Kapitel 7
Über die Variation drei Variablen involvierender Integralformeln, von denen eine wie eine Funktion der zwei übrigen angesehen wird

Leonhard Euler

Problem 19

§159 *Die Natur der sich hierher erstreckenden Formeln zu entwickeln und die Methode, mit welcher deren Variationen untersucht werden sollten, zu erläutern.*

Lösung

Weil man die drei Variablen x, y und z hat, von denen die eine z wie eine Funktion der zwei übrigen x und y zu betrachten ist, auch wenn in der Untersuchung der Variation selbst die Art dieser Funktion für unbekannt gehalten werden muss, weichen die Integralformeln, die in dieser Art des Kalküls auftauchen, sehr stark von denen ab, die über nur zwei Variablen vorgelegt zu werden pflegt. Wie nämlich eine solche Integralformel $\int V dx$, wo V die zwei Variablen x und y zu verwickeln angesehen wird, von welchen y von x abzuhängen aufgefasst wird, quasi als Summe aller elementaren Werte $V dx$, durch alle Werte von x hindurch gesammelt, betrachtet werden kann, so, wann immer man drei Variablen x, y und z hat, von welchen diese z von den zwei x und y zugleich abzuhängen aufgefasst wird, involvieren sich hierher erstreckende Integrale die Sammlung aller Elemente, die auf alle Werte so von x wie von y bezogen wurden, und erfordern daher auch eine zweifache Integration, die eine durch alle Werte von x hindurch, die andere hingegen alle Elemente von y vereinigend. Daher müssen Integrale dieser Art in einer solchen Form $\int\int V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ enthalten sein, mit welcher natürlich eine zweifache Integration angedeutet wird, deren Entwicklung so unternommen zu werden pflegt, dass zuerst die eine Variable y wie eine Konstante angesehen wird und der Wert der Formel $\int V\mathrm{d}x$, zwischen den Integrationsgrenzen erstreckt, gesucht wird; weil in dieser nur x einen entweder gegebenen oder von y abhängenden Wert erhält, wird das Integral $\int V\mathrm{d}x$ in eine Funktion nur von y übergehen, nach Multiplizieren welcher mit $\mathrm{d}y$ übrig ist, dass das Integral $\int \mathrm{d}y \int V\mathrm{d}x$ untersucht wird; die Form $\int \mathrm{d}y \int V\mathrm{d}x$, auf diese Weise behandelt, ist also jener $\int\int V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ gleichwertig zu sein anzusehen. Und wenn in umgekehrter Reihenfolge zuerst die Größe x konstant angenommen wird und das Integral $\int V\mathrm{d}y$ durch vorgeschriebene Grenzen hindurch erstreckt wird, wird es darauf wie eine Funktion von x betrachtet werden können und das gesuchte Integral $\int \mathrm{d}x \int V\mathrm{d}y$ gefunden werden können. Es ist aber egal welche der beiden Arten, den Wert der doppelten Integralformel $\int\int V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ zu entwickeln, wir gebrauchen.

Weil also in dieser Art keine anderen Integralformeln außer von dieser Art $\int\int V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ auftauchen können, geht die ganze Aufgabe darauf zurück, dass wir zeigen, wie die Variation einer Form dieser Art gefunden werden muss. Weil wir ja aber die Größen x und y einer Variation unbeteiligt annehmen, wird aus dem, was anfangs [§75] gezeigt wurde, leicht gefolgert, dass sein wird

$$\delta \iint V\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint \delta V\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

wo δV die Variation von V bezeichnet; und hier ist eine doppelte Integration von Nöten, genauso wie wir eben angedeutet haben.

KOROLLAR 1

§160 Wenn wir das Integral $\int\int V\mathrm{d}x\mathrm{d}y = W$ setzen, weil $\int \mathrm{d}x \int V\mathrm{d}y = W$ ist, wird nach Differentiation nach x nur $\int V\mathrm{d}y = (\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x})$ und daher weiter durch Differentieren nach y $V = (\frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y})$ sein, woher klar ist, dass das Integral W so beschaffen ist, dass $V = (\frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y})$ ist.

