Über die Auflösung von Irrationalitäten durch Kettenbrüche, wo zugleich eine gewisse neue und einzigartige Gattung des Minimums dargestellt wird *

Leonhard Euler

§1 In der oberen Dissertation über die Auflösung der Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

war die ganze Aufgabe im Wesentlichen auf diese Frage zurückgeführt worden, dass für die Buchstaben x und y Werte in ganzen Zahlen ausfindig gemacht werden, mit denen der Wert der Formel

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

*Originaltitel: "De resolutione irrationalium per fractiones continuas, ubi simul nova quaedam et singularis species minimi exponitur", erstmals publiziert in „*Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 18* 1738, pp. 218-244", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 3, pp. 310 - 334 ", Eneström-Nummer E454, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz" minimal gemacht wird. Es sind hier aber hauptsächlich drei Fälle zu betrachten, je nachdem ob diese Formel entweder zwei imaginäre Faktoren hat, was geschieht, wenn $BB - AC$ eine negative Zahl war, oder ob die Faktoren einander gleich sind, was geschieht, wenn $BB - AC = 0$ ist, oder zuletzt, wenn ihre Faktoren reell waren, was passiert, wenn $BB - AC$ eine positive Zahl ist. Im ersten Fall verdient aber diese Frage des Minimums keine Aufmerksamkeit, weil ja die Lösung überhaupt keine Schwierigkeiten bereitet. Aber der zweite Fall ist noch um Vieles weniger eine Aufgabe, weil die Formel in ein Quadrat übergeht, dessen Wurzel sich sehr leicht minimal machen lässt. Also bleibt allein der dritte Fall übrig, der eine genauere Untersuchung erfordert, woher freilich darüber hinaus die Fälle ausgeschlossen werden sollten, in den die Formel $BB - AC$ eine Quadratzahl ist und daher die beiden Faktoren sogar rational werden; dann wird nämlich die vorgelegten Formel sogar zu Null gemacht werden können, so dass die Frage des Minimums hier nicht einmal eine Berechtigung hat.

§2 Es werden also allein die Fälle übrig gelassen, in denen die Zahl $BB - AC$ eine positive Zahl, aber keine quadratische ist, von welcher Art diese Formel ist

$$mxx - nyy,$$

während die Buchstaben m und n ganze positive Zahlen sind, dennoch von solcher Art, dass nicht jeder der beiden quadratisch ist; dann ist es nämlich ersichtlich, dass die Formel nicht zu Null gemacht werden kann, wenn nicht so x wie y verschwindet, welcher natürlich offensichtlicher Fall dennoch ausgeschlossen werden muss. Weil also die Formel $mxx - nyy$ es nicht zulässt zu Null gemacht zu werden, ist ohne Zweifel die Frage als bemerkenswert anzusehen, in welcher die Werte der Buchstaben x und y gesucht werden, mit welchen die Formel $mx^2 - ny^2$ selbst den kleinstmöglichen Wert erhält. Wenn die eine der Zahlen m und n der Einheit gleich wird, wird es immer möglich sein, die Formel bis hin zur Einheit herabzusenken, welches gewiss der kleinste Wert - die Null ausgenommen - ist. Wenn nämlich $m = 1$ war, ist aus dem allbekannten PELL'schen Lehrsatz bekannt, dass immer $xx - nyy = 1$ oder $x = \sqrt{nyy + 1}$ werden kann, solange n keine Quadratzahl war, und dies wird sogar nicht nur auf eine einzige Weise geleistet werden können, sondern auch auf unendlich viele, so wie schon von PELL selbst bewiesen worden ist. Wenn aber die andere Zahl n der Einheit gleich wird, wird die Formel $mxx - yy$ mit dieser Methode zu -1 herabgesenkt, welcher Fall genauso für den kleinsten zu halten ist wie $+1$, wohingegen in der Untersuchung, die den Anlass zu dieser Frage gegeben hat, der Unterschied des Vorzeichens nicht betrachtet wird.

§3 Nachdem also diese Fälle beiseite gelassen worden sind, in welchen die eine Zahl m oder n der Einheit gleich wird, kreist unsere Frage hauptsächlich um die Formel

$$mxx - nyy,$$

auf welche sich freilich die allgemeine $Axx - 2Bxy + Cyy$ zurückführen lässt. Wenn nämlich im Allgemeinen festgelegt wird

$$x = t + Bu \quad \text{und} \quad y = Au,$$

geht die allgemeine Formel nach der Substitution in diese Form über

$$Att - A(B^2 - AC)uu$$

und so ist unsere angenommene Formel $mxx - nyy$ anzusehen sich genauso weit zu erstrecken wie die vorgelegte trinomiale selbst. Auch wenn aber weder m noch n der Einheit gleich wird, kann es oftmals passieren, dass unsere Formel sich auch bis hin zur Einheit herabsenken lässt; und das wird entweder sofort offenbar, wie beispielsweise in dieser Form $3xx - 2yy$, welche zur Einheit gebracht wird, nachdem $x = 1$ und $y = 1$ genommen worden sind, oder es zeigt sich nicht sofort, wie es bei $9xx - 5yy$ geschieht, die nach Setzen von $x = 3$ und $y = 4$ zur Einheit wird. Was auch immer aber der Fall ist, es kann natürlich passieren, dass der kleinste Wert unserer Formel die

Einheit überschreitet, und dann wird das Urteil über das Minimum entdeckt, meistens in größte Schwierigkeiten eingehüllt zu sein, wie es bei dieser Formel $7xx - 13yy$ geschieht, die nicht so leicht erkannt wird, bis hin zu zwei herabgesenkt werden zu können, wenn natürlich $x = 15$ und $y = 11$ gesetzt wird. Aber wenn m und n sehr große Zahlen waren, verlangt das Urteil um Vieles aufwändigere Rechnungen, weswegen eine sichere Methode auch in diesen Fällen das Minimum ausfindig zu machen einen nicht zu verachtenden Zuwachs zu verheißen scheint.

