Kapitel 6
Über die Variation drei Variablen involvierender Differentialformeln, deren Relation in einer einzigen Gleichung enthalten ist

Leonhard Euler

Problem 15

§141 *Nachdem eine Gleichung zwischen den drei Variablen x, y und z vorgelegt wurde, denen irgendwelche Variationen δx, δy, δz zugeteilt werden, die Variationen der Differentialformeln ersten Grades*

$$p = \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) \quad \textit{und} \quad p' = \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)$$

zu bestimmen.

Lösung

Weil eine Gleichung zwischen drei Variablen gegeben zu sein festgelegt wird, kann eine beliebige derer als Funktion der zwei übrigen betrachtet werden. Es wird also z eine Funktion von x und y sein und es muss sich hier erinnert werden, dass der Ausdruck $(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}) = p$ das Verhältnis der Differentiale von z und x bezeichnet, wenn in jener gegebenen Gleichung allein diese wie Variablen behandelt werden und die dritte y für eine Konstante gehalten wurde, welches selbe über die andere Formel $p' = (\frac{dz}{dy})$ festzuhalten ist. Auf die gleiche Weise können auch die Variationen δx, δy, δz wie unendlich kleine Funktionen der zwei Variablen x und y betrachtet werden, weil ja, wenn sie auch von der dritten z abhängen, diese selbst eine Funktion von x und y ist; daher wird zugleich eingesehen, was diese Formeln

$$\left(\frac{d\delta z}{dx}\right), \left(\frac{d\delta z}{dy}\right), \quad \text{ebenso} \quad \left(\frac{d\delta x}{dx}\right), \left(\frac{d\delta x}{dy}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{d\delta y}{dx}\right), \left(\frac{d\delta y}{dy}\right)$$

bezeichnen. Weil also der variierte Wert der Formel $(\frac{dz}{dx}) = p$ dieser ist

$$p + \delta p = \left(\frac{d(z+\delta z)}{d(x+\delta x)}\right),$$

wenn natürlich hier die Variable y konstant angenommen wird, wird nach Bemerken dieser Bedingung sein

$$p + \delta p = \left(\frac{dz + d\delta z}{dx + d\delta x}\right) = \left(\frac{dz}{dx} + \frac{d\delta z}{dx} - \frac{dz d\delta x}{dx^2}\right),$$

deshalb weil die Variationen δdx und δdz in Bezug auf dx und dz verschwinden. Daher wird man also wegen $(\frac{dz}{dx}) = p$ die gesuchte Variation haben

$$\delta p = \left(\frac{d\delta z}{dx}\right) - \left(\frac{dz}{dx} \cdot \frac{d\delta x}{dx}\right) = \left(\frac{d\delta z}{dx}\right) - p\left(\frac{d\delta x}{dx}\right),$$

die Bedeutung welcher Formeln, weil so δz wie δx Funktionen von x und y sind und man hier ein konstantes y hat, per se klar ist. Auf die gleiche Weise wird aber gefunden werden, dass sein wird

$$\delta p' = \left(\frac{d\delta z}{dy}\right) - p'\left(\frac{d\delta y}{dy}\right),$$

wo nur die Variable x für konstant gehalten wird.

Korollar 1

§142 Hier ist alles auf die zwei Variablen x und y geführt worden und wie Funktionen derer werden nicht nur die dritte z, sondern auch alle drei Variationen δx, δy, δz angesehen; es ist aber klar, dass diese drei Variablen nach Belieben miteinander vertauscht werden können.

Korollar 2

§143 Es genügt aber diese zwei Formeln für die Differentiale ersten Grades zu gebrauchen, weil sich ja alle übrigen auf diese zurückführen lassen, weil freilich gilt

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)=\frac{1}{p},\quad \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)=\frac{1}{p'}\quad \text{und}\quad \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=-\frac{p}{p'}\quad \text{und}\quad \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)=-\frac{p'}{p},$$

wo p und p' Funktionen der beiden x und y sind.

