

ÜBER KÖRPER, DEREN OBERFLÄCHE SICH IN DIE EBENE AUSBREITEN LASSEN*

Leonhard Euler

§1 Allbekannt ist die Eigenschaft des Zylinders und des Kegels, nach welcher es möglich ist, deren Oberfläche in die Ebene auszubreiten und diese Eigenschaft verallgemeinert sich auf alle zylindrischen und konischen Körper, deren Grundflächen irgendeine Form haben; dahingegen weist die Sphäre diese Eigenschaft nicht auf, weil ihre Oberfläche auf keine Weise in die Ebene ausgebreitet werden kann und auch nicht mit einer ebenen Oberfläche abgedeckt werden kann; daher ergibt sich die gleichermaßen aus Neugier hervorgehende wie bemerkenswerte Frage, ob außer Kegeln und Zylindern auch andere Geschlechter und Körpern existieren, deren Oberfläche sich ebenso in die Ebene ausbreiten lässt oder nicht, weswegen ich beschlossen habe, in dieser Abhandlung das folgende Problem zu behandeln:

Die allgemeine Gleichung für alle Körper zu finden, deren Oberfläche sich in die Ebene ausbreiten lassen, dessen Lösung ich auf verschiedene Weisen angehen werden.

*Originatitel: De solidis quorum superficiem in planum explicare licet, erstmals publiziert in *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 16, 1772, pp. 3-34, Nachdruck in *Opera Omnia: Series 1, Volume 28*, pp. 161 - 186, Eneström-Nummer E 419, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Anna Khramtsovskaya, im Rahmen des Hauptseminars Euler, Sommersemester 2015, JGU Mainz

1 ERSTE AUS LEDIGLICH ANALYTISCHEN PRINZIPIEN ABGELEITET LÖSUNG

§2 Es sei (siehe Abbildung 1) Z irgendein Punkt auf der Oberfläche des gesuchten Körpers, dessen Ort in üblicher Weise mit den drei zueinander orthogonalen Koordinaten $AX = x$, $XY = y$ und $YZ = z$ ausgedrückt werde, so dass die Gleichung zwischen diesen Koordinaten ausfindig zu machen ist, mit welcher dem Problem Genüge geleitet wird. Des Weiteren werden wir uns vorstellen, dass die Oberfläche des Festkörpers schon in der Ebene ausgebreitet worden ist und sie in Figur 2 dargestellt wird, in welcher jener Punkt Z auf V falle, dessen Ort so durch die zwei orthogonalen Koordinaten bestimmt werde, dass $OT = t$ und $TV = u$ ist, und es ist offenbar, dass die drei ersten Koordinaten x , y und z auf gewisse Weise von den zweien t und u abhängen müssen, und dass daher die einzelnen derer als gewisse Funktionen von t und u eingesetzt werden können.

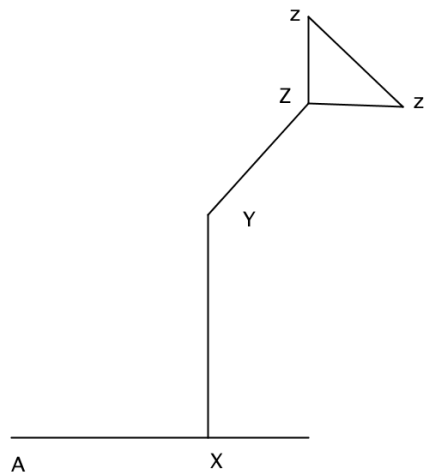


Abbildung 1: Oberfläche des Körpers im Raum

§3 Um nun zu dieser Bedingung passend in die Rechnung einzuführen, werden wir sie in Differentialen betrachten und, weil ja x sowie y und z Funktionen der zwei Variablen t und u bezeichnen, wollen deren Differentiale

mit diesen Formeln bestimmen:

$$dx = ldt + \lambda du, \quad dy = mdt + \mu du \text{ und } dz = ndt + \nu du$$

wo, weil die Buchstaben l, m, n und λ, μ, ν ebenso Funktionen der zwei Variablen t und u bedeuten, aus der Natur der Differentialen von Funktionen dieser Art bekannt ist, dann gelten muss:

$$\left(\frac{dl}{du}\right) = \left(\frac{d\lambda}{dt}\right), \left(\frac{dm}{du}\right) = \left(\frac{d\mu}{dt}\right) \text{ und } \left(\frac{dn}{du}\right) = \left(\frac{d\nu}{dt}\right).$$

§4 Nun wollen wir in der ausgebreitet Oberfläche (siehe Abbildung 2) außer dem Punkt V zwei andere unendlich nahe Punkte v und v' betrachten, für jenen von welchen die Koordinaten jene seien:

$$OT = t \text{ und } Tv = u + du,$$

für diesen hingegen diese:

$$Ot = t + dt \text{ und } tv' = u,$$

sodass die Punkte V und v die gemeinsame Abszisse $OT = t$ haben, aber die Punkte V und v' die gemeinsame Ordinate u . Daraus werden, nach Zeichnen der infinitesimalen Strecken Vv' und vv' , die Seiten des elementaren Dreiecks Vvv' so bestimmt, dass gilt:

$$Vv = du, \quad Vv' = dt \text{ und } vv' = \sqrt{du^2 + dt^2},$$

und wird leicht eingesehen, dass dieses selbe Dreieck auf der Oberfläche des gesuchten Körpers auch aufgefunden werden muss.

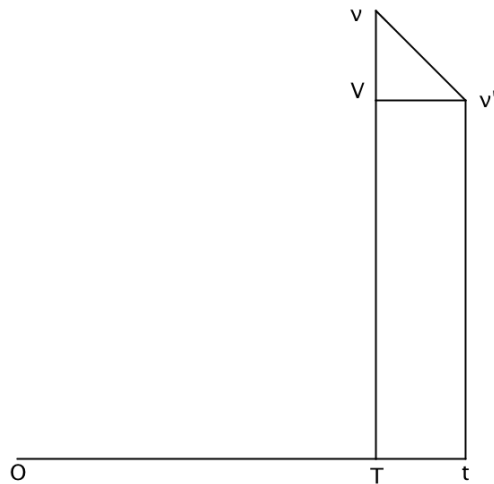


Abbildung 2: Oberfläche des Körpers in der Ebene

§5 Auf der Oberfläche des Körpers seien die Punkte z und z' die, die den Punkten v und v' entsprechen, und wir wollen sehen, auf welche Weise sich für jene Punkte z und z' die drei Koordinaten verhalten werden. So wie aber der Punkt Z durch die drei Koordinaten x , y und z bestimmt wird, welche einzelne Funktionen der zwei t und u sind, werden auch, weil ja für den Punkt v die Abszisse t dieselbe bleibt, die Ordinate u hingegen um ihr Differential du vermehrt wird, für den Punkt z des Körpers die drei Koordinaten so verhalten:

$$\text{I. } x + \lambda du, \quad \text{II. } y + \mu du, \quad \text{III } z + \nu du;$$

auf die gleiche Weise, weil für den Punkt v' die Ordinate u dieselbe bleibt, die Abszisse t hingegen um ihr Differential dt vermehrt wird, werden für den Punkt z' die drei Koordinaten sein:

$$\text{I. } x + l dt, \quad \text{II. } y + m dt, \quad \text{III } z + n dt;$$

§6 Es ist aber bekannt, wenn für irgendeinen Punkt auf der Oberfläche eines Körpers die Koordinaten x , y und z waren, für einen anderen sehr nahen Punkt hingegen x' , y' und z' , dass dann der Abstand diesen Punkt sein wird:

$$\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2};$$

daher werden wir für das Dreieck Zzz' die einzelnen Seiten haben:

$$1. \quad Zz = du\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$$

$$2. \quad Zz' = dt\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$$

$$3. \quad zz' = \sqrt{(\lambda du - ldt)^2 + (\mu du - mdt)^2 + (\nu du - ndt)^2}$$

oder

$$zz' = \sqrt{dt^2(ll + mm + nn) + du^2(\lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu) - 2dtdu(l\lambda + m\mu + n\nu)}$$

§7 Nun, weil die Oberfläche des Festkörpers vollkommen mit der ebenen Form (Fig.2) übereinstimmen muss, ist es notwendig, dass die Dreiecke Zzz' und Vvv' nicht nur ähnlich sind, sondern auch gleich sind und daher die Seiten übereinstimmen, natürlich:

$$I. \quad Zz = Vv, \quad II. \quad Zz' = Vv' \quad \text{und} \quad III. \quad zz' = vv',$$

woher wir die drei folgenden Gleichungen erlangen

$$I. \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

$$II. \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

$$III. \quad dt^2(l^2 + m^2 + n^2) + du^2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - 2dtdu(l\lambda + m\mu + n\nu) = dt^2 + du^2,$$

die dritte wird aber wegen der zwei ersten auf diese zurückgeführt

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0,$$

in welchen drei Gleichungen die Lösung unseres Problems enthalten ist, welcher eingesehen wird, dass sie sich auf das folgende analytische Problem reduziert: Nach Vorleger zwei Variablen t und u sechs Funktionen l, m, n und λ, μ, ν derer zu finden, die so beschaffen sind, dass den folgenden sechs Bedingungen Genüge geleitet wird:

$$I. \quad \left(\frac{dl}{du}\right) = \left(\frac{d\lambda}{dt}\right), \quad II. \quad \left(\frac{dm}{du}\right) = \left(\frac{d\mu}{dt}\right), \quad III. \quad \left(\frac{dn}{du}\right) = \left(\frac{d\nu}{dt}\right)$$

$$IV. \quad ll + mm + nn = 1, \quad V. \quad \lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = 1, \quad VI. \quad l\lambda + m\mu + n\nu = 0,$$

welches Problem für sich betrachtet auf den ersten Blick höchst schwierig scheint, von welchem es dennoch unten möglich sein wird, eine ziemlich gefällige Lösung darzubieten.