§4 Bevor ich es aber angehe, diese Methode selbst zu erklären, wird es überaus förderlich sein gezeigt zu haben, dass dasselbe Minimum auf unendlich viele Weise erhalten werden kann. Und dies kann sogar allgemein so bewiesen werden. Wenn daher ein einziger Fall bekannt ist, in welchem die Formel $mxx - nyy$ einer gegebenen Zahl k gleich wird, dann können immer unendlich viele Werte für x und y aufgefunden werden, die zu derselben Zahl k führen. Es sei nämlich in jenem bekannten Fall $x = a$ und $y = b$, so dass gilt

$$maa - nbb = k,$$

und nun müssen die Zahlen x und y so bestimmt werden, dass wird

$$mxx - nyy = maa - nbb,$$

was auf die folgende Weise am angenehmsten geleistet werden wird. Vor Allem werden aber Zahlen p und q gesucht, dass wird

$$pp - mnqq = 1,$$

was bekannt ist immer auf unendlich viele Weisen geschehen zu können, solange mn keine Quadratzahl war, wie wir hier annehmen; und ist es nun offenbar, dass dem Gefragten Genüge geleistet wird, wenn festgelegt wird

$$mxx - nyy = (maa - nbb)(pp - mnqq)^\lambda;$$

damit dies leichter geschehen kann, wollen wir wenn auch irrationale Faktoren annehmen und festlegen

$$x\sqrt{m} + y\sqrt{n} = (a\sqrt{m} + b\sqrt{n})(p + q\sqrt{mn})^\lambda;$$

dann wird nämlich nach Ändern des Vorzeichens der Wurzel $\sqrt{n}$ von selbst werden

$$x\sqrt{m} - y\sqrt{n} = (a\sqrt{m} - b\sqrt{n})(p - q\sqrt{mn})^\lambda$$

und so wird es ausreichen, nur der einen dieser zwei Gleichungen Genüge geleistet zu haben. Weil ja aber die Entwicklung der Formel $(p + q\sqrt{mn})^\lambda$ abwechselnd rationale und irrationale mit der Wurzel $\sqrt{mn}$ behaftete Terme liefert, sei P die Summe der rationalen Terme und $Q\sqrt{mn}$ die Summe der irrationalen, sodass gilt

$$(p + q\sqrt{mn})^\lambda = P + Q\sqrt{mn}$$

und auf die gleiche Weise

$$(p - q\sqrt{mn})^\lambda = P - Q\sqrt{mn}.$$

Nun wird unsere Gleichung also sein

$$x\sqrt{m} + y\sqrt{n} = (a\sqrt{m} + b\sqrt{n})(P + Q\sqrt{mn})$$

oder

$$x\sqrt{m}+y\sqrt{n}=(aP+nbQ)\sqrt{m}+(bP+maQ)\sqrt{n},$$

wo so die mit dem Zeichen $\sqrt{n}$ wie die mit dem Zeichen $\sqrt{m}$ behafteten Teile jeweils einander gleichzusetzen sind, und daher finden wir sofort die folgenden Werte

$$x=aP+nbQ, \quad y=bP+maQ$$

und zugleich tritt es klar zu tage, dass die Menge dieser Lösungen in Wirklichkeit unendlich ist.

§5 Nachdem diese Dinge vorausgeschickt worden sind, wollen wir unsere Frage selbst angehen, dabei Werte der Buchstaben x und y suchend, mit denen die Formel

$$mxx-nyy$$

den kleinsten Wert erhält, der $=k$ sei; und sofort ist es freilich ersichtlich, dass in diesen Fällen die Formel $mxx-nyy$ näher an das Nichts herangeführt wird als in allen anderen Fällen und so sind für x und y Werte solcher Art ausfindig zu machen, mit denen näherungsweise wird

$$\frac{x}{y}=\sqrt{\frac{n}{m}}=\frac{\sqrt{mn}}{m},$$

weshalb die Aufgabe schon dorthin geführt worden ist, dass rationale Brüche $\frac{x}{y}$ gesucht werden, die so nahe der irrationalen Form $\frac{\sqrt{mn}}{m}$ gleich werden wie es freilich geschehen kann, indem nicht größere Zahlen für x und y verwendet werden.

§6 Dieses einst schon von WALLIS vorgelegte Problem wird aber am bequemsten aufgelöst, wenn die Formel $\frac{\sqrt{mn}}{m}$ in einen Kettenbruch umgewandelt wird, natürlich mit der Operation, mit welcher der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen gesucht zu werden pflegt. Wenn nämlich auf diese Weise zu diesem Kettenbruch gelangt worden ist

$$\frac{\sqrt{mn}}{m} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \cfrac{1}{\varepsilon + \text{etc.}}}}}$$

werden diese aufeinander folgenden Quotienten zu einer Reihe angeordnet und zuerst werde freilich α der Bruch $\frac{1}{0}$, β hingegen $\frac{\alpha}{1}$ unterschrieben; und darauf folgend wird aus je zwei Brüchen ununterbrochen der folgende gebildet, während so der Zähler wie der Nenner des letzten mit dem darüber geschriebenen multipliziert wird und zu diesen Produkten respektive so der Zähler wie der Nenner des vorletzten addiert werden, natürlich auf die folgende Weise

$$\begin{array}{cccccc} \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon & \\ \dfrac{1}{0}, & \dfrac{\alpha}{1}, & ,\dfrac{\alpha\beta+1}{\beta}, & \dfrac{\alpha\beta\gamma+\gamma+\alpha}{\beta\gamma+1}, & \dfrac{\alpha\beta\gamma\delta+\gamma\delta+\alpha\delta+\alpha\beta+1}{\beta\gamma\delta+\delta+\beta} & \text{etc.} \end{array}$$