Korollar 3

§144 Nachdem also die Variationen dieser zwei Formeln gefunden worden sind

$$p=\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)\quad \text{und}\quad p'=\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right),$$

werden die Variationen der übrigen gerade erwähnten Formeln daher leicht gefunden werden. Es wird nämlich sein

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)=-\frac{\delta p}{pp}=-\frac{1}{pp}\left(\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{1}{p}\left(\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}\right),$$

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)=-\frac{\delta p'}{p'p'}=-\frac{1}{p'p'}\left(\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}y}\right)+\frac{1}{p'}\left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}\right),$$

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=-\frac{\delta p}{p'}+\frac{p\delta p'}{p'p'}=-\frac{1}{p'}\left(\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{p}{p'}\left(\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{p}{p'p'}\left(\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}y}\right)-\frac{p}{p'}\left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}\right).$$

Bemerkung 1

§145 Hier bemerke ich vor allem, dass die Differentialformeln keinen gewissen Wert haben können, wenn nicht zwei Differentiale so miteinander verglichen werden, dass die dritte Variable, wenn man drei hat, oder alle übrigen, wenn mehrere da sind, als konstant angenommen werden. So hat in dem Fall, in dem zwischen den drei Variablen x, y und z eine einzige Gleichung gegeben ist oder zumindest gegeben zu sein aufgefasst wird, die Formel $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ überhaupt keine Bedeutung, wenn nicht die dritte Variable y konstant angenommen wird, welche Bedingung durch Setzen dieser Formel in

Klammern angedeutet zu werden pflegt, auch wenn sie sicher weggelassen werden könnte, weil ja andernfalls nicht einmal eine Bedeutung vorhanden wäre. Damit dies einsichtiger gemacht wird, was für eine Gleichung auch immer zwischen den drei Variablen x, y, z vorgelegt wird, werde aus ihr der Wert von z gefunden zu werden aufgefasst, dass z einer gewissen Funktion von x und y gleich wird und nach Nehmen ihres Differentials $\mathrm{d}z = p\mathrm{d}x + p'\mathrm{d}y$ hervorgeht, wo wiederum p und p' gewisse Funktionen von x und y sein werden und das solche, dass $(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}) = (\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}x})$ ist. Für konstant genommenes y wird nun $\mathrm{d}z = p\mathrm{d}x$ oder $p = (\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x})$ sein, für konstant genommenes x geht aber $p' = (\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y})$ hervor. Dann ist aber auch klar, dass $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{p}{p'}$ für konstant genommenes z sein wird; es wird aber gefällig sein, dass solche Formeln ausgeschlossen werden, wann immer wir so z wie die Variationen δx, δy und δz wie Funktionen von x und y darstellen.

BEMERKUNG 2

§146 Aus der Geometrie lässt sich dieser Gegenstand um vieles klarer illustrieren. Es mögen nämlich die drei Variablen x, y, z die drei Koordinaten AX, XY, YZ (Fig. 4) bezeichnen, zwischen welchen die vorgelegte Gleichung eine gewisse Oberfläche angeben wird, in welcher die Ordinate $YZ = z$ begrenzt werden wird, die natürlich als gewisse Funktion der beiden übrigen $AX = x$ und $XY = y$ betrachtet werden kann, sodass, nachdem nach Belieben diese zwei x und y genommen wurden, die dritte $YZ = z$ aus der vorgelegten Gleichung bestimmt wird. Wenn daher nun irgendeine andere Oberfläche, von dieser unendlich wenig abweichend, aufgefasst wird und sie so mit dieser verglichen wird, dass ein gewisser Punkt z von ihr mit dem Punkt Z der vorgelegten verglichen werde, so dennoch, dass das Intervall Zz immer unendlich klein ist, werden die Variationen so dargestellt werden, dass gilt

$$\delta x = Ax - AX = Xx, \quad \delta y = xy - XY \quad \text{und} \quad \delta z = yz - YZ;$$

und weil diese Variationen völlig unserem Belieben überlassen sind und auf keine Weise voneinander abhängen, können sie auch als Funktionen der zwei x und y betrachtet werden und das so, dass keine von den übrigen abhängt, sondern irgendeine nach Belieben erdacht werden kann. Ja daher wird sogar eingesehen, weil ja die sehr nahe Oberfläche von der vorgelegten verschieden sein muss, dass in keinster Weise