KOROLLAR 2

§161 Weil eine doppelte Integration zu unternehmen ist, wird in jeder der beiden eine beliebige Größe eingeführt; die eine Integration führt aber anstelle einer Konstante irgendeine Funktion von x ein, die X sei, die andere aber irgendeine Funktion von y, die Y sei, sodass das vollständige Integral ist

$$\iint V\mathrm{d}x\mathrm{d}y = W + X + Y.$$

KOROLLAR 3

§162 Dies wird auch durch die Auflösung selbst bestätigt; es wird nämlich zuerst

$$\int V\mathrm{d}y = \left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right)$$

wegen $(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}) = 0$ sein, dann aber wird $V = (\frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y})$ sein, weil weder X noch $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}$ von y abhängt. Daher, wenn $(\frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}) = V$ war, wird das vollständige Integral sein

$$\iint V\mathrm{d}x\mathrm{d}y = W + X + Y.$$

BEMERKUNG 1

§163 Es ist aber ganz und gar notwendig, dass die Gestalt von Doppelintegralformeln dieser Art $\iint V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ sorgfältiger einer Untersuchung unterzogen wird, was am bequemsten durch die Theorie der Oberflächen geleistet werden können wird. Es seien also wie bisher x und y zwei auf der Basis $AX = x$, $XY = y$ (Fig. 7) angenommene orthogonale Koordinaten, auf welcher normal die dritte bis hin zur Oberfläche verlängerte Ordinate $YZ = z$ fußt. Wenn nun jene zwei Koordinaten x und y um ihre Differentiale $XX' = \mathrm{d}x$ und $YY' = \mathrm{d}y$ wachsen, entsteht daher auf der Basis das Elementparallelogramm $YxyY' = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, welchem ein Element der Integralformel entspricht. Wenn so über die von der Oberfläche eingeschlossene Solidität die Frage gestellt wird, wird ihr Element gleich $z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ und daher die ganze Solidität gleich $\iint z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ sein; wenn die Oberfläche selbst gesucht wird, wird für $\mathrm{d}z = p\mathrm{d}x + p'\mathrm{d}y$ gesetzt ihr über diesem Rechteck $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ emporragendes

Element gleich $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\sqrt{1+pp+p'p'}$ und daher die Oberfläche selbst gleich $\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\sqrt{1+pp+p'p'}$ sein, woher allgemein die Beschaffenheit der Doppelintegralformel $\iint V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ verstanden wird.