§7 All diese Brüche erfreuen sich dieser Eigenschaft, dass jeder beliebige den Wert der Formel $\frac{\sqrt{mn}}{n}$ so nahe erschöpft wie es unter Verwendung nicht größerer Zahlen geschehen kann. Aber auch zwischen diesen Brüchen selbst besteht ein riesiger Unterschied, dass sich die einen den anderen, freilich den übrigen gleichen, immer mehr annähern werden. Es sind aber die gewiss, sich am meisten anzunähern, denen die größten Indizes hinzugeschrieben worden sind; wenn also jene für $\frac{x}{y}$ angenommen werden, sind wir schon gewiss, dass, nachdem diese Zahlen für x und y angenommen worden sind, der

Wert unserer Formel $mxx - nyy$ minimal gemacht wird. Zugleich muss aber angemerkt werden, dass zwischen diesen aufeinander folgenden Quotienten α, β, γ, δ, ε etc. immer Perioden gegeben sind, in denen dieselbe Reihenfolge der Quotienten zurückkehrt; also werden alle Brüche, denen dieselben größten Quotienten unterschrieben worden sind, auch alle geeignete Werte für x und y an die Hand geben, aus denen unsere Formel $mxx - nyy$ denselben minimalen Wert erlangt.

§8 Damit ich aber die Operationen, mit denen diese Quotienten am leichtesten gefunden werden, besser erklären kann, wollen wir zuerst ein bestimmtes Beispiel behandeln, in welchem diese Formel vorgelegt sei

$$7xx - 13yy,$$

so dass nun näherungsweise werden muss

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{91}}{7},$$

wo es nur angemerkt werde, dass $\sqrt{91} > 9$ und < 10 ist. Nun werde also die Operation wie für den größten Teiler durchgeführt. Und zuerst muss $\sqrt{91}$ durch 7 dividiert werden, woher der erste Quotient als $= 1$ hervorgeht, der Rest ist hingegen $= \sqrt{91} - 7$, durch welchen der vorhergehende Divisor 7 dividiert werden muss; jede der beiden Zahlen werde mit $\sqrt{91} + 7$ multipliziert und der Teiler wird nun 42 sein, der Dividend aber $7(\sqrt{91} + 7)$, welche mit mit sieben gekürzt den Divisor $= 6$ und den Dividend $= \sqrt{91} + 7 > 16$ liefern, woher der zweite Quotient als 2 erschlossen wird und der Rest $\sqrt{91} - 5$ werden wird, durch welchen 6 dividiert werden muss. Indem aber mit $\sqrt{91} + 5$ multipliziert wird, wird der Teiler 66 und der Dividend $6(\sqrt{91} + 5)$ sein und durch Kürzen mit 6 muss nun 11 durch $\sqrt{91} + 5$ dividiert werden, woher der dritte Quotient 1 wird, während der Rest $\sqrt{91} - 6$ bleibt, durch welchen der vorhergehende Divisor 11 dividiert werden muss. Diese Operation wird weiter hier dargestellt:

$$\frac{11}{\sqrt{91}-6} \text{ mult. mit } \sqrt{91}+6 \text{ wird } \frac{11(\sqrt{91}+6)}{55} \text{ divid. durch } 11 \text{ wird } \frac{\sqrt{91}+6}{5} \text{ Quot. } 3\ (N.\ 4),$$

$$\frac{5}{\sqrt{91}-9} \text{ mult. mit } \sqrt{91}+9 \text{ wird } \frac{5(\sqrt{91}+9)}{10} \text{ divid. durch } 5 \text{ wird } \frac{\sqrt{91}+9}{2} \text{ Quot. } 9\ (N.\ 5),$$

$$\frac{2}{\sqrt{91}-9} \text{ mult. mit } \sqrt{91}+9 \text{ wird } \frac{2(\sqrt{91}+9)}{10} \text{ divid. durch } 2 \text{ wird } \frac{\sqrt{91}+9}{5} \text{ Quot. } 3\ (N.\ 6),$$

$$\frac{5}{\sqrt{91}-6} \text{ mult. mit } \sqrt{91}+6 \text{ wird } \frac{5(\sqrt{91}+6)}{55} \text{ divid. durch } 5 \text{ wird } \frac{\sqrt{91}+6}{11} \text{ Quot. } 1\ (N.\ 7),$$

$$\frac{11}{\sqrt{91}-5} \text{ mult. mit } \sqrt{91}+5 \text{ wird } \frac{11(\sqrt{91}+6)}{66} \text{ divid. durch } 11 \text{ wird } \frac{\sqrt{91}+5}{6} \text{ Quot. } 2\ (N.\ 8),$$

$$\frac{6}{\sqrt{91}-7} \text{ mult. mit } \sqrt{91}+7 \text{ wird } \frac{6(\sqrt{91}+7)}{42} \text{ divid. durch } 6 \text{ wird } \frac{\sqrt{91}+7}{7} \text{ Quot. } 2\ (N.\ 9),$$

$$\frac{7}{\sqrt{91}-7} \text{ mult. mit } \sqrt{91}+7 \text{ wird } \frac{7(\sqrt{91}+7)}{42} \text{ divid. durch } 7 \text{ wird } \frac{\sqrt{91}+7}{6} \text{ Quot. } 2\ (N.\ 10).$$

Es ist nicht nötig, die Rechnung weiter vorzuführen, weil diese letzte Division mit der zweiten übereinstimmt und schon die zweite Periode beginnt, wo es anzumerken ist, dass an der Stelle des ersten Quotienten 1 hier sein Doppeltes auftritt, was bei Divisionen dieser Art immer passiert.

