L\mathrm{d}x = A$ wird, folgern wir aus der ersten Form diese Gleichung

$$0 = (A-I)\mathfrak{N} - \frac{\mathrm{d}.(A-I)\mathfrak{P}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}.(A-I)\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3.(A-I)\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}$$

KOROLLAR 2

§107 Wie auch immer aber diese Gleichung für jeden sich ergebenden Fall behandelt wird, es ist immer schließlich dorthin zu gelangen, dass die Integralformel $I = \int L\mathrm{d}x$ durch Differentiation beiseite geschafft wird, mit welcher Operation zugleich die Größe A herausgestoßen zu werden ersichtlich ist; und so wird die resultierende Gleichung nicht weiter von der Integrationsgrenze abhängen.

Korollar 3

§108 Wenn wir daher im Allgemeinen für die zu findende Variation der Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ den dem ganzen Integral $\int L\mathrm{d}x = I$ entsprechenden Wert gleich A setzen, wird die gesuchte Variation so ausgedrückt werden

$$\begin{aligned}
&\delta \int V\mathrm{d}x = V\delta x \\
&+ \int w\mathrm{d}x \left((A-I)\mathfrak{N} - \frac{\mathrm{d}.(A-I)\mathfrak{P}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}.(A-I)\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3.(A-I)\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right) \\
&+ w \left(L\mathfrak{Q} - \frac{L\mathrm{d}\mathfrak{R} + \mathrm{d}.L\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x} + \frac{L\mathrm{dd}\mathfrak{S} + \mathrm{d}.L\mathrm{d}\mathfrak{S} + \mathrm{dd}.L\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.} \right) \\
&+ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \left(L\mathfrak{R} - \frac{L\mathrm{d}\mathfrak{S} + \mathrm{d}.L\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x} + \text{etc.} \right) \\
&+ \frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} \left(L\mathfrak{S} - \text{etc.} \right) \\
&+ \text{etc.},
\end{aligned}$$

wo $A - I$ der Wert der Integralformel $\int L\mathrm{d}x$ ist, der von der äußersten Integrationsgrenze aus bis hinzu einen gewissen Mittelpunkt in rückwärtiger Richtung genommen wurde.

Bemerkung

§109 In der Lösung dieses Problems offenbart sich eine Abkürzung, mit welcher auch die im oberen Kapitel verwendete Analysis nicht unwesentlich zusammengezogen werden kann. Weil wir nämlich dort [§79] zu dieser Formel gelangt waren

$$\delta \int V\mathrm{d}x = V\delta x + \int \left(\mathrm{d}x\delta V - \mathrm{d}V\delta x\right),$$

wird wegen

$$\mathrm{d}V = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + \text{etc.}$$

und

$$\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}$$

sein

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\left(M + Np + Pq + Qr + Rs + \text{etc.}\right),$$

und daher wird gefolgert

$$\mathrm{d}x\delta V - \mathrm{d}V\delta x = \mathrm{d}x\left(N(\delta y - p\delta x) + P(\delta p - q\delta x) + Q(\delta q - r\delta x) + \text{etc.}\right).$$

Wenn nun der Kürze wegen $\delta y - p\delta x = w$ gesetzt wird, wird durch Differentieren sein

$$\delta(p\mathrm{d}x) - q\mathrm{d}x\delta x - p\delta\mathrm{d}x = \mathrm{d}w;$$

aber es ist

$$\delta(p\mathrm{d}x) = p\mathrm{d}\delta x + \delta p\mathrm{d}x,$$

also

$$\delta p - q\delta x = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}.$$

Auf die gleiche Weise wird, indem diese Formel differentiert wird, wegen $\mathrm{d}p = q\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}q = r\mathrm{d}x$ sein

$$q\mathrm{d}\delta x + \delta q\mathrm{d}x - q\mathrm{d}\delta x - \mathrm{d}q\delta x = \mathrm{d}x(\delta q - r\delta x) = \mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x},$$

woher klar ist, dass für $\delta y - p\delta x = w$ gesetzt sein wird

$$\delta p - q\delta x = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}, \quad \delta q - r\delta x = \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\cdot\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}$$

und für konstant genommenes $\mathrm{d}x$

$$\delta r - s\delta x = \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3}$$

etc.