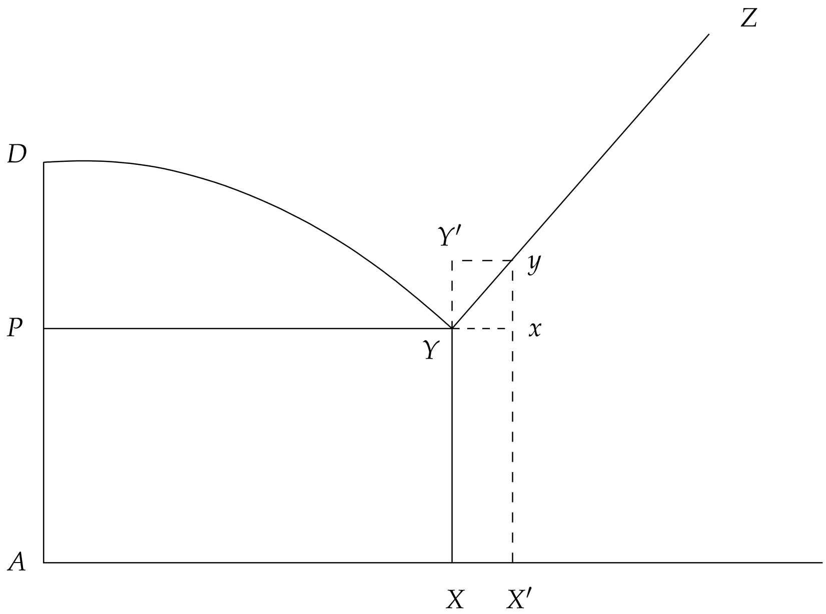

Fig. 7

Wenn daher nun der Wert einer solchen Formel gesucht wird, die einem gegebenem Raum auf der Basis wie z. B. $ADYX$ entspricht, werde zuerst für konstant genommenes x das einfache Integral $\int V\mathrm{d}y$ untersucht und dann werde y die Größe XY, die bis hin zur Kurve DY fortgeführt wurde, zugeschrieben, die aus der Natur dieser Kurve einer gewissen Funktion von x gleich werde. So wird also $\mathrm{d}x\int V\mathrm{d}y$ das dem Rechteck $XYxX' = y\mathrm{d}x$ entsprechende Element der vorgelegten Formel ausdrücken, dessen erneut genommenes und allein aus der Variable x bestehende Integral $\int \mathrm{d}x \int V\mathrm{d}y$ schließlich der dem ganzen Raum $ADYX$ entsprechende Wert gegeben wird, wenn freilich jede der beiden Integrationen unter Beifügung einer Konstante in entsprechender Weise bestimmt wird.

BEMERKUNG 2

§164 So muss sich die Entwicklung von Doppelintegralformeln dieser Art verhalten, wenn sie an eine auf der Basis gegebenen Form wie beispielsweise $ADYX$ anzupassen war; wenn wir aber jede der beiden Integrationen unbestimmt erledigen wollen, dass wir zuerst für konstant genommenes x das Integral $\int V\mathrm{d}y$ suchen, was dem elementaren Rechteck $XYxX' = y\mathrm{d}x$ zu entsprechen zu verstehen ist, wenn freilich mit $\mathrm{d}x$ multipliziert wird, darauf aber in der Integration der Formel $\int \mathrm{d}x \int V\mathrm{d}y$ die Größe $y = XY$ dieselbe zu bleiben auffassen, wobei allein x als Variable angenommen wurde, dann wird der dem unbestimmten Rechteck $APYX = xy$ entsprechende Wert hervorgehen, wenn freilich die durch jede der beiden Integrationen eingegangenen Konstanten entsprechend bestimmt werden. Aber wenn die übrigen Grenzen dieses Raumes außer den Linien XY und PY als unbestimmt betrachtet werden, wird das Integral $\int\int V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ die zwei unbestimmten Funktionen $X + Y$ erhalten, jene von x, diese aber von y. Wenn wir daher also diese Dinge darauf auf die Berechnung der Maxima und Minima anwenden wollen, weil ja die Eigenschaft des Maximums oder Minimums, die einem gewissen gegebenen Raum $ADYX$ zufallen muss, zugleich auch notwendigerweise einem unbestimmten Raum wie beispielsweise $APYX$ zukommt, wird es hilfreich sein, dass jene zweifache Integration auf die hier erläuterte Weise ausgeführt wird.

PROBLEM 20

§165 *Wenn V irgendeine aus den drei Variablen x, y, z und deren Differentialen zusammengesetzte Formel ist, ist die Variation der Doppelintegralformel $\int\int V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ zu finden, während der Größe z, die wie eine Funktion von x und y betrachtet wird, irgendwelche Variationen zugeteilt werden.*

LÖSUNG

Um die Gattung der Differentiale zu beseitigen, wollen wir festlegen

$$p = \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right), \quad p' = \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right),$$

$$q = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right), \; q' = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}x}\right), \; q'' = \left(\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}y}\right),$$
$$r = \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}\right), \; r' = \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}x}\right), \; r'' = \left(\frac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}y}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}q''}{\mathrm{d}x}\right), \; r''' = \left(\frac{\mathrm{d}q''}{\mathrm{d}y}\right)$$

etc.,

dass V eine Funktion der endlichen Größen x, y, z, p, p', q, q', q'', r, r', r'', r''' etc. wird. Dann werde ihr Differential wie folgt festgelegt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V = L\mathrm{d}x + M\mathrm{d}y + N\mathrm{d}z + P\mathrm{d}p &+ Q\mathrm{d}q &&+ R\mathrm{d}r \\ + P'\mathrm{d}p' &+ Q'\mathrm{d}q' &&+ R'\mathrm{d}r' \\ &+ Q''\mathrm{d}q'' &&+ R''\mathrm{d}r'' \\ & &&+ R'''\mathrm{d}r''' \end{aligned}$$

etc.;

weil daher zugleich ihre Variation δV bekannt wird, wird aus dem vorhergehenden Problem die gesuchte Variation gefolgert

$$\delta \iint V\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y \, \{ \, [][c]lllllllN\delta z + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + P'\delta p' + Q'\delta q + R'\delta r' + Q''\delta q'' + R''\delta r''$$