$$\delta z = p\delta x + p'\delta y$$

sein wird, wenn freilich für die vorgelegte Oberfläche galt

$$\mathrm{d}z = p\mathrm{d}x + p'\mathrm{d}y,$$

andernfalls wäre der Punkt z in derselben Oberfläche, woher insgesamt die drei Funktionen von x und y für die Variationen δx, δy, δz so beschaffen sein müssen, dass nicht gilt

$$\delta z = p\delta x + p'\delta y,$$

sondern sie eher von diesem Wert auf irgendeine Weise abweichen; dort ist freilich besonders zu bemerken, dass diese Funktionen sich so weit erstrecken, dass die unstetigen nicht ausgeschlossen werden und daher nach Belieben Variationen nur in einem einzigen Punkt oder zumindest in einem sehr kleinen Raum festgelegt werden können. Damit aber auch hier dem Zweifel kein Platz gelassen wird, ist natürlich zu bemerken, dass daher, da wir z als eine Funktion solcher Art von x und y festlegen, dass gilt

$$\mathrm{d}z = p\mathrm{d}x + p'\mathrm{d}y$$

keineswegs folgt, dass auch gelten wird

$$\mathrm{d}z = p\delta x + p'\delta y,$$

wie wir oben angenommen haben, deshalb weil wir hier z eine eigene, in keinster Weise von den Variationen von x und y abhängende Variation zuteilen.

PROBLEM 16

§147 *Nachdem eine Gleichung zwischen den drei Variablen x, y, z vorgelegt wurde, denen irgendwelche Variationen δx, δy, δz zugeteilt werden, die Variationen der Differentialformeln zweiten Grades*

$$q = \left(\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x^2}\right), \quad q' = \left(\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) \quad \textit{und} \quad q'' = \left(\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}y^2}\right)$$

zu finden.

LÖSUNG

Hier wird wiederum z wie eine Funktion von x und y angesehen, von welchen auch die drei Variationen δx, δy, δz, die auf keine Weise voneinander abhängen, Funktionen sind. Weil wir ja im vorhergehenden Problem festgelegt haben

$$q = \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) \quad \text{und} \quad p' = \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right),$$

werden wir unter Zuhilfenahme dieser Formeln haben

$$q = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right), \quad q' = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}x}\right) \quad \text{und} \quad q'' = \left(\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}y}\right),$$

und hier ist den Variationen δp und $\delta p'$ Rechnung zu tragen, welche wir gefunden haben

$$\delta p = \left(\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x}\right) - p\left(\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}\right) \quad \text{und} \quad \delta p' = \left(\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}y}\right) - p'\left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}\right).$$

Indem wir also auf die gleiche Weise die Rechnung ausführen, werden wir zuerst finden

$$\delta q = \left(\frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}x}\right) - q\left(\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}\right),$$

wo $\left(\frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}x}\right)$ gefunden wird, wenn der Wert δp für konstant gesetztes y differentiert wird und das Differential durch $\mathrm{d}x$ geteilt wird, woher entsteht

$$\left(\frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}x}\right) = \left(\frac{\mathrm{dd}\delta z}{\mathrm{d}x^2}\right) - q\left(\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}\right) - p\left(\frac{\mathrm{dd}\delta x}{\mathrm{d}x^2}\right)$$

wegen $q = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)$, woher wir folgern

$$\delta q = \left(\frac{\mathrm{dd}\delta z}{\mathrm{d}x^2}\right) - 2q\left(\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}\right) - p\left(\frac{\mathrm{dd}\delta x}{\mathrm{d}x^2}\right).$$

Auf dieselbe Weise wird wegen $q' = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right)$ sein

$$\delta q' = \left(\frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}y}\right) - q'\left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}\right),$$

aber es ist

$$\left(\frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}y}\right) = \left(\frac{\mathrm{dd}\delta z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) - q'\left(\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}\right) - p\left(\frac{\mathrm{dd}\delta x}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right)$$

und daher

$$\delta q' = \left(\frac{\mathrm{dd}\delta z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) - q'\left(\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}\right) - q'\left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}\right) - p\left(\frac{\mathrm{dd}\delta x}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right).$$