Deshalb wird sein

$$\mathrm{d}x\delta V - \mathrm{d}V\delta x = \mathrm{d}x\left(Nw + \frac{P\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{Q\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{R\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} + \frac{S\mathrm{d}^4w}{\mathrm{d}x^4} + \text{etc.}\right),$$

wenn freilich das Differential $\mathrm{d}x$ konstant angenommen wird.

PROBLEM 9

§110 *Wenn $v = \int \mathfrak{B}\mathrm{d}x$ war, während gilt*

$$\mathrm{d}\mathfrak{B} = \mathfrak{M}\mathrm{d}x + \mathfrak{N}\mathrm{d}y + \mathfrak{P}\mathrm{d}p + \mathfrak{Q}\mathrm{d}q + \mathfrak{R}\mathrm{d}r + etc.,$$

dann aber V irgendeine Funktion nicht nur der Größen

$$x, \quad y, \quad p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad q = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \quad r = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x} \quad etc.$$

ist, sondern auch die Integralformel $v = \int \mathfrak{B}\mathrm{d}x$ verwickelt, die Variation der zusammengesetzten Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ zu finden.

LÖSUNG

Weil ja V eine Funktion der Größen v, x, y, p, q, r, s etc. ist, werde ihr Differential genommen, das dieses sei

$$\mathrm{d}V = L\mathrm{d}v + M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + \text{etc.},$$

und man wird die Variation von V so ausgedrückt haben

$$\delta V = L\delta v + M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.};$$

dann werde aber bemerkt, dass wegen

$$\mathrm{d}v = \mathfrak{B}\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}y = p\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}p = q\mathrm{d}x \quad \text{etc.}$$

auch gilt

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,(L\mathfrak{B} + M + Np + Pp + Qr + Rs + \text{etc.})$$

und

$$\delta\mathfrak{B} = \mathfrak{M}\delta x + \mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.}$$

Außerdem haben wir

$$\delta v = \int (\mathfrak{B}\mathrm{d}\delta x + \mathrm{d}x\delta\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}\delta x + \int (\mathrm{d}x\delta\mathfrak{B} - \mathrm{d}\mathfrak{B}\delta x)\,,$$

woher nach Setzen von $\delta y - p\delta x = w$ durch das zuvor Gefundene sein wird

$$\mathrm{d}v = \mathfrak{B}\delta x + \int \mathrm{d}x \left(\mathfrak{N}w + \frac{\mathfrak{P}\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathfrak{Q}\mathrm{d}\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathfrak{R}\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right),$$

wo wir zur Gefälligkeit also $\mathrm{d}x$ konstant angenommen haben.

Nach Vorbereiten dieser Dinge, da die gesuchte Variation ist

$$\delta \int V\mathrm{d}x = V\delta x + \int (\mathrm{d}x\delta V - \mathrm{d}V\delta x)\,,$$

damit wir die oben gefundene Reduktion gebrauchen können, wollen wir festlegen

$$\mathrm{d}V = L\mathrm{d}v + \mathrm{d}W,$$

sodass gilt

$$\delta V = L\delta v + \delta W \quad \text{und} \quad \mathrm{d}W = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + \text{etc.}$$

Deswegen werden wir diese Form erhalten

$$\delta \int V\mathrm{d}x = V\delta x + \int (L\mathrm{d}x\delta v - L\mathrm{d}v\delta x) + \int (\mathrm{d}x\delta W - \mathrm{d}W\delta x)\,,$$

wo ist

$$\mathrm{d}x\delta W - \mathrm{d}W\delta x = \mathrm{d}x\left(Nw + \frac{P\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{Q\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{R\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right).$$

Dann aber ist

$$\mathrm{d}x\delta v - \mathrm{d}v\delta x = \mathrm{d}x \int \mathrm{d}x \left(\mathfrak{N}w + \frac{\mathfrak{P}\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathfrak{Q}\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathfrak{R}\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right)$$

wegen $\mathrm{d}v\delta x = \mathfrak{B}\mathrm{d}x\delta x$. Nach Einsetzen dieser wird die gesuchte Variation berechnet

$$\begin{aligned}\delta \int V\mathrm{d}x = V\delta x + \int L\mathrm{d}x \int \mathrm{d}x \left(\mathfrak{N}w + \frac{\mathfrak{P}\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathfrak{Q}\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathfrak{R}\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right)\\ + \int \mathrm{d}x \left(N + \frac{P\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{Q\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{R\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right).\end{aligned}$$