Wenn wir daher nun, wie wir es in §154 gemacht haben, die Variation $\delta z = w$ setzen, die sich wie irgendeine Funktion der zwei Variablen x und y betrachten lässt, schließen wir eben daher, dass diese Variation sein wird

$$\delta \iint V\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y \left\{ [][c]llllllllNw + P\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right) + Q\left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}\right) + R\left(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3}\right) + P'\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right) + Q'\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right.\right.$$

KOROLLAR 1

§166 Wenn also die Gestalt jeder der beiden Funktionen z und $\delta z = w$ oder die Art der Zusammensetzung aus den zwei Variablen x und y gegeben wäre, dann könnte durch die zuvor gegebenen Vorschriften die Variation der Doppelintegralformel $\iint V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ angegeben werden, wie auch immer die Größe V aus den Variablen x, y, z und deren Differentialen zusammengesetzt war.

KOROLLAR 2

§167 Die ganze Aufgabe wird natürlich auf die Entwicklung der gefundenen Doppelintegralformel zurückgehen; weil diese aus mehreren Teilen besteht, wird es gefällig sein, dass einzelne Teile durch zweifache Integration, wie zuvor erläutert, behandelt werden.

BEMERKUNG

§168 Wann immer aber die Beschaffenheit der Funktion z nicht bekannt ist und sie erst aus der Bedingung der Variation gefunden werden muss, sodass die Variation $\delta z = w$ überhaupt keine Bestimmung erfährt, sowie es passiert, wenn die Formel $\int\int V dx dy$ den maximalen oder minimalen Wert erhalten muss, dann ist es ganz und gar notwendig, dass die einzelnen Glieder der gefundenen Variation $\delta \int\int V dx dy$ so reduziert werden, dass überall nach dem Doppelintegralzeichen nicht die Differentialwerte der Variation $\delta z = w$, sondern diese Variation selbst auftaucht; eine Reduktion solcher Art haben wir schon oben in den nur zwei Variablen involvierenden Formeln gebraucht. Aber eine solche Reduktion, weil sie für Doppelintegralformeln weniger üblich ist, erfordert eine genauere Erläuterung. Für dieses Ziel bemerke ich, dass mit einer Reduktion dieser Art zu einfachen Integralformeln gelangt wird, in denen nur die eine der beiden Größen x und y für variabel gehalten wird und die andere wie eine Konstante angesehen wurde, um das anzugeben, wird, damit nicht entgegen der Notwendigkeit die Zeichen vervielfacht werden, eine solche Form $\int T dx$ das Integral der Differentialformel $T dx$ bezeichnen, während die Größe y für konstant gehalten wird; und auf die gleiche Weise ist zu verstehen, dass in dieser Form $\int T dy$ allein die Größe y wie eine Variable betrachtet wird, was umso mehr ersichtlich ist, weil nach Weglassen dieser Bedingung diese Formeln überhaupt keine Bedeutung hätten. Und es ist im Folgenden also nicht nötig, dass aufgezeigt wird, wenn T die beiden Variablen x und y umfasst, welche der beiden in den einfachen Integralformeln $\int T dx$ oder $\int T dy$ entweder konstant oder variabel angenommen wird, weil allein die, deren Differential ausgedrückt wird, für die Variable zu halten ist. In den Doppelintegralformeln $\int\int V dx dy$ ist aber immer festzuhalten, dass die eine Integration auf die Variabilität allein von x, die andere aber auf die allein von y zu beschränken ist und es daher egal ist, welche der beiden Integrationen als erste unternommen wird.