Der andere Wert $q' = (\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}x})$ aber liefert auf die gleiche Weise behandelt

$$\delta q' = \left(\frac{\mathrm{dd}\delta z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) - q'\left(\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}\right) - q'\left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}\right) - p'\left(\frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right),$$

die Abweichung welches Wertes von jenem eine bald genauer zu untersuchende Unahnnehmlichkeit involviert. Aus der dritten Formel $q'' = (\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}y})$ wird aber gefunden

$$\delta q'' = \left(\frac{\mathrm{dd}\delta z}{\mathrm{d}y^2}\right) - 2q''\left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}\right) - p'\left(\frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}y^2}\right).$$

Bemerkung 1

§148 Ich werde nun nach dem Ursprung der Abweichung der Variation $\delta q'$, die aus dem doppelten Wert

$$q' = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}x}\right)$$

entstanden ist, suchen und bemerke, dass in diesen die Variation ausdrückenden Formeln entweder die Größe x oder die Größe y für konstant gehalten wird, je nachdem was der Nenner irgendeines Gliedes anzeigt. Aber wenn wir die Größe x konstant zu bleiben annehmen, wie veränderlich auch immer unterdessen die andere y ist, erfordert die Natur der Sache, dass auch die Variationen von x keine Veränderung eingehen, was aber nicht passiert, wenn die Variation δx auch von der Größe y abhängt, welches selbe auch über die andere Variable y, während sie konstant gesetzt wird, festzuhalten ist. Daher ist klar, wenn die Variationen δx und δy zugleich von beiden Variablen x und y abzuhängen angenommen werden, dass es der Annahme, nach welcher eine der beiden immer konstant festgelegt wird, widerspricht. Deswegen kann dieser Umstand nicht anders vermieden werden, außer wenn wir festlegen, dass die Variation von x überhaupt nicht von der anderen Variable y abhängt und die Variation δy von dieser nicht von der anderen x abhängt. Wenn aber δx allein durch x und δy allein durch y bestimmt wird, dass gilt

$$\text{sowohl} \quad \left(\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}y}\right) = 0 \quad \text{als auch} \quad \left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}\right) = 0,$$

wird auch sein

$$\left(\frac{\mathrm{dd}\delta x}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) = 0,$$

und so werden jene beiden sich unterscheidenden für $\delta q'$ gefundenen Werte in Übereinstimmung gebracht.

Bemerkung 2

§149 Wir werden aber allen Zweifeln in dieser Untersuchung auf Glücklichste entgegnen, wenn wir allein der Größe z Variationen zuteilen, wobei die zwei übrigen x und y vollkommen unverändert gelassen wurden, sodass so $\delta x = 0$ wie $\delta y = 0$ ist, auf welche Weise nicht nur die Rechnung begünstigt wird, sondern auch der Gebrauch dieses Variationskalküls kaum eingeschränkt wird. Wenn wir daher nämlich irgendeine Oberfläche mit einer anderen ihr sehr nahen vergleichen, steht nichts im Wege, dass wir die einzeln vorgelegten Punkte der Oberfläche auf die Punkte der ihr sehr nahen beziehen, denen dieselben zwei Koordinaten x und y entsprechen, und allein die dritte z eine Veränderung erfährt. Ja diese Annahme ist, wenn wir zu Integralformeln fortschreiten werden, sogar um so mehr von Nöten, weil ja immer die ganze Aufgabe auf Integralformeln solcher Art geführt wird, die eine zweifache Integration erfordern, in deren einer allein x, in der anderen hingegen allein y wie die Variable behandelt wird; wenn also nicht einige dieser Variationen von diesen als null festgelegt werden, gingen daher die größten Unannehmlichkeiten in die Rechnung ein; weil diese per se meistens sehr schwer ist, scheint es keineswegs klug, dass aus diesem Teil die Schwierigkeiten vervielfacht werden. Deswegen werde ich diese Behandlung so erledigen, dass ich im Nachfolgenden den beiden Variablen x und y immer gar keine Variationen zuteile und allein die dritte z um irgendeine Variation δz vermehrt zu werden annehme, wo ich freilich δz als irgendeine entweder stetige oder unstetige Funktion von x und y ansetzen werde.