§9 Die der Reihe nach gefundenen Quotienten schreiten also auf die folgende Weise fort

$$1, \quad 2, \quad 1, \quad 3, \quad 9, \quad 3, \quad 1, \quad 2 \quad | \quad 2, \quad 2, \quad 1, \quad 3, \quad 9, \quad 3, \quad 1, \quad 2,$$

zwischen welchen die 9 am meisten herausragt; und daher besteht kein weiterer Zweifel, dass jene Brüche, die diesen Quotienten unterschrieben sind, den kleinstmöglichen Wert der Formel $7xx - 13yy$ ergeben. Wir wollen also die

Brüche auf die folgende Weise anordnen

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 1, & 3, & 9 \\ \frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{4}{3}, & \frac{15}{11}, \end{array}$$

woher es klar zu tage tritt, dass der uns genügende Bruch $\frac{x}{y} = \frac{15}{11}$ oder $x = 15$ und $y = 11$ sein wird. Daher wird aber $7xx = 1575$ und $13yy = 1573$, woher der kleinste Wert ohne jeden Zweifel zwei ist, welchen durch Raten wohl kaum jemand entdeckt hätte.

§10 Wenn diese Operationen, mit denen jene aufeinander folgenden Quotienten aufgefunden werden, aufmerksamer betrachten, lässt sich erkennen, dass die Rechnung leicht nicht unwesentlich zusammengefasst werden kann. Es sei nämlich $\sqrt{k}$ eine irrationale Größe, welche die in einen Kettenbruch umzuwandelnde Formel involviert, aber die nächst kleinere Zahl als $\sqrt{k}$ sei $= e$ und wir wollen festlegen, dass schon zur Division gelangt worden ist, in welcher die Formel $\sqrt{k} + r$ durch die Zahl p geteilt werden muss, so dass der daher herstammende Quotient $q < \frac{e+r}{p}$ ist, und der Rest wird $= \sqrt{k} + r - pq$ sein, und weil $pq > r$ ist (zumindest wann immer die Operationen schon der Reihe nach fortschreiten), wollen wir $pq - r = r'$ nennen, so dass der Rest nun $\sqrt{k} - r'$ ist, woher wir für die folgende Division den Teiler $= \sqrt{k} - r'$ und den Dividend $= p$ haben werden; jeder der beiden werde mit $\sqrt{k} + r'$ multipliziert und es werde $\frac{k-r'r'}{p} = p'$ (wir haben nämlich gesehen, dass beim Ablauf der Operationen die Formel $k - r'r'$ durch p teilbar sein wird) und nun wird die folgende Division so beschaffen sein, dass der Teiler $= p'$ und der Dividend $\sqrt{k} + r'$ ist, woher der Quotient $q' < \frac{e+r'}{p'}$ entsprießen wird, und daher werden auf die gleiche Weise und folgenden Divisionen durchgeführt werden.

§11 Also werden aus jener ersten Operation, in welcher die Formel $\sqrt{k} + r$ durch die Zahl p dividiert werden muss, nur die Zahlen r und p notiert, woher der Quotient $q < \frac{e+r}{p}$ abgeleitet wird; des Weiteren werde genommen

$$r' = pq - r \quad \text{und} \quad p' = \frac{k - r'r'}{p}$$

und daher wird $q' < \frac{e+r'}{p'}$ werden; auf die gleiche Weise werde weiter folgendes angenommen

$$r'' = p'q' - r' \quad \text{und} \quad p'' = \frac{k - r''r''}{p}$$

und daher ist $q'' < \frac{e+r''}{p''}$. Diese Operationen stellen wir im folgenden Schema dar:

$$\begin{array}{lll}
r, & p, & q \ < \dfrac{e+r}{p}, \\[2ex]
r' \ = pq \quad - r, & p' \ = \dfrac{k - r'r'}{p}, & q' \ < \dfrac{e+r}{p'}, \\[2ex]
r'' \ = p'q' \ - r', & p'' \ = \dfrac{k - r''r''}{p'}, & q'' \ < \dfrac{e+r'}{p''}, \\[2ex]
r''' = p''q'' - r'', & p''' = \dfrac{k - r'''r'''}{p''}, & q''' < \dfrac{e+r''}{p'''} \\
\quad \text{etc.} & \quad \text{etc.} & \quad \text{etc.}
\end{array}$$

Und auf diese Weise scheint die Progression der Quotienten q, q', q'', q''' etc. am leichtesten gefunden werden zu können.

§12 Wir wollen diese Regel an einem Beispiel beleuchten, in welchem die Formel

$$5xx - 38yy$$

zum Minimum zu machen oder der Bruch

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{38}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{190}}{5}$$

durch einen Kettenbruch zu entwickeln sei. Hier wird also sein

$$k = 190, \quad e = 13, \quad p = 5, \quad r = 0,$$

woher die ganze Rechnung auf die folgende Weise durchgeführt werden wird:

$$\begin{array}{llll}
r = 0, & p = 5, & & q = 2 < \frac{13+0}{5}, \\
r^{\mathrm{I}} = 10, & p^{\mathrm{I}} = \frac{190-100}{5} & = 18, & q^{\mathrm{I}} = 1 < \frac{13+10}{18}, \\
r^{\mathrm{II}} = 8, & p^{\mathrm{II}} = \frac{190-64}{18} & = 7, & q^{\mathrm{II}} = 3 < \frac{13+8}{7}, \\
r^{\mathrm{III}} = 13, & p^{\mathrm{III}} = \frac{190-169}{7} & = 3, & q^{\mathrm{III}} = 8 < \frac{13+13}{3}, \\
r^{\mathrm{IV}} = 11, & p^{\mathrm{IV}} = \frac{190-121}{3} & = 23, & q^{\mathrm{IV}} = 8 < \frac{13+11}{23}, \\
r^{\mathrm{V}} = 12, & p^{\mathrm{V}} = \frac{190-144}{23} & = 2, & q^{\mathrm{V}} = 12 < \frac{13+12}{2}, \\
r^{\mathrm{VI}} = 12, & p^{\mathrm{VI}} = \frac{190-144}{2} & = 23, & q^{\mathrm{VI}} = 1 < \frac{13+12}{23}, \\
r^{\mathrm{VII}} = 11, & p^{\mathrm{VII}} = \frac{190-121}{23} & = 3, & q^{\mathrm{VII}} = 8 < \frac{13+11}{3}, \\
r^{\mathrm{VIII}} = 13, & p^{\mathrm{VIII}} = \frac{190-169}{3} & = 7, & q^{\mathrm{VIII}} = 3 < \frac{13+13}{7},
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&r^{\mathrm{IX}} = 8, \quad && p^{\mathrm{IX}} = \frac{190-64}{7} = 18, \quad && q^{\mathrm{IX}} = 1 < \frac{13+8}{18}, \\
&r^{\mathrm{X}} = 10, \quad && p^{\mathrm{X}} = \frac{190-100}{18} = 5, \quad && q^{\mathrm{X}} = 4 < \frac{13+10}{5} \\
&\text{etc.} && \text{etc.} && \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Die Rechnung weiter zu verfolgen ist nicht nötig, weil die Reihenfolge der Quotienten schon klar zu tage tritt

$$
2, \quad 1, \quad 3, \quad 8, \quad 1, \quad 12, \quad 8, \quad 3, \quad 1 \quad | \quad 4, \quad 1, \quad 3, \quad 8, \quad 1, \quad 12, \quad 1, \quad 8 \quad \text{etc.},
$$

woher dieser Kettenbruch entspringt

$$
\frac{x}{y} = \sqrt{\frac{38}{5}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \text{etc.}}}}}}}}
$$

Weil aber dann der größte dieser Quotienten 12 ist, wird ihm der kleinste Wert
so bestimmt werden

$$
\begin{array}{cccccc}
2, & 1, & 3, & 8, & 1, & 12 \\
\frac{1}{0}, & \frac{2}{1}, & \frac{3}{1}, & \frac{11}{4}, & \frac{91}{33}, & \frac{102}{37}
\end{array}
$$

und so haben wir für den Fall des Minimums $x = 102$ und $y = 37$, woher $5xx = 52020$ und $38yy = 52022$ ist, also ist die Differenz -2; weil aber zwischen den Quotienten 8 herausragt und ihm der Bruch $\frac{11}{4}$ unterliegt, wird durch Nehmen von $x = 11$ und $y = 4$ der Wert der Formel $5xx - 38yy = 605 - 608 = -3$ erschlossen, welcher Wert nach jenem ohne Zweifel der kleinste ist.

§13 Wir wollen hier nicht mehrere Beispiele dieses Geschlechts anführen, sondern damit diese Methode zu einem weiter reichendem Nutzen verwendet wird, wollen wir die Kettenbrüche für die einzelnen Vielfachen von $\sqrt{2}$ untersuchen; es wird nämlich überaus förderlich sein, die Relation zwischen diesen Werten eingehend betrachtet zu haben, weil ja dieser Gegenstand über Kettenbrüche bis jetzt keinesfalls hinreichend erforscht worden ist. Es wird aber genügen nur die Quotienten für diese Vielfachen aufgeführt zu haben.

Für	$\sqrt{2}$	sind die Quotienten	1,	2,	2,	2,	2,	2	etc.	
Für	$2\sqrt{2}$	sind die Quotienten	2,	1,	4,	1,	4,	1,	4	etc.
Für	$3\sqrt{2}$	sind die Quotienten	4,	4,	8,	4,	8,	4,	8	etc.
Für	$4\sqrt{2}$	sind die Quotienten	5,	1,	1,	1,	10,	1,	1	etc.
Für	$5\sqrt{2}$	sind die Quotienten	7,	14,	14,	14,	14,	14,	14	etc.
Für	$6\sqrt{2}$	sind die Quotienten	8,	2,	16,	2,	16,	2,	16	etc.
Für	$7\sqrt{2}$	sind die Quotienten	9,	1,	8,	1,	18,	1,	8	etc.

§14 Diese Progressionen sind umso mehr bemerkenswert, weil sie sich dermaßen voneinander unterscheiden, auch wenn die mit ihnen ausgedrückten Größen eine so einfache Relation zueinander haben. Und in der Tat verursachen nicht nur die Vielfachen eine so große Differenz in den Kettenbrüchen, sondern auch die Addition selbst hat einen noch größeren zur Folge, wenn natürlich zu $\sqrt{2}$ ein gewisser rationaler Bruch hinzuaddiert wird; dies wollen wir am Beispiel der Formel $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ illustrieren, wo es sogar passiert, dass die ersten Operationen eigene Entwicklung verlangen, während sie von den folgenden Perioden verschiedene Quotienten liefern. Es werde also festgelegt

$$\frac{x}{y} = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2} = \frac{1 + \sqrt{8}}{2}.$$

Zuerst werde also $1 + \sqrt{8}$ durch 2 dividiert und der Quotient wird 1, der Rest hingegen $\sqrt{8} - 1$ sein, durch welchen 2 dividiert werden muss; jeder der beiden werde mit $\sqrt{8} + 1$ multipliziert, dass $2\sqrt{8} + 2 = \sqrt{32} + 2$ durch 7 dividiert werden muss, und nun läuft die Operation geordnet ab; hier ist natürlich

$$k = 32, \quad e = 5, \quad r = 2, \quad \text{und} \quad p = 7$$

und die Operationen werden sich so verhalten:

$$\begin{array}{lll}
r = 2, & p = 7, & q = 1, \\
r = 5, & p = 1, & q = 10, \\
r = 5, & p = 7, & q = 1, \\
r = 2, & p = 4, & q = 1, \\
r = 2, & p = 7, & q = 1, \\
r = 5, & p = 1, & q = 10, \\
r = 5 & p = 7 & q = 1 \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

Weil also der erste Quotient 1 von den ersten vollkommen zu trennen war, wird die Reihe der Quotienten sein

$$1 \quad | \quad 1, \quad 10, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 10, \quad 1 \quad | \quad 1, \quad 10 \quad \text{etc.},$$

welche Reihe umso größere Aufmerksamkeit verdient, weil sie von den vorhergehenden in der ganzen Natur vollkommen abweicht.