Damit wir nun diese Form weiter reduzieren, wollen wir das Integral $\int L\mathrm{d}x = I$ so genommen festlegen, dass es für den Anfang, von wo aus das Integral $\int V\mathrm{d}x$ genommen wird, verschwindet, für das Ende, wo das Integral $\int V\mathrm{d}x$

begrenzt wird, $I = A$ wird; und so wird werden

$$\delta \int V\mathrm{d}x = V\delta x + A \int \mathrm{d}x \left(\mathfrak{N}w + \frac{\mathfrak{P}\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathfrak{Q}\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathfrak{R}\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right)$$
$$- \int I\mathrm{d}x \left(\mathfrak{N}w + \frac{\mathfrak{P}\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathfrak{Q}\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathfrak{R}\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right)$$
$$+ \int \mathrm{d}x \left(Nw + \frac{P\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{Q\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{R\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right),$$

um welche Form zusammenzuziehen wir festlegen wollen

$$\begin{aligned} N + (A-I)\mathfrak{N} &= N', \\ P + (A-I)\mathfrak{P} &= P', \\ Q + (A-I)\mathfrak{Q} &= Q', \\ R + (A-I)\mathfrak{R} &= R' \\ \text{etc.}, \end{aligned}$$

dass die Form jener, die wir oben [§79-85] behandelt haben, ähnlich hervorgeht

$$\delta \int V\mathrm{d}x = V\delta x + \int \mathrm{d}x \left(N'w + \frac{P'\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{Q'\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{R'\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right);$$

wenn also dort hinter dem Integralzeichen die Differentiale von w eliminiert werden, werden wir gemäß §86 zu diesem Ausdruck gelangen

$$\begin{aligned} \delta \int V\mathrm{d}x = {} & \int w\mathrm{d}x \left(N' - \frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}Q'}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3R'}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}^4S'}{\mathrm{d}x^4} - \text{etc.} \right) \\ & + \quad V\delta x \quad + w \left(P' - \frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}R'}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3S'}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right) \\ & + \text{Konst.} \quad + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \left(Q' - \frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}S'}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.} \right) \\ & \qquad + \frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} \left(R' - \frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x} + \text{etc.} \right) \\ & \qquad + \frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} \left(S' - \text{etc.} \right) \\ & \qquad + \text{etc.} \end{aligned}$$

Der durch Integration eingeführten Konstante muss aber ein Wert solcher Art zugeteilt werden, dass für den Anfang der Integration die absoluten Teile der

Formel $\delta \int V \mathrm{d}x$ auf Null gebracht werden, wenn freilich der erste Integralteil so genommen wird, dass er für denselben Anfang verschwindet; dann aber muss der ganze Ausdruck zur Grenze der Integration hin fortgeführt werden, für die wir ja $\int L \mathrm{d}x = I = A$ zu werden festgelegt haben.

KOROLLAR 1

§111 Im Integralanteil muss die Variabilität durch die ganze Erstreckung der Integration hindurch erfasst werden, in den absoluten Teilen genügt es aber, auf den Anfang und das Ende der Integration geachtet zu haben, für jede der beiden Grenzen liefern aber die vorgeschrieben Bedingungen der Variation die Werte δx, w, $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}$ etc. Und nachdem aus den Anfangsbedingungen die Konstante in entsprechender Weise bestimmt worden ist, ist dann nur übrig, dass die einzelnen Glieder an das Ende der Integration angepasst werden.

KOROLLAR 2

§112 Für den Anfang der Integration, wo $I = 0$ ist, wird zuerst sein

$$N' = N + A\mathfrak{N}, \quad P' = P + A\mathfrak{P}, \quad Q' = Q + A\mathfrak{Q}, \quad R' = R + A\mathfrak{R} \quad \text{etc.},$$

für die Differentiale wird aber wegen $\mathrm{d}I = L\mathrm{d}x$ gelten

$$\frac{\mathrm{d}N'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} + \frac{A\mathrm{d}\mathfrak{N}}{\mathrm{d}x} - L\mathfrak{N}$$

und so von den übrigen und auf gleiche Weise für die zweiten Differentiale

$$\frac{\mathrm{dd}N'}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{dd}N}{\mathrm{d}x^2} + \frac{A\mathrm{dd}\mathfrak{N}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{2L\mathrm{d}\mathfrak{N}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathfrak{N}\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}.$$