PROBLEM 17

§150 *Wenn z irgendeine Funktion von x und y war und ihr die gleichermaßen irgendwie von x und y abhängende Variation zugeteilt wird, die Variationen aller Differentialformeln irgendwelcher Ordnung zu finden.*

LÖSUNG

Für die Differentiale ersten Grades hat man diese zwei Formeln

$$p = \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) \quad \text{und} \quad p' = \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right),$$

deren Variationen, weil x und y keine Variation zu erfahren aufgefasst werden, sich aus den oben gefundenen so verhalten werden

$$\delta p = \left(\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x}\right) \quad \text{und} \quad \delta p' = \left(\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}y}\right).$$

Für die Differentiale zweiter Ordnung hat man diese drei Formeln

$$q = \left(\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x^2}\right), \quad q' = \left(\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) \quad \text{und} \quad q'' = \left(\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}y^2}\right),$$

sodass ist

$$q = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right), \quad q' = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}x}\right) \quad \text{und} \quad q'' = \left(\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}y}\right),$$

deren Variationen aus dem vorhergehenden Problem wegen $\delta x = 0$ und $\delta y = 0$ sind

$$\delta q = \left(\frac{\mathrm{dd}\delta z}{\mathrm{d}x^2}\right), \quad \delta q' = \left(\frac{\mathrm{dd}\delta z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right), \quad \delta q'' = \left(\frac{\mathrm{dd}\delta z}{\mathrm{d}y^2}\right).$$

Wenn wir auf die gleiche Weise zu Differentialen dritter Ordnung aufsteigen, tauchen diese vier Formeln auf

$$r = \left(\frac{\mathrm{d}^3 z}{\mathrm{d}x^3}\right), \quad r' = \left(\frac{\mathrm{d}^3 z}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\right), \quad r'' = \left(\frac{\mathrm{d}^3 z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}\right), \quad r''' = \left(\frac{\mathrm{d}^3 z}{\mathrm{d}y^3}\right),$$

deren Variationen so ausgedrückt hervorzugehen schon klar ist

$$\delta r = \left(\frac{\mathrm{d}^3 \delta z}{\mathrm{d}x^3}\right), \quad \delta r' = \left(\frac{\mathrm{d}^3 \delta z}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\right), \quad \delta r'' = \left(\frac{\mathrm{d}^3 \delta z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}\right), \quad \delta r''' = \left(\frac{\mathrm{d}^3 \delta z}{\mathrm{d}y^3}\right),$$

woher per se klar ist, wie die Variationen von Differentialformeln höherer Ordnungen auszudrücken sind.

Korollar 1

§151 Daher ist schon klar, dass im Allgemeinen für eine Differentialformel irgendeiner Ordnung

$$\left(\frac{\mathrm{d}^{\mu+\nu}z}{\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}^{\nu}}\right)$$

ihre Variation gleich

$$\left(\frac{\mathrm{d}^{\mu+\nu}\delta z}{\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}y^{\nu}}\right)$$

sein wird, in welcher Form alle oberen enthalten sind.

Korollar 2

§152 Des Weiteren ist auch klar, indem anstelle der Differentiale erster Ordnung die Buchstaben p, p', der zweiten Ordnung die Buchstaben q, q', q'', der dritten Ordnung die Buchstaben r, r', r'', r''', der vierten Ordnung die Buchstaben s, s', s'', s''', s^{IV} etc. eingeführt werden, dass die Gattung der Differentiale beseitigt wird, wie wir auch oben durch Buchstaben dieser Art die Gattung der Differentiale beseitigt haben.