2 ZWEITE AUS GEOMETRISCHEN PRINZIPIEN HERGELEITETE LÖSUNG

§8 Um nun eine Lösung von den Grundprinzipien ausgehend abzuleiten, wollen wir entweder prismatisch oder pyramidale Körper betrachten, die, nach Wegnahme der Grundfläche, mit Papier abgedeckt verstanden werden, und auf diesem Papier werden gradlinige Falten bzw. Knicke entdeckt werden, die einander entweder parallel sind oder zu einem gewissen Punkt, natürlich der Pyramidenspitze, zusammenlaufen, welche geraden Linien, wie viele auch immer es waren, mit den Buchstaben *Aa, Bb, Cc, Dd* etc. bezeichnet werden. Wenn das Papier also in die Ebene ausgebreitet wird, werden in diesem dieselben gerade Linien *Aa, Bb, Cc* etc. auftauchen, und sie werden entweder zueinander parallel sein oder zu einem gewissen Punkt zusammenlaufen. Daher wird umgekehrt, wenn auf dem ebenen Papier gerade Linien von dieser Art gezeichnet werden, nach welchen sich das Papier dann ausbreiten lässt, dieses Papier geeignet sein, einen gewissen prismatischen oder pyramidalen Körper abzudecken.

§9 Ja es wird sogar möglich sein, auf diesem ebenen Papier die Geraden *Aa, Bb, Cc* nach Belieben zu zeichnen, sodass sie weder zueinander parallel sind, noch zu einem gewissen Punkt hinlaufen, solange sie sich nur nie kreuzen; wie in Abbildung 3 aufzeigt, denn auf welche Weise auch immer dieses Papier entlang dieser Geraden gefaltet wird, es wird immer möglich sein, sich einen Körper solcher Art vorzustellen, welchem dieses gefaltete Papier angepasst werden kann. Daher tritt es klar zutage, dass außer prismatischen und pyramidalen Körpern auch andere Geschlechter von Körpern gegeben sind, die auf diese Weise mit Papier abgedeckt werden können, und deren Oberfläche sich daher in die Ebene ausbreiten lässt.

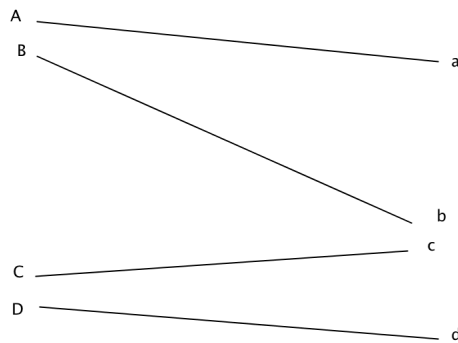


Abbildung 3: Parallele oder zusammenlaufende gerade Linien

§10 Auf der Oberfläche dieser Körper werden also auch wie viele Geraden Aa, Bb, Cc, Dd etc. auch immer gegeben sein, die, obgleich sie weder zueinander parallel sind noch zu einem gewissen Punkt hinlaufen, dennoch so beschaffen sein werden, dass zwei einander sehr nahe wie beispielweise Aa und Bb , oder Bb und Cc oder Cc und Dd etc., wenn sie nicht parallel sind, verlängert zumindest in einem Punkt zusammenlaufen, wenn dies nämlich nicht geschähe, wäre der zwischen zwei sehr nahen Geraden von dieser Art eingeschlossene Raum auf der Oberfläche nicht eben und deshalb wäre es nicht möglich, die Oberfläche selbst in die Ebene auszubreiten, wenn auf ihr auch noch so viele Linien Aa, Bb, Cc etc. gegeben wären. Daher schließen wir, dass es für die für unser Ziel genügenden Körper nicht ausreicht, dass es möglich ist, auf ihnen wie viele Geraden Aa, Bb, Cc etc. auch immer zu zeichnen, sondern darüber hinaus insbesondere verlangt wird, dass zwei einander sehr nahe in derselben Ebene liegen und der zwischen ihnen eingeschlossene Raum selbst planar ist.

§11 Nun wollen wir jene Linien Aa, Bb, Cc etc. ins Unendliche vermehren, damit unser Körper eine überall gekrümmte Fläche erhält, so wie es unser Problem aufgrund des Kontinuitätsgesetzes erfordert. Und wird freilich sofort klar, dass die Oberfläche von Körpern dieser Art so beschaffen sein muss, dass von jedem beliebigen auf ihr genommenen Punkt aus vermindert eine gerade Linie gezeichnet werden kann, die ganz auf der Oberfläche selbst liegt; aber diese Bedingung allein erschöpft die natürliche Beschaffenheit unseres Problems noch nicht, sondern es ist darüber hinaus notwendig, dass je zwei bestimmte einander sehr nahe Geraden zumindest in derselben Ebene liegen,

das heißt, dass, wenn sie nicht parallel sind, sie verlängert zumindest in einem einzigen Punkt zusammenlaufen. Daher, wenn jene einzelnen Geraden bis hin zum Zusammenlaufspunkt auf gewissen Kurven gelegen aufgefunden werden; weil diese nicht ganz in derselben Ebene gelegen ist, wird sie mit einer doppelten Krümmung oder zwei Krümmungen versehen sein und so beschaffen sein, dass ihre einzelnen Elemente, wenn sie verlängert werden, jene oben erwähnten Geraden Aa, Bb, Cc auf der Oberfläche des Körpers darbieten.

§12 So wie also ein gewisser unserem Problem entsprechender Körper zu einer gewissen Kurve mit doppelter Krümmung führt, so werden wir umgekehrt, nachdem nach Belieben eine gekrümmte Linie von dieser Art angenommen wurde, aus dieser einen Körper bestimmen können, welcher unserem Problem Genüge leistet. Eine solche Kurve werde nun zuerst in die Tischebene projiziert, und es sei (siehe Abbildung 4) alle ihre Projektion, für welche wir die Abszisse $AT = t$ und die Ordinate $TU = u$ setzen wollen, sodass die Gleichung zwischen t und u als gegeben angesehen wird, und die Gerade UM sei die Tangente dieser Kurve im Punkt U , die Gerade um hingegen die Tangente im sehr nahen Punkt u ; nach Festlegen dessen sei bVv die Kurve mit doppelter Krümmung selbst, deren Ordinate, orthogonal zu unserer Ebene, $UV = v$ gesetzt werde, und es sei v der nächste Punkt auf derselben Kurve, und von jedem der beiden Punkte V, v aus zeichne man Tangenten, von welchen jene, V, S die Gerade UM im Punkt S , diese, vs , die Gerade um im Punkt s schneide. Hier hätten wir freilich auf das Zeichnen der einander sehr nahen Tangenten in den Punkten u und v verzichten können, aber, weil sie im Folgenden nötig sein werden, schien es ratsam, diese hier in der Figur auch schon anzugeben.