§15 Wir wollen ein anderes Beispiel nehmen

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{3} + \sqrt{2} = \frac{1+\sqrt{18}}{3},$$

woher der erste Quotient als $= 1$ resultiert, und der Rest $\sqrt{18} - 2$ ist, durch welchen 3 dividiert werden muss; oder durch Multiplizieren mit $\sqrt{18} + 2$ wird der Teiler 14, der Dividend aber $3\sqrt{18} + 6 = \sqrt{162} + 6$, dessen Entwicklung auf die folgende Weise dargestellt wird,

$$k = 162, \quad e = 12,$$

$$\begin{array}{lll}
r = 6, & p = 14, & q = 1, \\
r = 8, & p = 7, & q = 2, \\
r = 6, & p = 18, & q = 1, \\
r = 12, & p = 1, & q = 24, \\
r = 12, & p = 18, & q = 1, \\
r = 6, & p = 7, & q = 2, \\
r = 8, & p = 14, & q = 1, \\
r = 6, & p = 9, & q = 2, \\
r = 12, & p = 2, & q = 12, \\
r = 12, & p = 9, & q = 2, \\
r = 6, & p = 14, & q = 1, \\
r = 8, & p = 7, & q = 2, \\
r = 6, & p = 18, & q = 1,
\end{array}$$

$$
\begin{array}{lll}
r = 12, & p = 1, & q = 24, \\
r = 12, & p = 18, & q = 1, \\
r = 6, & p = 7, & q = 2, \\
r = 8, & p = 14, & q = 1, \\
r = 6, & p = 9, & q = 2, \\
r = 12 & p = 2 & q = 12 \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}
$$

Die Reihe der Quotienten ist also

$$1 \quad | \quad 1, \quad 2, \quad 1, \quad 24, \quad 1, \quad 2, \quad 1, \quad 2, \quad 12, \quad 2 \quad | \quad 1, \quad 2, \quad 1, \quad 24, \quad 1, \quad 2 \quad \text{etc.},$$

wo nach Auschließen des ersten die übrigen nach Zehnerperioden fortschreiten.

§16 Weil hier $\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{18}}{3}$ ist, werden wir $3x - y = y\sqrt{18}$ haben; wir wollen diese Gleichung rational machen und es wird hervorgehen

$$9xx - 6xy = 17yy \quad \text{oder} \quad 9xx - 6xy - 17yy = 0.$$

Daher lernen wir also, wenn diese Trinomialformel vorgelegt war

$$9xx - 6xy - 17yy,$$

Werte von welcher Art den Buchstaben x und y zugeteilt werden müssen, dass diese Formel den kleinsten Wert erhält. Natürlich werden den gerade gefundenen Quotienten auf die gewohnte Weise die Brüche unterschrieben und der, welchem der größte Quotient zugeschrieben worden ist, wird die Werte von x und y geben; deshalb wollen wir diese Brüche betrachten

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 1, & 2, & 1, & 24 \\ \frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{5}{3}, & \frac{7}{4}. \end{array}$$

Für den Fall des Minimums haben wir also $\frac{x}{y} = \frac{7}{4}$ oder $x = 7$ und $y = 4$, woher wird

$$9xx = 441, \quad 6xy = 168, \quad 17yy = 272,$$

also geht die Formel selbst in $+1$ über, welcher Wert natürlich der kleinste von allen ist.

§17 Wenn wir daher aber diese Formel auf die oben [§ 3] dargestellte Weise behandeln und auf zwei Terme reduzieren wollten, ginge wegen $A = 9$, $B = 3$, $C = -17$ durch Setzen von

$$x = t + 3u \quad \text{und} \quad y = 9u$$

diese Formel hervor

$$9tt - 1458uu = 9(tt - 162uu),$$

welche Formel gewiss niemals kleiner werden kann als 9, woher wir einsehen, wenn wir die kleinsten Werte von Formeln dieser Art ausfindig machen wollten, dass es keinesfalls möglich ist, sie auf zwei Terme zu reduzieren, weil ja auf diese Weise deren Natur vollkommen verändert werden würde, weshalb es notwendig ist, solche Formeln entsprechend zu entwickeln, was wir in den folgenden Problemen erledigen werden.

Problem 1

§18 Wenn die Formel $Ax^2 - 2Bxy + Cy^2$ im Fall, in dem $x = a$ und $y = b$ ist, einen Wert $= c$ liefert, unendlich viele andere Werte für x und y zu finden, die denselben Wert c hervorbringen, wenn freilich die Größe $B^2 - AC$ eine positive nicht quadratische Zahl war.