KOROLLAR 3

§113 Für das Ende der Integration aber, wo $I = A$ ist, wird sein

$$N' = N, \quad P' = P, \quad Q' = Q, \quad R' = R \quad \text{etc.},$$

die Differentialwerte werden sich aber so verhalten

$$\frac{\mathrm{d}N'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} - L\mathfrak{N}, \quad \frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} - L\mathfrak{P}, \quad \frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} - L\mathfrak{Q} \quad \text{etc.},$$

die zweiten Grades aber auf diese Weise

$$\frac{\mathrm{dd}N'}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{dd}N}{\mathrm{d}x^2} - \frac{2L\mathrm{d}\mathfrak{N}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathfrak{N}\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x},$$
$$\frac{\mathrm{dd}P'}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{dd}P}{\mathrm{d}x^2} - \frac{2L\mathrm{d}\mathfrak{P}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathfrak{P}\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}$$

und so weiter.

Bemerkung 1

§114 Obwohl die Natur der Variationen und auch der sich dorthin erstreckenden Fragen schon zu Genüge erläutert worden ist, scheinen dennoch so die Schwierigkeit wie die Neuheit dieses Gegenstandes eine weitere Illustration zu verlangen, weil es nicht einmal überflüssig wäre, dass dasselbe öfter erwähnt wird. Weil wir also schon zuvor die Geometrie und die Anwendung dieses Kalküls auf die Maxima und Minima gebraucht haben, werden wir, um diese Lehre noch mehr zu erläutern, die Sache hier allgemeiner für die Analysis allein betrachten.

Zuerst wird also irgendeine Relation zwischen den zwei Variablen x und y aufgefasst, ob sie bekannt ist oder erst zu bestimmen ist, und daraus gebildet wird dann irgendeine Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ betrachtet, die innerhalb gewisser Grenzen erfasst oder nach Erstreckung der Integration von einem gegebenen Anfang zu einem gegebenen Ende natürlich einen gewissen Wert erhalten muss. Dann aber werde jene Relation zwischen x und y, was für eine auch immer sie war, unendlich wenig verändert, dass den einzelnen um irgendwelche Variationen δx vermehrten x nun dieselben auch um irgendwelche δy vermehrten y entsprechen, wobei freilich zu bemerken ist, dass am Anfang wie am Ende das Verhältnis dieser Variationen durch die Bedingungen der Frage gegeben ist, in der Mitte aber diese Variationen so allgemein angenommen werden, dass sie nach überhaupt keinem Gesetz miteinander verbunden sind. Dann wird aus dieser variierten Relation der Wert derselben Integralformel $\int V\mathrm{d}x$, von demselben Anfang aus bis hin zum selben Ende erstreckt oder innerhalb derselben Grenzen enthalten, bestimmt zu werden aufgefasst, und die ganze Frage handelt nun davon, dass der Übertrag dieses letzten variierten Wertes über jenen ersten Wert der Formel $\int V\mathrm{d}x$ gefunden wird. Weil dieser Übertrag durch $\delta \int V\mathrm{d}x$, welche Form die Variation der Formel $\int V\mathrm{d}x$ ist, gekennzeichnet wird, haben wir bisher eine sich soweit erstreckende Lösung dieser Frage angegeben, dass alle Fälle, in denen die Größe V irgendeine Funktion nicht nur von x, y, p, q, r, s etc. ist, sondern auch darüber hinaus eine gewisse Integralformel $v = \int \mathfrak{V}\mathrm{d}x$ irgendwie involviert, in sich umfasst.

BEMERKUNG 2

§115 Was wir im vorhergehenden Kapitel stillschweigend über die der gefundenen Variation hinzuzufügenden Konstante angenommen haben, welche natürlich der Integralanteil der Variation von selbst involviert, scheint es ratsam, dies in der Lösung dieses Problems genauer zu erläutern. Weil natürlich bei allen Fragen dieser Art, die auf Integralformeln zurückgeführt werden, immer auf die Integrationsgrenzen zu achten ist, weil ja das Integral nichts anderes ist außer die Summe der Elemente, die von einer gegebenen Grenze oder Anfang bis zu einer anderen Grenze oder Ende fortgesetzt wurden, ist diese Betrachtung vollkommen unerlässlich für die jede Integration, ohne welche die Idee des Integrals nicht einmal bestehen bleiben kann. Deswegen, nach Festlegen der Integrationsgrenzen, natürlich Anfang und Ende, sobald wie der Integralanteil der Integration so angenommen worden ist, dass er für den Anfang verschwindet, muss dann auch eine Konstante solcher Art hinzugefügt werden, dass auch die absoluten Anteile für denselben Anfang aufgehoben werden und so der ganze Ausdruck der Variation zu Null gemacht wird. Nachdem dies getan worden ist, lässt sich zum Ende der Integration fortschreiten, sodass auf diese Weise die wahre Variation der vom Anfang bis zum Ende erstreckten vorgelegten Integralformel erhalten wird.