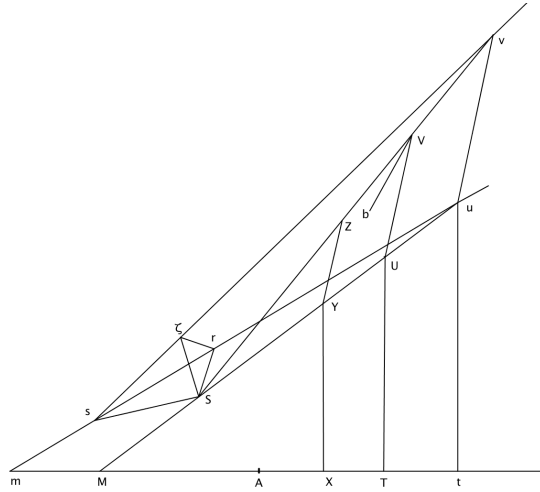


Abbildung 4: Kurve mit doppelter Krümmung im Raum

§13 Weil also die Natur der Kurve bVv mit zwei Gleichungen zwischen der Koordinaten $AT = t$, $TU = u$ und $UV = v$ ausgedrückt wird, wird der Buchstabe u wie v als Funktion von t angesehen werden können, woher zugleich die Lage jeder der beiden Tangenten UM und VS bestimmt werden wird, weshalb wir die Winkel $TUM = \zeta$ und $UVS = \vartheta$ nennen wollen, und, nachdem das Element $Tt = dt$ gesetzt wurde, wird gelten

$$du = \frac{dt}{\tan \zeta}, \quad Uu = \frac{dt}{\sin \zeta}$$

dann aber

$$dv = \frac{dt}{\sin \zeta \tan \vartheta}$$

und schließlich das Kurvenelement

$$Vv = \frac{dt}{\sin \zeta \sin \vartheta}$$

Für die Lage der Tangente werden wir aber haben

$$TM = u \tan \zeta, \quad UM = \frac{u}{\cos \zeta}$$

aber die Gerade

$$US = v \tan \vartheta \text{ und } VS = v \sec \vartheta = \frac{v}{\cos \vartheta}$$

§14 Weil ja nun die ganze Gerade VS auf der Oberfläche des Körpers liegt, welchen wir suchen, wollen wir auf ihr irgendeinen unbestimmten Punkt Z nehmen, woher wir, nachdem zur Tischebene das Lot ZY gefällt und von Y aus zur Achse AT die Normale YX gezeichnet wurde, für die gesamte Oberfläche die drei Koordinaten selbst haben werden, die wir oben betrachtet haben, natürlich $AX = x$, $XY = y$ und $YZ = z$, zwischen welchen also eine entsprechende Gleichung ausfindig gemacht werden muss, mit welcher die Natur dieser Oberfläche ausgedrückt wird.

§15 Für dieses Ziel wollen wir die unbestimmte Strecke $VZ = s$ nennen, welches also eine Variable in keinsten Weise vom Punkt V abhängende Größe ist, und daher sorgfältig von der Variable t zu trennen ist, von welchem nicht nur die zwei Ordinaten $TU = u$ und $UV = v$ Funktionen sind, sondern auch die zwei Variablen ζ und ϑ . Daher erlangen wir aber

$$ZY = z = v - s \cos \vartheta$$

und die Strecke

$$UY = s \sin \vartheta$$

woher wir weiter schließen

$$XY = y = u - s \sin \vartheta \cos \zeta$$

und

$$XT = s \sin \vartheta \sin \zeta,$$

und so erhalten wir schließlich die Abszisse

$$AX = x = t - s \sin \vartheta \sin \zeta,$$

sodass mit unseren zwei Variablen t und s unsere drei Koordinaten kurz und prägnant auf diese Weise bestimmt werden:

- I. $x = t - s \sin \vartheta \sin \zeta$
- II. $y = u - s \sin \vartheta \cos \zeta$
- III. $z = v - s \cos \vartheta$

§16 Wider jeder Erwartung geschah es also, dass wir sogar algebraische Formeln für die drei Koordinaten x, y, z gefunden haben, wenn freilich für die Variablen Größen u und v algebraische Funktionen von t angenommen werden. Denn diese Funktionen sind völlig unserem Belieben überlassen, nachdem sie aber beliebig angenommen worden sind, werden die zwei Winkel ζ und ϑ so bestimmt, dass

$$\tan \zeta = \frac{dt}{du}$$

gilt oder

$$\sin \zeta = \frac{dt}{\sqrt{dt^2 + du^2}}$$

dann aber

$$\cos \zeta = \frac{du}{\sqrt{dt^2 + du^2}}$$

und daher

$$\sin \vartheta = \frac{\sqrt{dt^2 + du^2}}{\sqrt{dt^2 + du^2 + dv^2}} \quad \text{und} \quad \cos \vartheta = \frac{dv}{\sqrt{dt^2 + du^2 + dv^2}}$$

Wenn daher aber umgekehrt die zwei Winkel ζ und ϑ durch die Variable t gegeben waren, werden die Ordinaten u und v selbst durch die folgenden Integralformeln ausgedrückt aufgefunden werden

$$u = \int \frac{dt}{\sqrt{\tan \zeta}} \quad \text{und} \quad v = \int \frac{dt}{\sqrt{\sin \zeta \tan \vartheta}}$$

§17 In diesen Formeln sind also gänzlich alle Körper, deren Oberfläche sich in die Ebene ausbreiten lässt, notwendigerweise enthalten. Es wird also vor Allem der Mühe wert sein zu zeigen, auf welche Weise die konischen Körper in diesen enthalten sind, weil ja die zylindrischen in den konischen bereits enthalten sind, wenn die Spitze ins Unendliche wegbewegt wird. Es sei also V die Kegelspitze, weil diese fest ist, werden die Koordinaten t, u und v konstante Werte haben. Weil ja aber nicht darin hindert, dass diese feste Spitze im festen Punkt A angenommen wird, werden wir $t = 0, u = 0$ und $v = 0$ setzen können, dann gehen aber wegen

$$\tan \zeta = \frac{dt}{du} \quad \text{und} \quad \tan \vartheta = \frac{dt}{dv \sin \vartheta} = \frac{\sqrt{dt^2 + du^2}}{dv}$$

diese Winkel ζ und ϑ unbestimmt hervor, dennoch so, dass der eine als Funktion der anderen angesehen werden kann, weil ja alles, was sich auf die Lage der Geraden VS bezieht, auf eine einzige Variable zu rechnen ist.

§18 Weil also $t = 0$, $u = 0$ und $v = 0$ ist, werden wir haben

$$\text{I. } x = -s \sin \vartheta \sin \zeta$$

$$\text{II. } y = -s \sin \vartheta \cos \zeta$$

$$\text{III. } z = -s \cos \vartheta$$

woher wird

$$\frac{x}{y} = \tan \zeta \text{ und } \frac{x}{z} = \tan \vartheta \sin \zeta$$

aus jener wird berechnet

$$\sin \zeta = -\frac{x}{\sqrt{xx + yy}}$$

und daher aus dieser

$$\tan \zeta = -\frac{\sqrt{xx + yy}}{z};$$

weil also $\tan \vartheta$ irgendeiner Funktion von $\tan \zeta$ gleich wird, werden wir eine solche Gleichung haben:

$$\frac{\sqrt{xx + yy}}{z} = \phi : \left(\frac{x}{y} \right)$$

und so wird die Größe $\frac{\sqrt{xx+yy}}{z}$ einer homogenen Funktion von keiner Dimension von x und y gleich werden und daher wird weiter die Größe z selbst einer homogenen Funktion von einer Dimension von x und y gleich werden, oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Gleichung zwischen x , y und z wird so beschaffen sein, dass in ihr die drei Variablen x , y und z überall dieselbe Anzahl an Dimensionen ergeben. Wenn daher eine der Koordinaten x , y , z ins Unendliche übergeht, wird die Gleichung für den Körper nur die übrigen zwei Koordinaten beinhalten, was das Kriterium für zylindrische Körper ist.

§19 Wir wollen uns hier nicht weiter damit aufhalten, noch andere unserem Problem Genüge leistende Körper zu entwickeln, weil wir unten, wo wir die dritte Methode angeben werden, um vieles leichter alle Geschlechter von

Körpern dieser Art erkennen können. In der, während diese zweite Methode uns eine leichte Lösung an die Hand gegeben hat, wohingegen es mit der ersten Methode kaum eine Lösung erhoffen ließ, werden wir nun auch die erste Lösung weiter entwickeln können und sogar jene analytischen Formeln, auf den ersten Blick höchst schwierig wirkend, auflösen können, woher sich viele neue Erkenntnisse für die Analysis ergeben werden. Um dies zu leisten, wird es nur nötig sein, diese zweite Lösung sorgfältig auf die Elemente der ersten zurückzuführen.

3 ANWENDUNG DER ZWEITEN METHODE AUF DIE ERSTE LÖSUNG

§20 Weil wir ja in der zweiten Lösung schon Formeln für die drei Koordinaten x , y und z gefunden haben, in welchen die Natur des Festkörpers enthalten ist, werden wir uns darum zu bemühen haben, dass wir auch die Formeln für die ebene Form, in welche die Oberfläche des Körpers ausgebreitet wird, ausfindig machen. Hier ist vor allem jene Kurve bVv mit doppelter Krümmung sorgfältiger zu betrachten, die natürlich durch die Ausbreitung jener Oberfläche auf die Ebene zurückgeführt wird. Weil diese Kurve aber durch Beugung auf unendlich viele Arten auf die Ebene zurückgeführt werden kann und sogar zu einer geraden Linie gestreckt werden kann, ist vor allem herauszufinden, nach welcher Vorschrift diese Reduktion auf die Ebene geschehen muss. Aus den oberen Paragraphen ist es aber offenbar, dass die Reduktion so geschehen muss, dass (Fig.4) zwei gewisse einander sehr nahe Tangenten, VS und vs , dieselbe Lage zueinander bewahren, oder dass der zwischen ihnen eingeschlossene Winkel Svs derselbe bleibt. Natürlich ist jene gekrümmte Linie bVv selbst so auf die Ebene zurückzuführen, dass je zwei ihrer benachbarten Elemente dieselbe Neigung zueinander beibehalten.