PROBLEM 21

§169 *Die Variation der Doppelintegralformel $\iint V \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, die im vorgehenden Problem gefunden wurde, ist so zu transformieren, dass nach dem Doppelintegralzeichen überall die Variation $\delta z = w$ sich selbst aufteilt und ihre Differentiale herausgeworfen wurden.*

LÖSUNG

Damit sich diese Transformation weiter erstreckt, seien T und v irgendwelche Funktionen der zwei Variablen x und y und es werde diese Doppelintegralformel $\iint T\mathrm{d}x\mathrm{d}y(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x})$ betrachtet, die nach Trennen der Variität der Integrationen so dargestellt werde $\int \mathrm{d}y \int T\mathrm{d}x(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x})$, dass in der Integration $\int T\mathrm{d}x(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x})$ allein die Größe x wie die Variable betrachtet wird. Dann aber wird $\mathrm{d}x(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}) = \mathrm{d}v$ sein, weil y für konstant gehalten wird, und daher wird werden

$$\int T\mathrm{d}v = Tv - \int v\mathrm{d}T;$$

weil dort im Differential von $\mathrm{d}T$ allein die Variable x berücksichtigt wird, ist es gefällig, um dies anzuzeigen, dass $\mathrm{d}x(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x})$ anstelle von $\mathrm{d}T$ geschrieben wird, sodass gilt

$$\int T\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) = Tv - \int v\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)$$

und daher unsere Formel so reduziert hervorgeht

$$\iint T\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) = \int Tv\mathrm{d}y - \iint v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right).$$

Auf die gleiche Weise werden wir nach Vertauschen der Variablen erhalten

$$\iint T\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right) = \int Tv\mathrm{d}x - \iint v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}y}\right).$$

Nachdem nun quasi dieses Lemma vorausgeschickt wurde, wird sich die Reduktion der im vorhergehenden Problem gefundenen Variation so verhalten

$$\iint P\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right) = \int Pw\mathrm{d}y - \iint w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right),$$

$$\iint P'\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right)=\int P'w\mathrm{d}x-\iint w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}y}\right).$$

Weiter sei für die folgenden Glieder zuerst $(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x})=v$ und daher $(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2})=(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x})$, woher gefolgert wird

$$\iint Q\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}\right)=\int Q\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)-\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right),$$

und, nachdem das letzte Glied in gleicher Weise reduziert wurde, wird sein

$$\iint Q\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}\right)=\int Q\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)-\int w\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}\right)+\iint w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2}\right).$$

Durch dieselbe Substitution werden wir $(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y})=(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y})$ haben und daher

$$\iint Q'\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right)=\int Q'\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)-\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}y}\right)$$

oder

$$\iint Q'\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right)=\int Q'\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)-\int w\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}y}\right)+\iint w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}Q'}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right),$$

welche Form wegen

$$\int Q'\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)=Q'w-\int w\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}x}\right)$$

in diese übergeht

$$\iint Q'\mathrm{d}x\mathrm{d}y=Q'w-\int w\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}x}\right)+\iint w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}Q'}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right)-\int w\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}y}\right).$$

Dann erhalten wir aber für die dritte Form dieser Ordnung

$$\iint Q''\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}y^2}\right)=\int Q''\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right)-\int w\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}Q''}{\mathrm{d}y}\right)+\iint w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}Q''}{\mathrm{d}y^2}\right).$$

Weiter wird wegen $(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3})=(\frac{\mathrm{dd}v}{\mathrm{d}x^2})$, während $v=(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x})$ bleibt, werden

$$\iint R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}v}{\mathrm{d}x^2}\right)=\int R\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)-\int v\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\right)+\iint v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}R}{\mathrm{d}x^2}\right)$$

und

$$\iint v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}R}{\mathrm{d}x^2}\right)=\int w\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}R}{\mathrm{d}x^2}\right)-\iint w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3}\right),$$

sodass gilt

$$\iint P\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3}\right)=\int R\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}\right)-\int \mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\right)+\int w\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}R}{\mathrm{d}x^2}\right)$$
$$-\iint w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3}\right).$$

Darauf wird wegen $(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y})=(\frac{\mathrm{dd}v}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y})$ sein

$$\iint R'\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}v}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right)=R'v-\int v\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}x}\right)+\iint v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}R'}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right)-\int v\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}y}\right),$$

und weil hier auch gilt

$$\iint v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}R'}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right)=\int w\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}R'}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right)-\iint w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}^3R'}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\right),$$

folgern wir, dass gelten wird

$$\iint R'\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\right)=R'\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)-\int\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}x}\right)+\int w\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}R'}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right)$$
$$-\int\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}y}\right)-\iint w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}^3R'}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\right).$$