Lösung

Weil also gilt

$$Aa^2 - 2Bab + Bb^2 = c,$$

wird verlangt, dass wird

$$Ax^2 - 2Bxy + Cy^2 = Aa^2 - 2Bab + Cb^2.$$

Nun werden vor Allem die Zahlen p und q gesucht, dass wird

$$pp - 2Bpq + ACqq = 1,$$

was sich immer machen lässt, weil daher gilt

$$p = Bq + \sqrt{(B^2 - AC)qq + 1}$$

deren Auflösung vom Pell'schem Problem abhängt, solange $B^2 - AC$ eine positive nicht quadratische Zahl war. Wir wollen also nehmen

$$B^2 - AC = k,$$

dass werden muss

$$p = Bq + \sqrt{kq^2 + 1},$$

so dass eine Zahl q gesucht werden muss, dass die Formel $kq^2 + 1$ ein Quadrat wird. Danach wollen wir festlegen

$$Ax^2 - 2Bxy + Cy^2 = (Aa^2 - 2Bab + Cbb)(pp - 2Bpq + ACqq),$$

dass welches Produkt mit der vorgelegten Form übereinstimmt, zeigen wir durch irrationale Faktoren. Weil nämlich gilt

$$Ax^2 - 2Bxy + Cy^2 = \frac{1}{A}(Ax - By + y\sqrt{k})(Ax - By - y\sqrt{k})$$

und

$$Aa^2 - 2Bab + Cb^2 = \frac{1}{A}(Aa - Bb + b\sqrt{k})(Aa - Bb - b\sqrt{k})$$

und

$$pp - 2Bpq + ACq^2 = (p - Bq + q\sqrt{k})(p - Bq - q\sqrt{k}),$$

wollen wir festlegen

$$Ax - By + y\sqrt{k} = (Aa - Bb + b\sqrt{k})(p - Bq + q\sqrt{k});$$

dann wird nämlich von selbst, indem $\sqrt{k}$ negativ angenommen wird, werden

$$Ax - By - y\sqrt{k} = (Aa - Bb - b\sqrt{k})(p - Bq - q\sqrt{k}),$$

woher es genügen wird, nur die eine Gleichung entwickelt zu haben, wenn lediglich die rationalen und die irrationalen Anteile einzeln miteinander verglichen werden. Es wird also hervorgehen

$$\begin{gathered} Ax - By = (Aa - Bb)(p - Bq) + bq(B^2 - AC), \\ y = q(Aa - Bb) + b(p - Bq), \end{gathered}$$

welcher Wert in der ersten Gleichung eingesetzt $x = ap - Cbq$ liefert, so dass die gesuchten Werte diese sind

$$x = ap - Cbq, \quad y = bp + Aaq - 2Bbq.$$

Und daher kann noch eine andere Lösung gebildet werden, weil ja nach Vertauschen der Buchstaben A und C so die Buchstaben x und y wie a und b miteinander vertauscht werden, die Buchstaben p und q hingegen dieselben bleiben, natürlich

$$x = ap + Cbq - 2Baq, \quad y = bp - Aaq.$$

Nachdem aber eine einzige Lösung gefunden worden ist, werden die für x und y aufgefundenen Werte an die Stelle der Buchstaben a und b geschrieben und so wird erneut noch eine neue Lösung gefunden und daher wird es auf die gleiche Weise möglich sein, nacheinander unendlich viele andere zu finden.

Korollar 1

§19 Ja es lassen sich sogar noch einmal andere Lösungen erlangen, wenn andere Faktoren miteinander kombiniert werden; wie wenn wir beispielsweise festlegen

$$Ax - By + y\sqrt{k} = (Aa - Bb - b\sqrt{k})(p - Bq + q\sqrt{k}),$$

werden daher diese Gleichungen entspringen

$$Ax - By = (Aa - Bb)(p - Bq) - kbq,$$
$$y = q(Aa - Bb) - b(p - Bq) = Aaq - bp$$

und daher

$$Ax = Aap - 2Bbp + ACbq$$

oder

$$x = ap + Cbq - \frac{2B}{A}bp,$$

welche Lösung aber nicht ganzzahlig ist, wenn nicht $2Bp$ durch A teilbar ist. Aber eine Vertauschung gibt weiter diese Lösung an die Hand

$$x = Cbq - ap, \quad y = bp + Aaq - \frac{2B}{C}ap.$$

Korollar 2

§20 Wir wollen nun auch diese Kombination gebrauchen

$$Ax - By + y\sqrt{k} = (Aa - Bb + b\sqrt{k})(p - Bq - q\sqrt{k})$$

und daher werden wir erhalten

$$Ax - By = (Aa - Bb)(p - Bq) - kbq,$$
$$y = -(Aa - Bb)q + b(p - Bq) = bp - Aaq,$$
$$x = ap - 2Baq + Cbq.$$

Diese Lösung ist nun mit einer Vertauschung in der Lösung des Problems gefunden worden.

KOROLLAR 3

§21 Wenn wir auf dieselbe Weise diese Faktoren verwenden

$$Ax - By + y\sqrt{k} = (Aa - Bb - b\sqrt{k})(p - Bq - q\sqrt{k}),$$

finden wir dieselben Lösungen auf, welche wir im ersten Korollar gefunden haben, nachdem natürlich wieder eine Vertauschung durchgeführt worden ist.

KOROLLAR 4

§22 Aber wir werden sogar unendlich viele Lösungen zugleich darbieten können, wenn wir anstelle der Faktoren $p - Bq \pm q\sqrt{k}$ irgendwelche Potenzen derer gebrauchen, deren Exponenten freilich ganze Zahlen sind. Wenn wir nämlich nach Entwickeln der Formel $(p - Bq + q\sqrt{k})^n$ die irrationalen Terme $= Q\sqrt{k}$, die rationalen hingegen $P - BQ$ setzen, sodass nun P und Q unendlich viele Werte in sich involvieren, werden alle vorhergehenden Lösungen verallgemeinert werden, wenn nur anstelle der Buchstaben p und q die Buchstaben P und Q geschrieben werden.

PROBLEM 2

§23 Nach Vorlegen der Formel $Ax^2 - 2Bxy + Cy^2$, in welcher $BB - AC$ eine postive nicht quadratische Zahl sei, die Werte für die Buchstaben x und y zu finden, mit denen die Formel selbst zu einem minimalen Wert geführt wird.