§21 Die Hauptaufgabe geht also darauf zurück, dass wir den unendlich kleinen Winkel Svs ausfindig machen, für welches Ziel mit dem Winkel MUm zu beginnen ist. Weil aber gilt

$$\text{Winkel } TUM = \xi \text{ und Winkel } tum = \xi + d\xi$$

folgt offenbar Winkel $MUm = d\xi$, des weiteren, weil wir schon oben $US = v \tan \vartheta$ gefunden haben, wird aus der Natur der Differentiale gelten

$$us = v \tan \vartheta + d(v \tan \vartheta) = v \tan \vartheta + dv \tan \vartheta + \frac{vd\vartheta}{\cos^2 \vartheta}$$

wo gilt

$$dv = \frac{dt}{\sin \zeta \tan \vartheta}$$

weil also gilt

$$Uu = \frac{dt}{\sin \zeta}$$

wird gelten

$$Us = v \tan \vartheta + dv \tan \vartheta + \frac{vd\vartheta}{\cos^2 \vartheta} - \frac{dt}{\sin \zeta} = v \tan \vartheta + \frac{vd\vartheta}{\cos^2 \vartheta}$$

Von S aus werde deshalb zu Us die Senkrechte Sr gezeichnet, dass man hat

$$rs = \frac{vd\vartheta}{\cos^2 \vartheta}$$

dann wird aber gelten

$$Sr = vd\zeta \tan \vartheta,$$

woher sich auch das Element Ss definieren ließe, wenn wir es freilich benötigen.

§22 Nun wollen wir vom Punkt r aus zur Tangente vs auch die Senkrechte $r\varrho$ zeichnen, dass sie nach Zeichnen von $S\varrho$ die Normale vs wird, wo zu bemerken ist, dass das Dreieck $Sr\varrho$ rechtwinklig mit rechten Winkel bei r sein wird, weil Sr zur Ebene sUV selbst normal ist. Weil nun gilt:

$$\text{Winkel } rs\varrho = 90^\circ - \vartheta$$

wird gelten

$$r\varrho = sr \cdot \sin rs\varrho = \frac{vd\vartheta}{\cos \vartheta}$$

woher erschlossen wird

$$S\varrho = \sqrt{vvd\zeta^2 \tan^2 \vartheta + \frac{vvd\vartheta^2}{\cos^2 \vartheta}} = \frac{v}{\cos \vartheta} \sqrt{d\zeta^2 \sin^2 \zeta + d\vartheta^2}$$

Weil also $Vs = \frac{v}{\cos \vartheta}$ gilt, wird der gefolgerte Winkel $SVs = \frac{Sv}{Vs} = \sqrt{d\zeta^2 \sin^2 \vartheta + d\vartheta^2}$

§23 So finden wir deshalb den Winkel SVs , in welchem zwei sehr nahe Elemente der Kurve zueinander geneigt sind, woher sehr schnell der Krümmungsradius dieser Kurve im Punkt V bestimmt werden kann, der natürlich dieser ist

$$\frac{Vv}{SVs} = \frac{dt}{\sin \zeta \sin \vartheta \sqrt{d\zeta^2 \sin^2 \vartheta + d\vartheta^2}},$$

welches Aufgabe wegen der doppelten Krümmung nicht verhindert wird, welche Krümmung nur beim Übergang zu beachten war. Weil aber hier die Kernangelegenheit im Elementarwinkel SVs liegt, wollen wir diesen Winkel $SVs = dw$ nennen, so dass gilt

$$dw = \sqrt{d\zeta^2 \sin^2 \vartheta + d\vartheta^2} \text{ oder } dw^2 - d\vartheta^2 = d\zeta^2 \sin^2 \vartheta$$

wo, weil die beiden Winkel ζ und ϑ durch die Variable t bestimmt werden, von welcher auch die beiden Ordinaten u und v Funktionen sind, es klar zutage tritt, dass auch der Winkel w als Funktion derselben Variable t angesehen werden muss.

§24 Nun sei gemäß der oben gegebenen Vorschriften (Fig.5) jene Kurve bVv doppelter Krümmung in der Ebene beschrieben, so dass der zwischen den sehr nahen Tangenten eingeschlossene Winkel $SVs = dw$ ist, und, nachdem diese Kurve durch die Ordinate PV auf die Achse OP bezogen wurde, ist es ersichtlich, dass der Winkel $PVS = w$ sein wird. Wir wollen aber die Koordinaten $OP = p$ und $PV = q$ setzen, und wir werden haben

$$\frac{dp}{dq} = \tan w$$

und das Kurvenelement

$$Vv = \frac{dp}{\sin w}$$

aber dahingegen war durch die vorhergehenden Koordinaten t, u und v mit den Winkeln ζ und ϑ dasselbe Element

$$Vv = \frac{dt}{\sin \zeta \sin \vartheta}$$

woher wir erlangen

$$dt \sin w = dp \sin \zeta \sin \vartheta,$$

welche mit jener Gleichung $\frac{dp}{dq} = \tan w$ verbunden für die gegenwärtigen Koordinaten p und q die folgenden Integralwerte geben wird

$$p = \int \frac{dt \sin w}{\sin \zeta \sin \vartheta} \text{ und } q = \int \frac{dt \cos w}{\sin \zeta \sin \vartheta};$$

nachdem diese Größen p und q gefunden worden sind, welche ebenso Funktionen derselben Variablen t sind, nehme man die Strecke $VZ = s$, welche die andere in die Richtung einzuführende Variable ist, und nach Fällen des Lotes ZT vom Punkt Z zur Achse finden wir

$$OT = p - s \sin w \text{ und } TZ = q - s \cos w.$$

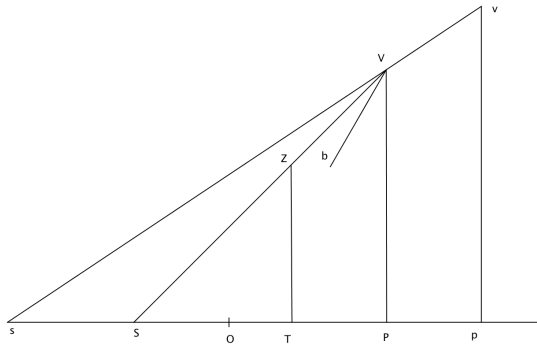


Abbildung 5: Kurve mit doppelter Krümmung in der Ebene

§25 Weil wir also für den auf die Ebene zurückgeführten Punkt Z eine Bestimmung erhalten haben, wollen wir seine Koordinaten $OT = T$ und $TZ = U$ setzen, die so durch die zwei Variablen t und s definiert werden, dass gilt

$$T = p - s \sin w = \int \frac{dt \sin w}{\sin \zeta \sin \vartheta} - s \sin w,$$

$$U = q - s \cos w = \int \frac{dt \cos w}{\sin \zeta \sin \vartheta} - s \cos w,$$

wo zu bemerken ist, dass der Winkel w so von den Winkel ζ und ϑ abhängt, dass gilt

$$dw = \sqrt{d\zeta^2 \sin^2 \vartheta + d\vartheta^2}$$

Diese Koordinaten T und U sind aber dieselben Koordinaten, welche wir in der ersten Lösung mit den Buchstaben t und u bezeichnet haben, woher nach derselben Änderung dort die eben da für den Festkörper gefundenen Formeln auf diese zurückgehen

$$dx = l dT + \lambda dU, \quad dy = m dT + \mu dU, \quad dz = n dT + \nu dU,$$

während die Bedingungen, die wir oben gefunden haben, dieselben bleiben, selbstredend:

$$ll + mm + nn = 1, \quad \lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = 1 \quad \text{und} \quad l\lambda + m\mu + n\nu = 0$$

§26 Hier haben wir aber für dieselben Koordinaten des Körpers, also x , y und z , die folgenden Werte gefunden:

$$x = t - s \sin \vartheta \sin \zeta, \quad y = u - s \sin \vartheta \cos \zeta \quad \text{und} \quad z = v - s \cos \vartheta,$$

welche wegen

$$du = \frac{dt}{\tan \zeta} \quad \text{und} \quad dv = \frac{dt}{\sin \zeta \tan \vartheta}$$

differenziert liefern:

$$\begin{aligned} dx &= dt - ds \sin \vartheta \sin \zeta - s d\zeta \sin \vartheta \cos \zeta - s d\vartheta \sin \zeta \cos \vartheta, \\ dy &= \frac{dt}{\tan \zeta} - ds \sin \vartheta \cos \zeta + s d\zeta \sin \zeta \sin \vartheta - s d\vartheta \cos \zeta \cos \vartheta, \end{aligned}$$

$$dz = \frac{dt}{\sin \zeta \tan \vartheta} - ds \cos \vartheta + sd\vartheta \sin \vartheta.$$