Schließlich folgern wir daher durch Vertauschen von x und y

$$\iint R''\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}\right)=R''\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right)-\int\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}R''}{\mathrm{d}y}\right)+\int w\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{dd}R''}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right)$$
$$-\int\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}R''}{\mathrm{d}x}\right)-\iint w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}^3R''}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}\right)$$

und

$$\iint R'''\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}y^3}\right)=\int R'''\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}y^2}\right)-\int\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}R'''}{\mathrm{d}y}\right)$$
$$+\int w\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{dd}R'''}{\mathrm{d}y^2}\right)-\iint w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}^3R'''}{\mathrm{d}y^3}\right).$$

Wenn wir diese Werte einsetzen, finden wir

$$\delta \iint V \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint w\mathrm{d}x\mathrm{d}y \left\{ [][c]lllllllN - \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right) + \left(\frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2}\right) - \left(\frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3}\right) - \left(\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}y}\right) + \left(\frac{\mathrm{dd}Q'}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) - \left(\frac{\mathrm{d}^3R'}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\right) + \left(\frac{\mathrm{dd}Q'}{\mathrm{d}y^2}\right) - \right.$$

$$+ \int Pw\mathrm{d}y + \int P'w\mathrm{d}x + \int Q\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right) - \int w\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}x}\right) + Q'w + \int Q''\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right)$$

$$- \int w\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}\right) - \int w\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}y}\right) \qquad - \int w\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}Q''}{\mathrm{d}y}\right)$$

$$+ \int R\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}\right) \qquad - \int\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}x}\right) + R'\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right) \quad - \int\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}R''}{\mathrm{d}y}\right) + \int R'''\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}y^2}\right)$$

$$- \int\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\right) - \int\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}y}\right) \qquad - \int\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}R''}{\mathrm{d}x}\right) - \int\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}R'''}{\mathrm{d}y}\right)$$

$$+ \int w\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}R}{\mathrm{d}x^2}\right) \qquad + \int w\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}R'}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) \qquad + R''\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right) + \int w\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{dd}R''}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) \qquad + \int w\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{dd}R'''}{\mathrm{d}y^2}\right)$$

etc.

KOROLLAR 1

§170 Der erste Teil dieses Ausdruckes ist hinreichend ersichtlich, die übrigen können aber angenehm so umgeordnet werden, dass deren Beschaffenheit erfasst wird:

$$\delta \int w\mathrm{d}y \left\{ [][c]lcccccl P - \left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}\right) + \left(\frac{\mathrm{dd}R}{\mathrm{d}x^2}\right) - \text{etc.} - \left(\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}x}\right) + \left(\frac{\mathrm{dd}R'}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) + \left(\frac{\mathrm{dd}R''}{\mathrm{d}y^2}\right) \right\} + \int w\mathrm{d}x \left\{ [][c]lcccccl P \right.$$

$$+ \int\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}y\left\{ [][c]llcll Q - \left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\right) + \text{etc.} - \left(\frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}y}\right)\right\} + \int\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}x\left\{ [][c]llcll Q'' - \left(\frac{\mathrm{d}R'''}{\mathrm{d}y}\right) + \text{etc.} - \left(\frac{\mathrm{d}R''}{\mathrm{d}x}\right.\right.$$

$$+ \int\left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}\right)\mathrm{d}y(R - \text{etc.}) + \int\left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}y^2}\right)\mathrm{d}x(R''' - \text{etc.}) + \text{etc.}$$

$$w\left\{ [][c]llcll Q' - \left(\frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}x}\right) + \text{etc.} - \left(\frac{\mathrm{d}R''}{\mathrm{d}y}\right)\right\} + \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)(R' - \text{etc.}) + \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right)(R'' - \text{etc.}) + \text{etc.}$$

KOROLLAR 2

§171 Hier wird unter Aufbringung auch nur wenig Aufmerksamkeit bald klar werden, wie diese Teile weiter fortgesetzt werden müssen, wenn unter Umständen die Größe V Differentiale höherer Grade umfasst.

KOROLLAR 3

§172 In denen einen dieser Integralformeln, welche mit dem Differential $\mathrm{d}y$ behaftet sind, wird die Größe x konstant angenommen, welchen ein der Integrationsgrenze entsprechender Wert zugeteilt wird; in den anderen hingegen, die mit dem Differential $\mathrm{d}x$ behaftet sind, ist y konstant und der Integrationsgrenze gleich, woher klar ist, dass in den Integrationsgrenzen so x wie y einen konstanten Wert erhalten.