Bemerkung

§153 Weil ja die zwei Variablen x und y überhaupt nicht voneinander abhängen, sodass die eine sogar den selben Wert beibehalten kann, während die andere durch alle möglichen Werte hindurch variiert wird, ist es ersichtlich, dass eine Differentialformel dieser Art $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, die natürlich überhaupt keine Bedeutung haben wird, in der Rechnung nie einen Platz finden kann. Andernfalls aber, weil die Größe z eine Funktion von x und y ist, haben diese Formeln $\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)$, $\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)$ und alle übrigen, welche wir oben betrachtet haben, eine bestimmte Bedeutung und es können keine anderen in die Rechnung eingehen. Weil sich des Weiteren sich hierauf erstreckende Fragen immer darauf zurückführen lassen, dass z wie eine Funktion der beiden x und y betrachtet werden kann, werden Formeln solcher Art $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$, wo die Größe z für konstant zu halten wäre, daher völlig ausgeschlossen und es sind keine anderen außer den oben erwähnten in der Rechnung zugelassen zu werden anzusehen; und so verwickeln alle von Integralformeln freien Ausdrücke außer den Variablen x, y, z keine anderen Differentialformeln außer denen, deren Variationen hier angegeben worden sind.

PROBLEM 18

§154 *Wenn z eine Funktion von x und y ist und ihr eine wie auch immer von x und y abhängende Variation δz zugeteilt wird, dann aber V eine auf irgendeine Weise aus den drei Variablen x, y, z und deren Differentialen irgendwelcher Ordnung zusammengesetzte Größe war, ihre Variation δV zu untersuchen.*

LÖSUNG

Damit im Ausdruck V die Gattungen der Differentiale beseitigt werden, wollen wir, wie wie es bisher auch gemacht haben, festlegen

$$\begin{aligned}
p &= \left(\frac{dz}{dx}\right), \quad p' = \left(\frac{dz}{dy}\right), \\
q &= \left(\frac{ddz}{dx^2}\right), \quad q' = \left(\frac{ddz}{dxdy}\right), \quad q'' = \left(\frac{ddz}{dy^2}\right), \\
r &= \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right), \quad r' = \left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right), \quad r'' = \left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right), \quad r''' = \left(\frac{d^3z}{dy^3}\right) \\
&\text{etc.,}
\end{aligned}$$

die von der Variation von z abstammenden Variationen welcher Formeln wir so bestimmen, dass, nachdem der Übersichtlichkeit wegen diese Variation $\delta z = w$ gesetzt wurde, welche wie irgendeine Funktion der zwei Variablen x und y angesehen werden muss, gilt

$$\begin{aligned}
\delta p &= \left(\frac{dw}{dx}\right), \quad \delta p' = \left(\frac{dw}{dy}\right), \\
\delta q &= \left(\frac{ddw}{dx^2}\right), \quad \delta q' = \left(\frac{ddw}{dxdy}\right), \quad \delta q'' = \left(\frac{ddw}{dy^2}\right), \\
\delta r &= \left(\frac{d^3w}{dx^3}\right), \quad \delta r' = \left(\frac{d^3w}{dx^2dy}\right), \quad \delta r'' = \left(\frac{d^3w}{dxdy^2}\right), \quad \delta r''' = \left(\frac{d^3w}{dy^3}\right) \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Aber nach jenen Substitutionen wird der vorgelegte Ausdruck V eine Funktion dieser Größen x, y, z, p, p', q, q', q'', r, r', r'', r''' etc. werden. Ihr Differential wird also eine solche Form annehmen

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V = L\mathrm{d}x + M\mathrm{d}y + N\mathrm{d}z + P\mathrm{d}p &+ Q\mathrm{d}q &&+ R\mathrm{d}r \\ + P'\mathrm{d}p' &+ Q'\mathrm{d}q' &&+ R'\mathrm{d}r' \\ &+ Q''\mathrm{d}q'' &&+ R''\mathrm{d}r'' \\ & &&+ R'''\mathrm{d}r''' \end{aligned}$$

etc.