§27 Bevor wir weiter fortschreiten, wird es nicht unpassend sein, die wesentlichen Relationen dieser Formeln angemerkt zu haben, und freilich erhalten wir zuerst für die endlichen Formeln durch Elimination von s die Relationen:

$$x \cos \zeta - y \sin \zeta = t \cos \zeta - u \sin \zeta$$

$$x \sin \zeta - y \cos \zeta = t \sin \zeta + u \cos \zeta - s \sin \vartheta,$$

$$x \sin \zeta \cos \vartheta + y \cos \zeta \cos \vartheta - z \sin \vartheta = t \sin \zeta \cos \vartheta + u \cos \zeta \cos \vartheta - v \sin \vartheta.$$

Des Weiteren für die Differentiale die folgenden:

$$\text{I.} \quad dx \cos \zeta - dy \sin \zeta = -sd\zeta \sin \vartheta$$

$$\text{II.} \quad dx \sin \zeta + dy \cos \zeta = \frac{dt}{\sin \zeta} - ds \sin \vartheta - sd\vartheta \cos \vartheta$$

$$\text{und III.} \quad dx \sin \zeta \cos \vartheta + dy \cos \zeta \cos \vartheta - dz \sin \vartheta = -sd\vartheta$$

§28 Weil wir ja aber in dieser neuen Rechnung alles auf die zwei neuen Variablen t und s zurückgeführt haben, während wir in der ersten Rechnung die zwei Variablen T und U gebraucht haben, wollen wir sehen, auf welche Weise diese durch jene ausgedrückt werden, und aus den für T und U gefundenen Formeln haben wir freilich sofort:

$$dT = \frac{dt \sin w}{\sin \zeta \sin \vartheta} - ds \sin w - sdw \cos w$$

und

$$dU = \frac{dt \cos w}{\sin \zeta \sin \vartheta} - ds \cos w + sdw \sin w,$$

wenn wir diese Werte in den zuvor gefundenen Formeln dx , dy und dz einsetzen und die zwei Variablen t und s sorgsam voneinander trennen, werden wir die folgenden Ausdrücke erlangen:

$$dx = dt \frac{l \sin w + \lambda \cos w}{\sin \zeta \sin \vartheta} - sdw(l \cos w - \lambda \sin w) - ds(l \sin w + \lambda \cos w)$$

$$dy = dt \frac{m \sin w + \mu \cos w}{\sin \zeta \sin \vartheta} - sdw(m \cos w - \mu \sin w) - ds(m \sin w + \mu \cos w)$$

$$dz = dt \frac{n \sin w + \nu \cos w}{\sin \zeta \sin \vartheta} - sdw(n \cos w - \nu \sin w) - ds(n \sin w + \nu \cos w)$$

die wir mit denen, die durch die zweite Lösung hervorgegangen sind, vergleichen wollen, welche sind

$$dx = dt - sd\zeta \sin \vartheta \cos \zeta - sd\vartheta \sin \zeta \cos \vartheta - ds \sin \zeta \sin \vartheta,$$

$$dy = \frac{dt}{\tan \zeta} + sd\zeta \sin \zeta \sin \vartheta - sd\vartheta \cos \zeta \cos \vartheta - ds \cos \zeta \sin \vartheta,$$

$$dz = \frac{dt}{\sin \zeta \tan \vartheta} + sd\vartheta \sin \vartheta - ds \cos \vartheta;$$

und zuerst müssen die mit ds behafteten Glieder auf beiden Seiten gleich sein, woher wir diese Gleichungen erhalten:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & l \sin w + \lambda \cos w = \sin \zeta \sin \vartheta \\ \text{II.} \quad & m \sin w + \mu \cos w = \cos \zeta \sin \vartheta \\ \text{III.} \quad & n \sin w + \nu \cos w = \cos \vartheta \end{aligned}$$

§29 Wenn diese Werte nun in den ersten Gliedern, die das Differential dt und die davon abhängenden $d\zeta$, $d\vartheta$ und dw involvieren, eingesetzt werden, werden wir die folgenden Gleichungen erhalten:

$$l \cos w - \lambda \sin w = \frac{d\zeta \cos \zeta \sin \vartheta + d\vartheta \sin \zeta \cos \vartheta}{dw} = \frac{d(\sin \zeta \sin \vartheta)}{dw},$$

$$m \cos w - \mu \sin w = -\frac{d\zeta \sin \zeta \sin \vartheta + d\vartheta \cos \zeta \cos \vartheta}{dw} = \frac{d(\cos \zeta \sin \vartheta)}{dw},$$

$$n \cos w - \nu \sin w = -\frac{d\vartheta \sin \vartheta}{dw} = \frac{d \cos \vartheta}{dw}.$$

Hier verdient es angemerkt zu werden, dass aus diesen gefundenen Formeln die andere Variable s völlig herausgegangen ist, so dass nun die Größen $l, \lambda, m, \mu, n, \nu$ durch die eine einzige Variable t bestimmt werden und die andere s hat nicht beinhalten, während die Größen T und U die beiden Variablen s und t verwickeln.

§30 Nun haben wir für die Bestimmung der Funktionen l und λ diese zwei Gleichungen gefunden:

$$l \sin w + \lambda \cos w = \sin \zeta \sin \vartheta,$$

$$l \cos w - \lambda \sin w = \frac{d(\sin \zeta \sin \vartheta)}{dw}.$$

Daher gibt die erste mal $\sin w$ + die zweite mal $\cos w$:

$$l = \sin \zeta \sin \vartheta \sin w + \cos w \frac{d(\sin \zeta \sin \vartheta)}{dw},$$

aber I. $\cos w$ – II. $\sin w$ gibt:

$$\lambda = \sin \zeta \sin \vartheta \cos w - \sin w \frac{d(\sin \zeta \sin \vartheta)}{dw}.$$

Auf die gleiche Weise werden die übrigen Buchstaben aufgefunden ,

$$m = \cos \zeta \sin \vartheta \sin w + \cos w \frac{d(\cos \zeta \sin \vartheta)}{dw},$$

$$\mu = \cos \zeta \sin \vartheta \cos w - \sin w \frac{d(\cos \zeta \sin \vartheta)}{dw},$$

$$n = \cos \vartheta \sin w + \frac{\cos w d \cos \vartheta}{dw},$$

$$v = \cos \vartheta \cos w - \frac{\sin w d \cos \vartheta}{dw}.$$

Man betrachte also diese geeigneten Werte für die Buchstaben $l dT + \lambda dU$, $m dT + \mu dU$ und $n dT + v dU$ integrierbar sind, und daher die Integrale selbst leicht dargeboten werden können, die natürlich sind

$$x = t - s \sin \vartheta \sin \zeta, \quad y = u - s \sin \vartheta \cos \zeta, \quad z = v - s \cos \vartheta.$$

§31 Weil ja nun unsere beiden Lösungen völlig miteinander übereinstimmen müssen, besteht auch kein Zweifel, dass auch die Übungen oben erwähnten Bedingungen erfüllt sind, es wird natürlich gelten:

$$ll + mm + nn = 1, \quad \lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = 1, \quad l\lambda + m\mu + n\nu = 0$$

Um dies zu zeigen, wollen wir der Kürze wegen festlegen

$$\sin \zeta \sin \vartheta = p, \quad \cos \zeta \sin \vartheta = q \quad \text{und} \quad \cos \vartheta = r,$$

sodass gilt

$$pp + qq + rr = 1 \text{ und daher } pdp + qdq + rdr = 0,$$

nun wird aber, weil wir haben

$$l = p \sin w + \frac{dp}{dw} \cos w,$$

$$m = q \sin w + \frac{dq}{dw} \cos w,$$

$$n = r \sin w + \frac{dr}{dw} \cos w,$$

$$\lambda = p \cos w - \frac{dp}{dw} \sin w,$$

$$\mu = q \cos w - \frac{dq}{dw} \sin w,$$

$$\nu = r \cos w - \frac{dr}{dw} \sin w,$$

Nach Durchführen der Rechnung auffinden

$$ll + mm + nn = (pp + qq + rr) \sin^2 w + \frac{2 \sin w \cos w}{dw} (pdp + qdq + rdr) + \frac{\cos^2 w}{dw^2} (dp^2 + dq^2 + dr^2)$$

oder

$$ll + mm + nn = \sin^2 w + \frac{\cos^2 w}{dw^2} (dp^2 + dq^2 + dr^2)$$

und so kreist die ganze Frage um das Finden des Wertes $dp^2 + dq^2 + dr^2$.