Aber diese Lehre der Variationen kann auf Fragen zweier Arten angewendet werden; während in der einen eine gegebene Relation zwischen x und y angenommen wird und die Variation der ebenso gegebenen Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ untersucht wird, nachdem durch die ganze Erstreckung der Integration den Variablen x und y irgendwelche Variationen zugeteilt worden sind, in der anderen Art aber jene Relation der Variablen x und y selbst gesucht wird, dass die Variation der Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ mit einer gewissen Eigenschaft versehen ist; wie wenn die Formel einen maximalen oder minimalen Wert erhalten muss, ist es nötig, dass diese Variation verschwindet. Dort ergeben sich wiederum zwei Fälle, je nachdem ob ein Maximum oder ein Minimum Geltung haben muss, ob nun x und y irgendwelche Variationen zugeteilt werden oder ob diese Variationen einem gewissen Gesetz unterworfen werden. Daher ist klar, dass diese Theorie sich um Vieles weiter erstreckt, als sie freilich bis jetzt verwendet wurde.

PROBLEM 10

§116 *Wenn die Funktion V außer den zwei Variablen x, y mit ihren Differentialwerten*

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad q = \frac{dp}{dx}, \quad r = \frac{dq}{dx} \quad \textit{etc.}$$

auch zwei oder mehrere Integralformel

$$v = \int \mathfrak{V} dx, \quad v' = \int \mathfrak{V}' dx \quad \textit{etc.}$$

involviert, sodass gilt

$$\begin{aligned} d\mathfrak{V} &= \mathfrak{M} dx + \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \mathfrak{R} dr + \textit{etc.}, \\ d\mathfrak{V}' &= \mathfrak{M}' dx + \mathfrak{N}' dy + \mathfrak{P}' dp + \mathfrak{Q}' dq + \mathfrak{R}' dr + \textit{etc.} \end{aligned}$$

und nach Nehmen des Differentials auch

$$dV = L dv + L' dv' + M dx + N dy + P dp + Q dq + \textit{etc.},$$

so die Variation der Integralformel $\int V dx$ zu finden.

LÖSUNG

Wenn die Lösung dieses Problems auf dieselbe Weise unternommen wird wie die des vorhergehenden, wird bald klar werden, dass die Rechnung von den zwei Integralformeln

$$v = \int \mathfrak{V} dx \quad \text{und} \quad v' = \int \mathfrak{V}' dx$$

nicht gestört wird und auch nicht, wenn mehrere solcher Art involviert werden würden. Daher wird die ganze Lösung schließlich darauf zurückgehen, dass nach Festlegen der Integrationsgrenzen zuerst die Integrale

$$\int L\mathrm{d}x = I \quad \text{und} \quad \int L'\mathrm{d}x = I'$$

so zu nehmen sind, dass sie für den Anfang der Integration verschwinden, dann aber für das Ende der Integration $I = A$ und $I' = A'$ wird; nach Finden dieser Größen werde weiter festgelegt

$$\begin{aligned}
N + (A-I)\mathfrak{N} + (A'-I')\mathfrak{N}' &= N', \\
P + (A-I)\mathfrak{P} + (A'-I')\mathfrak{P}' &= P', \\
Q + (A-I)\mathfrak{Q} + (A'-I')\mathfrak{Q}' &= Q', \\
R + (A-I)\mathfrak{R} + (A'-I')\mathfrak{R}' &= R' \\
&\text{etc.},
\end{aligned}$$

und es wird die gesuchte Variation, während jeder der beiden Variablen x und y irgendwelche Variationen zugeteilt wurden, aus den vorhergehenden Lösungen sein [§110]

$$\begin{aligned}
\delta \int V\mathrm{d}x = \int w\mathrm{d}x \left(N' - \frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}Q'}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3R'}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}^4S'}{\mathrm{d}x^4} - \text{etc.}\right) \\
+ \quad V\delta x \quad + w\left(P' - \frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}R'}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3S'}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right) \\
+ \text{konst.} \quad + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\left(Q' - \frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}S'}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.}\right) \\
+ \frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}\left(R' - \frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}\right) \\
+ \frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3}\left(S' - \text{etc.}\right) \\
+ \text{etc.},
\end{aligned}$$

wo der Gefälligkeit wegen das Element $\mathrm{d}x$ konstant angenommen wurde.