BEMERKUNG 1

§173 Diese Formel der Variation ist also an den Fall angepasst worden, in welchem die Integrationsgrenzen so x wie y konstante Werte zuteilen. Wie wenn beispielsweise die Frage über die Oberfläche war, ist die Integralformel $\int\int V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ auf das auf der Basis angenommen Rechteck $APYX$ (Fig. 7) zu beziehen und ihr Wert muss so bestimmt werden, dass für $x = 0$ und $y = 0$ genommen, welches die Anfangswerte sind, sie verschwindet, wonach $x = AX$ und $y = AP$ gesetzt werden muss, welches die endgültigen Werte sind; und nach dem selben Gesetz ist die gefundene Variation zu erledigen. Wenn daher nun die Oberfläche gesucht wird, in welcher der Wert der auf diese Weise bestimmten Formel $\int\int V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ maximal oder minimal wird, ist vor Allem notwendig, dass der erste Teil der Variation, der eine zweifache Integration involviert, zu Null gemacht wird, wie auch immer die Variation $\delta z = w$ angenommen wird, woher diese Gleichung entsteht

$$\begin{aligned} 0 = N &- \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right) + \left(\frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2}\right) - \left(\frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3}\right) + \text{etc.}, \\ &- \left(\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}y}\right) + \left(\frac{\mathrm{dd}Q'}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) - \left(\frac{\mathrm{d}^3R'}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\right) \\ &+ \left(\frac{\mathrm{dd}Q''}{\mathrm{d}y^2}\right) - \left(\frac{\mathrm{d}^3R''}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}\right) \\ &- \left(\frac{\mathrm{d}^3R'''}{\mathrm{d}y^3}\right), \end{aligned}$$

mit welcher die Natur der mit dieser Gestalt versehenen Oberfläche ausgedrückt werden wird. Aber die durch zweifache Integration eingehenden Konstanten müssen so bestimmt werden, dass den übrigen Anteilen der Variation genügt wird.

§174 Damit diese in sich schwer ergründbare Untersuchung an einem Beispiel illustriert wird, wollen wir festlegen, dass eine Oberfläche solcher Art gefunden werden muss, die unter allen anderen, die dieselbe Solidität einschließen, die kleinste ist. Für dieses Ziel ist zu erwirken, dass diese Doppelintegralformel

$$\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y(z + a\sqrt{1 + pp + p'p'}$$

ein Maximum oder Minimum wird. Weil also gilt

$$V = z + a\sqrt{1 + pp + p'p'},$$

wird sein

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 1$$

und auch

$$P = \frac{ap}{\sqrt{1 + pp + p'p'}} \quad \text{und} \quad P' = \frac{ap'}{\sqrt{1 + pp + p'p'}},$$

und daher

$$\mathrm{d}V = N\mathrm{d}z + P\mathrm{d}p + P'\mathrm{d}p'$$

während gilt

$$\mathrm{d}z = p\mathrm{d}x + p'\mathrm{d}y.$$

Daher wird die Natur der gesuchten Oberfläche mit dieser Gleichung ausgedrückt werden

$$N - \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right) - \left(\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}y}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad 1 = \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}y}\right).$$

Es ist aber

$$\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{a}{(1 + pp + p'p')^{\frac{3}{2}}}\left((1 + p'p')\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right) - pp'\left(\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}x}\right)\right),$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}y}\right) = \frac{a}{(1 + pp + p'p')^{\frac{3}{2}}}\left((1 + pp)\left(\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}y}\right) - pp'\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right)\right),$$

wo bemerkt werde, dass $(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}) = (\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}x})$ ist. Daher wird aber diese Gleichung erhalten

$$\frac{(1 + pp + p'p')^{\frac{3}{2}}}{a} = (1 + p'p')\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right) - 2pp'\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right) + (1 + pp)\left(\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}y}\right);$$

wie aber diese behandelt werden muss ist nicht klar, auch wenn leicht erkannt wird, dass in ihr die Gleichung für die sphärische Oberfläche $zz = cc - xx - yy$, ja sogar die zylindrische $zz = cc - yy$ enthalten ist.