Weil aber gilt

$$dp = d\zeta \cos \zeta \sin \vartheta + d\vartheta \sin \zeta \cos \vartheta$$

$$dq = -d\zeta \sin \zeta \sin \vartheta + d\vartheta \cos \zeta \cos \vartheta$$

und

$$dr = -d\vartheta \sin \vartheta$$

erschließen wir

$$dp^2 + dq^2 + dr^2 = d\zeta^2 \sin^2 \vartheta + d\vartheta^2 = dw^2,$$

so dass nun gewiss gilt,

$$\frac{dp^2 + dq^2 + dr^2}{dw^2} = 1.$$

weshalb es offenbar ist, dass gelten wird:

$$ll + mm + nn = \sin^2 w + \cos^2 w = 1$$

§32 Auf gleiche Weise werden wir für die griechischen Buchstaben auffinden:

$$\lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = (pp + qq + rr) \cos^2 w - \frac{2 \sin w \cos w}{dw} (pdp + qdq + rdr) + \frac{\sin^2 w}{dw^2} (dp^2 + dq^2 + dr^2),$$

welche natürlich wie zuvor liefert

$$\lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = \cos^2 w + \sin^2 w = 1.$$

Es ist also übrig, dass wir die dritte Eigenschaft erforschen, für welche wir erlangen:

$$l\lambda = pp \sin w \cos w - \frac{pdp}{dw} \sin^2 w + \frac{pdp}{dw} \cos^2 w - \frac{dp^2}{dw^2} \sin w \cos w,$$

$$m\mu = rr \sin w \cos w - \frac{rdq}{dw} \sin^2 w + \frac{rdq}{dw} \cos^2 w - \frac{dq^2}{dw^2} \sin w \cos w,$$

$$nv = rr \sin w \cos w - \frac{rdr}{dw} \sin^2 w + \frac{rdr}{dw} \cos^2 w - \frac{dr^2}{dw^2} \sin w \cos w,$$

nach Sammeln welcher zu einer Summe werden wird

$$l\lambda + m\mu + nv = \sin w \cos w - \sin w \cos w = 0.$$

Und auf diese Weise haben wir jenes oben erwähnte analytische Problem (§7) auf glücklichste gelöst, welche Lösung sich kurz dargestellt so verhält.

4 ANALYTISCHES PROBLEM

§33 Nach Vorlegen der zwei Variablen T und U sechs so beschaffene Funktionen derer l, m, n und λ, μ, ν , zu finden, dass den folgenden sechs Bedingungen Genüge geleistet wird:

$$\begin{array}{llll} \text{I.} & \left(\frac{dl}{dU}\right) = \left(\frac{d\lambda}{dT}\right), & \text{II.} & \left(\frac{dm}{dU}\right) = \left(\frac{d\mu}{dT}\right), & \text{III.} & \left(\frac{dn}{dU}\right) = \left(\frac{d\nu}{dT}\right), \\ \text{IV.} & ll + mm + nn = 1, & \text{V.} & \lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = 1, & \text{VI.} & l\lambda + m\mu + n\nu = 0. \end{array}$$

5 LÖSUNG

Nach Einführung der zwei neuen Variablen s und t in die Rechnung, nehme man irgendwelche zwei Funktionen ζ und ϑ dieser zweiten t , welche Funktionen natürlich wie Winkel betrachtet werden, aus welchen der neue Winkel w gebildet wird, so dass gilt

$$dw = \sqrt{d\zeta^2 \sin^2 \vartheta + d\vartheta^2},$$

dann bestimme man aber daraus die zwei Variablen T und U so, dass gilt

$$T = \int \frac{dt \sin w}{\sin \zeta \sin \vartheta} - s \sin w,$$

$$U = \int \frac{dt \cos w}{\sin \zeta \sin \vartheta} - s \cos w,$$

wonach auch die sechs gesuchten Funktionen so verhalten werden

$$l = \sin \zeta \sin \vartheta \sin w + \frac{\cos w}{dw} d(\sin \zeta \sin \vartheta),$$

$$\lambda = \sin \zeta \sin \vartheta \cos w - \frac{\sin w}{dw} d(\sin \zeta \sin \vartheta),$$

$$m = \cos \zeta \sin \vartheta \sin w + \frac{\cos w}{dw} d(\cos \zeta \sin \vartheta),$$

$$\mu = \cos \zeta \sin \vartheta \cos w - \frac{\sin w}{dw} d(\cos \zeta \sin \vartheta),$$

$$n = \cos \vartheta \sin w + \frac{\cos w}{dw} d \cos \vartheta,$$

$$\nu = \cos \vartheta \cos w - \frac{\sin w}{dw} d \cos \vartheta,$$

Mit diesen Werten werden aber die drei folgenden Differentialformeln

$$\text{I.} \quad l dT + \lambda dU, \quad \text{II.} \quad m dT + \mu dU, \quad \text{III.} \quad n dT + \nu dU,$$

in welchen natürlich die drei ersten Bedingungen enthalten sind, nicht nur integrierbar gemacht, sondern auch die Integrale selbst werden auf die folgende Weise ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \int (l dT + \lambda dU) = t - s \sin \vartheta \sin \zeta, \\ \text{II.} \quad & \int (m dT + \mu dU) = \int \frac{dt}{\tan \zeta} - s \sin \vartheta \cos \zeta, \\ \text{III.} \quad & \int (n dT + \nu dU) = \int \frac{dt}{\sin \zeta \tan \vartheta} - s \cos \vartheta, \end{aligned}$$

welche Lösung daher für vollständig gehalten werden muss, deshalb weil sie zwei beliebige Funktionen umfasst.

§34 Diese Entwicklung ist ohne Zweifel von größter Bedeutung und verdient es besonders, dass wir mit allem Eifer nach ihren Elementen forschen. Und zuerst werden wir freilich, weil wir nach Einführen der Buchstaben p, q und r in solcher Weise, dass gilt

$$pp + qq + rr = 1 \text{ und } dp^2 + dq^2 + dr^2 = dw^2,$$

gefunden haben

$$l \sin w + \lambda \cos w = p \text{ und } l \cos w - \lambda \sin w = \frac{dp}{dw},$$

wenn wir jene differenzieren, haben

$$dl \sin w + d\lambda \cos w + ldw \cos w - \lambda dw \sin w = dp$$

und daher

$$dl \sin w + d\lambda \cos w = 0,$$

so dass gilt

$$\frac{d\lambda}{dl} = -\tan w.$$

Auf gleiche Weise werden wir aber auch auffinden

$$\frac{d\mu}{dm} = -\tan w \text{ und } \frac{d\nu}{dn} = -\tan w$$

Man betrachte diese wunderschöne Eigenschaft, welche zwischen unseren sechs Funktionen l, m, n und λ, μ, ν besteht, welche sich auf diese Weise dargestellt lässt, dass gilt

$$dl : d\lambda = dm : d\mu = dn : d\nu = -\cos w : \sin w$$

§35 Wenn wir daher also diese Dinge sorgfältig abwägen, entdecken wir gewisse Anhaltspunkte, welchen folgend wir eine direkte Lösung dieses sehr schwierigen Problems entdecken können werden. So sollte natürlich nach Festlegen dieser Gleichung

$$dx = l dT + \lambda dU, \quad dy = m dT + \mu dU, \quad dz = n dT + \nu dU$$

zuerst bemerkt werden, dass die Größen l, m, n und λ, μ, ν Funktionen einer einzigen neuen Variablen sein müssen, die dennoch zu den grundlegenden Variablen T und U in gewisser Beziehung stehen. Es sei also w diese neue Variable, von welcher unsere sechs Größen gewisse Funktionen seien. Und wir haben schon gesehen, wenn die Buchstaben p, q und r solche Funktionen von w bedeuten, dass gilt

$$pp + qq + rr = 1 \text{ und } dp^2 + dq^2 + dr^2 = dw^2$$

durch Setzen von:

$$l = p \sin w + \frac{dp}{dw} \cos w,$$

$$m = q \sin w + \frac{dq}{dw} \cos w,$$

$$n = r \sin w + \frac{dr}{dw} \cos w,$$

$$\lambda = p \cos w - \frac{dp}{dw} \sin w,$$

$$\mu = q \cos w - \frac{dq}{dw} \sin w,$$

$$\nu = r \cos w - \frac{dr}{dw} \sin w,$$

dass sie diese drei Bedingungen schon erfüllen, natürlich:

$$ll + mm + nn = 1, \quad \lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = 1 \text{ und } l\lambda + m\mu + n\nu = 0,$$

außerdem haben wir daraus aber gerade diese außerordentliche Eigenschaft abgeleitet, dass gilt

$$d\lambda = -dl \tan w, \quad d\mu = -dm \tan w \quad \text{und} \quad d\nu = -dn \tan w,$$

welche uns außerordentlichen Nutzen leisten wird, und die übrigen Bedingungen zu erfüllen, wie bald klar werden wird.