Korollar

§117 Wenn also auch mehrere Integralformeln dieser Art $\int \mathfrak{V}\mathrm{d}x$ in die Funktion V auf irgendeine Weise eingehen, wird der Ausdruck der gesuchten

Variation daher nicht verändert, sondern es müssen nur die Größen N', P', Q', R' etc. aus ihren in entsprechender Weise bestimmt werden.

Bemerkung

§118 Auch wenn die Integralformeln

$$I = \int L\mathrm{d}x, \quad I' = \int L'\mathrm{d}x$$

zwei Variablen involvieren und daher keine festen Werte erhalten zu können scheinen, ist dennoch zu erwägen, dass bei allen Fragen dieser Art immer eine gewisse Relation zwischen den zwei Variablen x und y eingenommen wird, ob sie absolut gegeben ist oder erst durch Rechnung bestimmt werden muss. Unter Verwendung dieser Relation selbst, dass y als Funktion von x betrachtet werden kann, werden nun jene Integralformeln natürlich bestimmte Werte erhalten.

Problem 11

§119 *Wenn die Funktion $\mathfrak{V}$ außer den Variablen x und y und deren Differentialwerten p, q, r, s etc. auch die Integralformel $u = \int \mathfrak{v}\mathrm{d}x$ involviert, dass ihr Differential dieses ist*

$$\mathrm{d}\mathfrak{V} = \mathfrak{L}\mathrm{d}u + \mathfrak{M}\mathrm{d}x + \mathfrak{N}\mathrm{d}y + \mathfrak{P}\mathrm{d}p + \mathfrak{Q}\mathrm{d}q + \mathfrak{R}\mathrm{d}r + etc.,$$

während gilt

$$\mathrm{d}\mathfrak{v} = \mathfrak{m}\mathrm{d}x + \mathfrak{n}\mathrm{d}y + \mathfrak{p}\mathrm{d}p + \mathfrak{q}\mathrm{d}q + \mathfrak{r}\mathrm{d}r + etc.,$$

dann aber V irgendeine Funktion von x, y, p, q, r etc. und darüber hinaus der Integralformel $v = \int \mathfrak{V}\mathrm{d}x$ ist, dass gilt

$$\mathrm{d}V = L\mathrm{d}v + M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + etc.,$$

die Variation der Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ zu finden.

LÖSUNG

Aus Problem 9 finden wir so die Variation der Integralformel $\int \mathfrak{V}\mathrm{d}x = v$; nachdem nämlich die Integrationsgrenzen festgelegt wurden und das Integral $\int \mathfrak{L}\mathrm{d}x = \mathfrak{I}$ so genommen wurde, dass es für den Anfang der Integration verschwindet, werde für das Ende $\mathfrak{I} = \mathfrak{A}$, dann werde der Kürze wegen

$$\mathfrak{N} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{I})\mathfrak{n} = \mathfrak{N}', \quad \mathfrak{P} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{I})\mathfrak{p} = \mathfrak{P}', \quad \mathfrak{Q} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{I})\mathfrak{q} = \mathfrak{Q}' \quad \text{etc.};$$

es wird aus der Lösung jenes Problems sein

$$\delta v = \mathfrak{V}\delta x + \int \mathrm{d}x \left(\mathfrak{N}'w + \frac{\mathfrak{P}'\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathfrak{Q}'\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathfrak{R}'\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right)$$

- nach Setzen von $w = \delta y - p\delta x$ und für konstant genommenes $\mathrm{d}x$.