Weil ja nun diese Formel nur sofern eine Variation erhält, wie die Größen, aus welchen sie zusammengesetzt wird, variiert werden, die zwei x und y aber von solchen unberührt festgelegt werden, wird ihre Variation, die wir suchen, sein

$$\begin{aligned} \delta V = N\delta z + P\delta p &+ Q\delta q &&+ R\delta r \\ + P'\delta p' &+ Q'\delta q' &&+ R'\delta r' \\ &+ Q''\delta q'' &&+ R''\delta r'' \\ & &&+ R'''\delta r''' \end{aligned}$$

etc.,

und wenn wir w anstelle der Variation δz schreiben, werden wir durch Einsetzen der gefundenen Substitutionen haben

$$\begin{aligned} \delta V = Nw + P\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right) &+ Q\left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}\right) &&+ R\left(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3}\right) \\ + P'\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right) &+ Q'\left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) &&+ R'\left(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\right) \\ &+ Q''\left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}y^2}\right) &&+ R''\left(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}\right) \\ & &&+ R'''\left(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}y^3}\right) \end{aligned}$$

etc.,

deren Bildung, wenn unter Umständen auch Differentiale höherer Grade eingehen, per se klar ist.

Korollar 1

§155 Weil w wie eine Funktion der zwei Variablen x und y betrachtet wird, ist die Bedeutung der einzelnen Teile, die die Variation δV festlegen, bestimmt und diese Variation ist für vollkommen bestimmt zu halten.

Korollar 2

§156 Wie auch immer aber der Ausdruck V aus Differentialen gebildet ist, weil er ja einen gewissen Wert anzuzeigen anzusehen ist, muss er unter Verwendung der Substitutionen immer von der Gattung der Differentiale befreit werden.

Korollar 3

§157 Wenn unsere drei Variablen auf eine Oberfläche bezogen werden, dass ihre Koordinaten $AX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ (Fig. 6) sind, wird allein die Ordinate $YZ = z$ überall den unendlichen Zuwachs $Zz = \delta z = w$ zu erhalten verstanden, sodass die Punkte z auf die andere von jener unendlich wenig abweichende Oberfläche fallen.

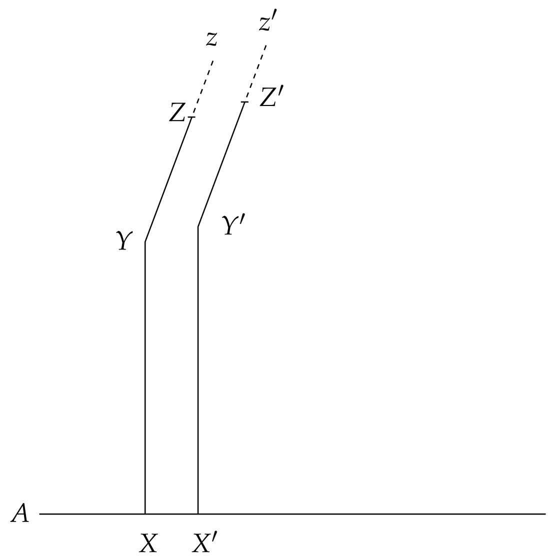

Fig. 6

Bemerkung

§158 Es muss hier dem daher herstammenden Zweifel entgegnet werden, dass die Größe z wie eine Funktion der zwei x und y anzusehen zu sein gesagt haben; denn weil wir ja x und y keine Variationen zuteilen, wenn im Ausdruck V anstelle von z sein Wert in x und y eingesetzt werden würde, ginge es selbst lediglich in eine Funktion von x und y über und erhielte deshalb keine Variation. Aber es ist zu bemerken, auch wenn z wie eine Funktion von x und y angesehen wird, dass sie auch meistens unbekannt ist, wann immer natürlich ihre Natur erst aus der Bedingung der Variation gefunden werden muss; wenn sie aber schon von Anfang an gegeben wäre, muss dennoch, während die Variation gesucht wird, diese Funktion z quasi unbekannt angesehen werden und es lässt sich keineswegs an ihrer Stelle der durch x und y ausgedrückte Wert einsetzen, bevor die Variation, die natürlich allein von z abhängt, vollkommen untersucht worden ist.