§36 Diese drei Bedingungen erfordern es natürlich, dass jene für dx, dy und dz dargebotenen Differentialformeln integrierbar gemacht werden, für welches Ziel jene Relation, die zwischen den zwei Variablen T und U und w einhergehen muss, ausfindig gemacht werden muss. Um dies zu leisten, werden jene Differentialgleichung durch Integration in die folgenden Formeln umgewandelt:

$$\begin{aligned} x &= lT + \lambda U - \int (Tdl + Ud\lambda), \\ y &= mT + \mu U - \int (Tdm + Ud\mu), \\ z &= nT + \nu U - \int (Tdn + Udv); \end{aligned}$$

nun werden aber diese drei neuen Integralformeln die folgenden Formen annehmen:

$$\begin{aligned} x &= lT + \lambda U - \int dl(T - U \tan w) \\ y &= mT + \mu U - \int dm(T - U \tan w) \\ z &= nT + \nu U - \int dn(T - U \tan w). \end{aligned}$$

Weil also l, m und n Funktionen derselben Variable w sind, ist es offenbar, dass diese drei Integralformeln in der Tat integrierbar gemacht werden, wenn nur der Ausdruck $T - U \tan w$ irgendeine Funktion der neuen Variable w war; daher, wenn eine solche Funktion mit dem Buchstaben Ω ausgedeutet wird, werden wir haben

$$T - U \tan w = \Omega$$

mit welcher Gleichung jene Relation, die zwischen den Variablen T, U und w bestehen muss, bestimmt wird.

§37 Daher, wenn für Ω nach Belieben irgendeine Funktion von w angenommen wird, von welcher auch, wie wir gesehen haben, die Buchstaben p, q und r gewisse Funktionen sind, mit welchen wir die Buchstaben l, m, n und λ, μ, ν bestimmt haben, müssen die zwei Variablen T und U so bestimmt sein, dass $T = \Omega + U \tan w$ wird; natürlich wollen wir nun nur die zwei Variablen U und w in der Rechnung beibehalten und anstelle von T diesen Wert einführen; dann werden unsere drei Integralformeln also so dargestellt werden können:

$$x = l\Omega + lU \tan w + \lambda U - \int \Omega dl,$$

$$y = m\Omega + mU \tan w + \mu U - \int \Omega dm,$$

$$z = n\Omega + nU \tan w + \nu U - \int \Omega dn,$$

welche Ausdrücke leicht in den folgenden verwandelt werden

$$x = U(l \tan w + \lambda) + \int l d\Omega = \frac{Up}{\cos w} + \int p \sin w d\Omega + \int \frac{dp d\Omega}{dw} \cos w,$$

$$y = U(m \tan w + \mu) + \int m d\Omega = \frac{Uq}{\cos w} + \int q \sin w d\Omega + \int \frac{dq d\Omega}{dw} \cos w,$$

$$z = U(n \tan w + \nu) + \int n d\Omega = \frac{Ur}{\cos w} + \int r \sin w d\Omega + \int \frac{dr d\Omega}{dw} \cos w.$$

6 DRITTE AUS DER THEORIE VON LICHT UND SCHATTEN ABGELEITETE LÖSUNG UNSERES PROBLEMS

§38 Was für gewöhnlich in der Optik über Licht und Schatten gelehrt wird ist meist auf den höchst speziellen Fall eingeschränkt, in welchem so leuchtendem wie dunklem Körper, von welchem ein Schatten geworfen wird, eine sphärische Form zugeteilt wird, woher ein entweder konischer oder zylindrischer, entweder zusammenlaufend oder auseinander laufend, entspringt, je nachdem ob der dunkle Körper der gleiche oder kleiner bzw. größer als der leuchtende war. Wann immer aber die Form des leuchtenden oder dunklen sogar von beiden Körper von der Kugel abweicht, werden wir kaum etwas in Büchern, die über diese Sache verfasst worden sind, finden, womit wir zufrieden sein können; ja es entspringt sogar, wenn wir diesen Gegenstand im Allgemeinen behandeln wollen, und jedem der beiden Körper, leuchtendem

und dunklem, irgendwelche Formen geben, eine höchst schwierige Frage und sie ist sogar zu dem Teil der Analysis des Unendlichen über Funktionen vor zwei oder mehreren Variablen, der vor nicht allzu langer Zeit erst zu entwickeln begonnen worden ist, zu rechnen.

§39 Was aber insbesondere von dieser Theorie unser gegenwärtiges Unterfangen betrifft, ist, dass das die Schattenformen immer so beschaffen sind, dass deren Oberfläche sich in die Ebene ausbreiten lässt, woher umgekehrt eingesehen wird, wenn wir für irgendeine Form so des leuchtenden wie des dunklen Körpers die Form des Schattens bestimmen können, dass dann auch zugleich unser Problem vollkommen gelöst sein wird.

§40 Dass aber die Schattenform unserem Problem unterworfen ist, kann leicht auf diese Weise gezeigt werden. Weil ja der Schatten von den äußersten Strahlen des leuchtenden Körpers begrenzt wird, welche zugleich den dunklen Körper streifen, begrenzt wird, tritt es zuerst klar zutage, dass auf der Schattenfläche unendlich viele gerade Linien gegeben sind, weil ja die einzelnen Strahlen in geraden Linien fortschreiten; außerdem werden aber alle diese Strahlen jeden der beiden Körper, so den leuchtenden wie den dunklen, berühren, woher, wenn sich irgendeine Ebene vorgestellt wird, welche diese zwei Körper zugleich berühre und der Berührungspunkt beim Leuchtkörper welche mit M gekennzeichnet, beim dunklen hingegen mit dem Buchstaben m , es offenkundig ist, dass die verlängerte Linie Mm den Lichtstrahl darbietet, von welchem der Schatten begrenzt wird, was auch über die anderen sehr nahen Strahlen m verstehen ist, die vom Punkt M aus über derselben Tangentialebene emittiert werden, welche natürlich ebenso als Tangenten unseres dunklen Körpers angesehen werden können, woher die vorzügliche Eigenschaft unseres Problems hervortritt, dass je zwei einander sehr nahe auf der Oberfläche zu ziehende Geraden zugleich in derselben Ebene aufgefunden werden.

§41 Aber dieser Theorie von Licht und Schatten erschreckt sich allzu weit, als dass es der Platz erlaubt sie hier in angemessener Weise zu behandeln; wir entnehmen daraus nur so viel, wie es für die Erledigung unseres Unterfangen genügt. Nachdem aber die Form von leuchtendem wie dunklem Körper ignoriert worden ist, wollen wir hier nur die Form eines quasi konischen Schattens betrachten, für welches Ziel wir zwei einander parallele und in einen gegebenen Abstand voneinander entfernte Schnitte von ihm anschauen; weil sich diesen irgendwelche Formen zuteilen lassen, ist es offenbar, dass diese Betrachtung

vollkommen alle Schattenform umfasst.

§42 Es seien also (siehe Abbildung 6) diese zwei Schnitte nochmal zur Tischebene und perpendicular auf der Geraden Aa stehen, und der erste sei freilich die Kurve BUU' , deren Natur mit irgendeiner Gleichung zwischen den Koordinaten $AT = T$ und $TU = U$ ausgedrückt werde; auf gleiche Weise sei buu' die andere von der ersten wie auch immer verschiedene Kurve, für welche eine Gleichung zwischen den Koordinaten $at = t$, $tu = u$ gegeben sei, die Strecke zwischen diesen Schnitten werde aber $Aa = a$ gesetzt, hier wird es freilich möglich sein, den einen Schnitt BUU' als ebene leuchtende Scheibe zu betrachten, und während der andere buu' eine dunkle ebene Scheibe darstellt, wird aus den Lichtstrahlen jener Schattenkegel selbst entspringen, welchen wir betrachten.

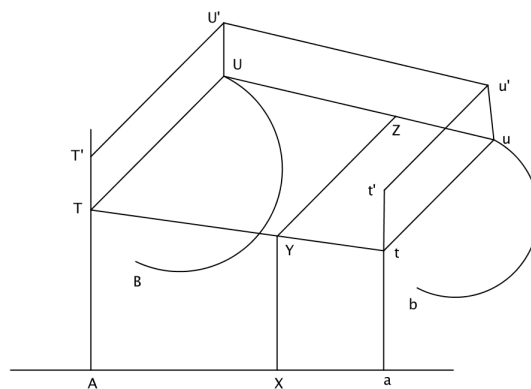


Abbildung 6: Zwei zueinander parallele Kurven

§43 Die Punkte U und u seien aber so angenommen worden, dass die verlängerte Geraden Uu den Schatten begrenzenden Strahl bedeutet, weil dieser Schatten in der jede der beiden Scheiben berührenden Ebene gelegen sein muss, ist es notwendig, dass die beiden Elemente UU' und uu' mit der Geraden Uu in derselben Ebene liegen, woher es klar ist, dass die zwei Elemente zueinander parallel sein müssen, woraus folgt, dass zwischen den Differentialen dasselbe Verhältnis bestehen muss, sodass $dT : dU = dt : du$ ist, woher, wenn $dU = \varphi dT$ gesetzt wird, auch $du = \varphi dt$ sein wird.