Wird nun aber $\delta \int V\mathrm{d}x$ gesucht, wird wegen

$$\delta \int V\mathrm{d}x = V\delta x + \int (\mathrm{d}x\delta V - \mathrm{d}V\delta x),$$

nachdem der Kürze wegen festgelegt wurde

$$\mathrm{d}V = L\mathrm{d}v + \mathrm{d}W \quad \text{und} \quad \delta V = L\delta v + \delta W,$$

sodass gilt

$$\mathrm{d}W = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + \text{etc.},$$

gelten, wie wir ebendort gesehen haben,

$$\delta \int V\mathrm{d}x = V\delta x + \int (L\mathrm{d}x\delta v - L\mathrm{d}v\delta x)$$
$$+ \int \mathrm{d}x \left(Nw + \frac{P\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{Q\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{R\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right);$$

wenn dort anstelle von $\mathrm{d}v$ und δv die gerade gefundenen Werte eingesetzt werden, wird sein

$$\mathrm{d}x\delta v - \mathrm{d}v\delta x = \mathrm{d}x \int \mathrm{d}x \left(\mathfrak{N}'w + \frac{\mathfrak{P}'\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathfrak{Q}'\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathfrak{R}'\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right).$$

Nun werde $\int L\mathrm{d}x = I$ gesetzt, nachdem dass Integral so genommen wurde, dass es am Anfang der Integration verschwindet, am Ende aber $I = A$ wird, und wir werden haben

$$\int L(\mathrm{d}x\delta v - \mathrm{d}v\delta x) = \int (A - I)\mathrm{d}x \left(\mathfrak{N}'w + \frac{\mathfrak{P}'\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathfrak{Q}'\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathfrak{R}'\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right).$$

Es werden wieder für $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{R}'$, etc. die oben angenommenen Werte eingesetzt und, um die Rechnung zusammenzufassen, werde festgelegt

$$\begin{gathered}
N + (A - I)\mathfrak{N} + (A - I)(\mathfrak{A} - \mathfrak{I})\mathfrak{n} = N', \\
P + (A - I)\mathfrak{P} + (A - I)(\mathfrak{A} - \mathfrak{I})\mathfrak{p} = P', \\
Q + (A - I)\mathfrak{Q} + (A - I)(\mathfrak{A} - \mathfrak{I})\mathfrak{q} = Q', \\
R + (A - I)\mathfrak{R} + (A - I)(\mathfrak{A} - \mathfrak{I})\mathfrak{r} = R' \\
\text{etc.},
\end{gathered}$$

und es ist klar, dass die gesuchte Variation dann sein wird

$$\delta \int V \mathrm{d}x = V\delta x + \int \mathrm{d}x \left(N'w + \frac{P'\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{Q'\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{R'\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right),$$

welche Formel weiter zu demselben Ausdruck entwickelt wird, welchen wir gegen Ende von Problem 9 [§110] dargeboten haben, welchen es also hier erneut anzuführen überflüssig wäre.

KOROLLAR 1

§120 Hier ist also die Integralformel $\int V \mathrm{d}x$, deren Variation wir angegeben haben, so beschaffen, dass nicht nur die Funktion V die Integralformel $\int \mathfrak{V} \mathrm{d}x$ involviert, sondern auch diese Funktion $\mathfrak{V}$ eine andere Integralformel $\int \mathfrak{v} \mathrm{d}x$ in sich umfasst, wo freilich die Funktion $\mathfrak{v}$ weiter keine Integralformel verwickelt.

KOROLLAR 2

§121 Wenn aber auch diese Funktion $\mathfrak{v}$ darüber hinaus eine Integralformel in sich involviert, ist zu Genüge klar, wie dann die Lösung in Angriff genommen werden muss, wenn freilich dann die Werte N', P', Q', R' etc. darüber hinaus von der letzten Integralformel abhängende Anteile erhalten werden.

Bemerkung

§122 Wie auch immer also die Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ zusammengesetzt war, die bisher erläuterten Vorschriften genügen voll und ganz, um ihre Variation zu finden, auch wenn die Zusammensetzung unter Umständen unendlich war. Weil also alle zwei Variablen verwickelnden Ausdrücke, deren Variationen jemals zu finden sind, entweder von Integralformeln frei sind oder eine oder mehrere in sich umfassend, und diese entweder einfache oder auf irgendeine Weise zusammengesetzt sind, scheint diesem Anteil des Variationskalküls, der von zwei Variablen handelt, mehr als Genüge geleistet worden zu sein, sodass kaum weiter irgendetwas vermisst werden kann. Deswegen wollen wir zu Formeln dieser Variablen fortschreiten und zuerst freilich zu solchen, deren Relation durch zwei Gleichungen bestimmt wird, sodass zwei Variablen als Funktion der dritten betrachtet werden können, ob diese doppelte Relation bekannt ist oder aus der Gestalt der Variation selbst zu finden ist.