§44 Diese Größe φ werde also die wesentliche Variable Größe angesehen, durch welche alle übrigen auf die folgende Weise bestimmt werden. Für die

erste Kurve BU sei T irgendeine Funktion von φ , von deren Natur natürlich die Beschaffenheit der Kurve BUU' bestimmt wird, dann wird natürlich gelten

$$dU = \varphi dT \quad \text{und} \quad U = \int \varphi dT,$$

woher, weil die beiden Kurven vollkommen unserem Belieben überlassen sind, sich für die Buchstaben T und t irgendwelche Funktionen von φ annehmen lassen, nach Festlegen von diesen zugleich die beiden Ordinaten U und u bestimmt werden.

§45 Nun werde auf der Geraden Uu irgendein Punkt Z genommen, weil dieser auf der Oberfläche liegt, die wir ausfindig machen wollen, wollen wir von da aus zur Tischebene das Lot ZY fällen, das die Gerade Tt schneidet, und von Y aus werde zu unserer Achse Aa die Normale YX gezeichnet, dass wir für den unbestimmten Punkt Z drei Koordinaten erhalten, welche wir wie folgt benennen wollen:

$$AX = x, \quad XY = y \quad \text{und} \quad YZ = z,$$

und nun wird es leicht sein, eine Gleichung zwischen diesen drei Koordinaten, mit welchen die Natur der gesuchten Oberfläche ausgedrückt wird, zu finden.

§46 Die Prinzipien der Geometrie geben uns freilich sofort diese Analogien an die Hand:

$$T - t : a = T - y : x, \quad \text{oder} \quad Tx - tx = aT - ay,$$

$$U - u : a = U - z : x, \quad \text{oder} \quad Ux - ux = aU - az,$$

woher es möglich sein wird, durch die beiden Koordinaten y und z zu bestimmen, weil wir freilich haben:

$$y = T - \frac{x(T-t)}{a} \quad \text{und} \quad z = U - \frac{x(U-u)}{a};$$

wenn daraus nämlich aus den zwei Gleichungen die Variable φ mit den davon abhängenden T, t und U, u eliminiert werden, wird eine die Natur unserer Oberfläche ausdrückende Gleichung resultieren.

§47 Eine solche Elimination brauchen wir aber nicht zwingend, weil die Natur der Oberfläche um vieles deutlicher aus den zwei gefundenen Gleichungen erkannt werden kann, der per se schon so einfach sind, dass es ein

Unrecht wäre, eine gefälligere Lösung zu verlangen; dennoch wird es indes nicht unnütz sein, die Formen dieser Gleichungen ein wenig zu verändern. Wir wollen aber die Werte für y und z in allgemeiner Weise so darstellen

$$y = P + Qx \quad \text{und} \quad z = R + Sx,$$

wo nun die Buchstaben P, Q, R, S Funktionen der einen Variablen φ bedeuten, und nun wird die Frage darin bestehen, Funktionen von welcher Art diese sein müssen, dass die zwei dargebotenen Gleichungen eine in die Ebene ausbreitbare Oberfläche definieren.

§48 Wir wollen also diese Formen mit denen vergleichen, die wie zuvor gefunden haben, und wir werden freilich zuerst haben:

$$P = T \quad \text{und} \quad R = U, \quad Q = \frac{t - T}{a}, \quad S = \frac{u - U}{a};$$

weil dort T und t Funktionen von φ sind, ist es ersichtlich, dass die Funktionen P und Q sogar nach Belieben angenommen werden können, aber weil ja U und u auf gewisse Weise von T und t abhängen, werden auch die Funktionen R und S auf gewisse Weise von den zwei ersten P und Q abhängen müssen. Weil aber gilt:

$$T = P, \quad t = P + aQ, \quad U = R \quad \text{und} \quad u = R + aS,$$

wollen wir diese Werte in den Fundamentalformeln einsetzen

$$dU = \varphi dP \quad \text{und} \quad du = \varphi dt$$

und werden erhalten

$$dR = \varphi dP \quad \text{und} \quad dR + adS = \varphi dP + a\varphi dQ \quad \text{oder} \quad dS = \varphi dQ$$

§49 Nun werden wir also auch die Größe φ aus der Rechnung herauswerfen können, weil entweder $\varphi = \frac{dR}{dP}$ oder $\varphi = \frac{dS}{dQ}$ ist, so dass an seiner Stelle einer der Buchstaben R oder S unserem Belieben überlassen bleibt, woher, wenn P, Q und R irgendwelche Funktionen derselben Variable waren, dann S eine solche Funktion derselben Variable sein muss, dass gilt

$$dS = \frac{dQdR}{dP} \quad \text{und} \quad \frac{dS}{dR} = \frac{dQ}{dP}$$

ja diese Lösung wird sogar noch weiter so vereinfacht werden können, dass wir sagen, dass für die Buchstaben P, Q, R, S Funktionen solcher Art einer gewissen Variable angenommen werden müssen, dass $\frac{dS}{dR} = \frac{dQ}{dP}$ oder $\frac{dS}{dQ} = \frac{dR}{dP}$ gilt; wenn dies geleistet worden ist, werden diese zwei Gleichungen

$$y = P + Qx \quad \text{und} \quad z = R + Sx$$

die Natur des gesuchten Körpers ausdrücken.

§50 Es ist egal, mit welchen Buchstaben jene Variable, von welcher P, Q, R und S Funktionen sind, angezeigt wird, ja es wird für sie sogar eine der vier P, Q, R, S angenommen werden können; die übrigen drei sind dann als Funktionen von dieser zu verstehen. Daher, solange eine derer einen konstanten Wert beibehält, werden auch die übrigen konstant bleiben, und dann werden aus der Veränderlichkeit von x alle geraden Linien entspringen, welche sich auf der Oberfläche zeichnen lassen.

§51 Der vorgeschriebenen Bedingungen $\frac{dS}{dQ} = \frac{dR}{dP}$ wird offenbar Genüge geleistet werden, indem für P und R Konstanten genommen werden. Wir wollen nämlich festlegen, dass $P = A$ und $R = B$ ist, so dass nun S wie eine Funktion von Q anzusehen ist. Aber die Koordinaten lassen sich immer so variieren, dass $A = 0$ und $B = 0$ wird wonach wegen $Q = \frac{y}{x}$ und $\frac{z}{x} = S$ eine homogene Funktion keiner Dimension von x und y sein wird, oder z wird einer homogenen Funktion von einer Dimension von x und y gleich werden, was das Kriterium für konische Oberflächen ist.

§52 Der Bedingung wird aber auch für die Wahl $Q = 0$ und $S = 0$ Genüge geleistet, so dass R irgendeine unbestimmte Funktion von P bleibt, in welchem Fall für z irgendeine Funktion von y hervorgehen wird, weil diese nur zwei Variablen involviert, y und z , wird sie die für einen zylindrischen Körper sein. Dasselbe passiert, wenn wir entweder $P = 0$ und $Q = 0$ oder $R = 0$ und $S = 0$ setzen; im ersten Fall hat man nämlich $y = 0$, im zweiten Fall $z = 0$, in jedem der beiden Fälle ist die Gleichung, die für eine Ebene.

§53 Aber um auch andere Gattungen von Körpern dieser Art zu erkennen, wollen wir für einfachere annehmen:

$$P = a\varphi^\alpha, \quad Q = b\varphi^\beta, \quad R = c\varphi^\gamma, \quad S = d\varphi^\delta,$$

und damit der vorgeschriebenen Bedingung Genüge geleistet wird, muss notwendigerweise gelten

$$\frac{b\beta}{a\alpha} \varphi^{\beta-\alpha} = \frac{d\delta}{c\gamma} \varphi^{\delta-\gamma},$$

woher zwei Gleichungen entspringen; die erste natürlich für die Exponenten

$$\beta - \alpha = \delta - \gamma,$$

die andere hingegen für die Koeffizienten:

$$\frac{b\beta}{a\alpha} = \frac{d\delta}{c\gamma},$$

welchen beiden mit folgender Annahme genügt wird:

$$a = \frac{fg}{\chi + \lambda}, \quad b = \frac{fh}{\chi + \mu}, \quad c = \frac{gk}{\lambda + \nu}, \quad d = \frac{hk}{\mu + \nu}$$

$$\alpha = \chi + \lambda, \quad \beta = \chi + \mu, \quad \gamma = \lambda + \nu, \quad \delta = \mu + \nu,$$

dann werden aber die Gleichungen nun:

$$y = a\varphi^\alpha + b\varphi^\beta x, \quad z = c\varphi^\gamma + d\varphi^\delta x.$$

§54 In bestimmten Zahlen wollen wir also diesen Fall betrachten:

$$y = 2\varphi + 3\varphi^2 x \quad \text{und} \quad z = \varphi^2 + 2\varphi^3 x,$$

woher nach Elimination des Buchstaben φ die folgende Gleichung¹ gefunden wird:

$$4y^3 x + 72y^2 x x z - y y - 18y x z + 27x x z z + 2z = 0,$$

welche also die für einen Festkörper ist, dessen Oberfläche sich in die Ebene ausbreiten lässt.

¹Verbesserung: $4xy^3 - 27x^2z^2 - 18xyz + y^2 - 4z = 0$