LÖSUNG

Dieses Problem wird auf die gleiche Weise gelöst, auf die wir oben [§ 5] die Binomialformel behandelt haben, natürlich werde unsere Formel dem Nichts gleich und aus ihrer Auflösung der Bruch $\frac{x}{y}$ gesucht, der, nachdem wie zuvor $B^2 - AC = k$ gesetzt worden ist, aufgefunden wird als

$$\frac{x}{y} = \frac{B \pm \sqrt{k}}{A};$$

deshalb muss diese irrationale Formel in einen Kettenbruch aufgelöst werden; indem natürlich die Reihe der aufeinander folgenden Quotienten gesucht wird; wenn diesen auf die gewohnte Weise die Brüche unterschrieben werden, werden die, die den größten Quotienten entsprechen, anstelle von $\frac{x}{y}$ genommen die vorgelegte Formel minimieren, und weil sich hier $\sqrt{k}$ so positiv und negativ annehmen lässt, werden sich zwei Lösungen angeben lassen, welche freilich meistens miteinander übereinstimmen. Dies wird am deutlichsten an Beispielen gezeigt werden.

BEISPIEL 1

Es sei diese Formel vorgelegt

$$5xx - 6xy - 7yy,$$

woher wird

$$\frac{x}{y} = \frac{3 \pm \sqrt{44}}{5}.$$

Es gelte nun das obere Vorzeichen und die Formel $\frac{3+\sqrt{44}}{5}$ wird als ersten Quotienten $= 1$ geben, aus welchem der Rest $\sqrt{44} - 2$ entspringt, durch welchen 5 dividiert werden muss. Jeder der beiden werde mit $\sqrt{44} + 2$ multipliziert, dass der Divisor 40 und der Dividend $5(\sqrt{44} + 2)$ hervorgeht, welche auf 8 und $\sqrt{44} + 2$ herabgesenkt werden; nun werden wir schon die oben angegebene Regel gebrauchen können, wie sich hier sehen lässt:

$$k = 44, \quad e = 6,$$

$$\begin{array}{lll}
r = 2, & p = 8, & q = 1, \\
r = 6, & p = 1, & q = 12, \\
r = 6, & p = 8, & q = 1, \\
r = 2, & p = 5, & q = 1, \\
r = 3, & p = 7, & q = 1, \\
r = 4, & p = 4, & q = 2, \\
r = 4, & p = 7, & q = 1, \\
r = 3, & p = 5, & q = 1, \\
r = 2, & p = 8, & q = 1, \\
r = 6 & p = 1 & q = 12 \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

Die Quotienten legen mit dem zuvor gefundenen diese Reihe fest

$$1, \quad 1, \quad 12, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 2, \quad 1 \quad | \quad 1, \quad 1, \quad 12 \quad \text{etc.},$$

woher die den Quotienten 12 unterschrieben Brüche dem Gefragten Genüge leisten werden, von denen der erste $\frac{2}{1}$ ist, so dass $x = 2$ und $y = 1$ ist, woher die vorgelegte Formel den Wert $+1$ erhält.

Aber wenn wir dies annehmen

$$\frac{x}{y} = \frac{3-\sqrt{44}}{5} \quad \text{oder} \quad \frac{-y}{x} = \frac{5}{\sqrt{44}-3} = \frac{5(\sqrt{44}+3)}{35} = \frac{\sqrt{44}+3}{7},$$

haben wir daher, nachdem wie zuvor folgendes festgelegt worden ist

$$k = 44 \quad \text{und} \quad e = 6$$

diese Werte

$$\begin{aligned} r &= 3, \qquad p = 7, \qquad q = 1, \\ r &= 4, \qquad p = 4, \qquad q = 2 \end{aligned}$$

und wir halten hier inne, weil dieselben Divisionen schon oben aufgetaucht sind, und nun wird die Reihe der Quotienten diese sein

$$1, \quad 2, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 12, \quad 1, \quad 1 \quad | \quad 1, \quad 2, \quad 1 \quad \text{etc.};$$

aber der erste dem Quotienten 12 entsprechende Bruch wird hier $\frac{11}{8}$; es werde also $x = 8$ und $y = -11$ genommen und der Wert unserer Formel wird $+1$.

Beispiel 2

§25 Es sei diese Formel vorgelegt

$$7xx - 20xy + 14y^2,$$

die zum Minimum zu machen sei, deren Wert im Fall $x = 1$ und $y = 1$ sofort

$+1$ wird, also sicher ein Minimum. Hier muss also der Bruch $\frac{x}{y}$ näherungsweise dieser Formel gleich werden

$$\frac{10+\sqrt{2}}{7},$$

woher sofort der erste Quotient $=1$ entspringt, und der Rest wird $3+\sqrt{2}$ sein; daher haben wir für den zweiten Quotienten $\frac{7}{3+\sqrt{2}} = \frac{7(3-\sqrt{2})}{7} = \frac{3-\sqrt{2}}{1}$, und so ist der Quotient $=1$ und der Rest $=2-\sqrt{2}$. Für den dritten Quotienten haben wir $\frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ und so ist der Quotient $=1$ und der Rest $\sqrt{2}$, weshalb wir für den vierten $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{1}$ haben, woher die Quotienten die folgenden sind, wie wie oben [§ 13] gefunden haben,

$$1, \quad 2, \quad 2, \quad 2 \quad \text{etc.};$$

Obwohl diese Operationen anfangs unregelmäßig erscheinen, ist es dennoch möglich, sie nach der vorgeschriebenen Regel zu entwickeln; hier ist nämlich sofort

$$k=2, \quad e=1, \quad r=10 \quad \text{und} \quad p=7,$$

woher die Rechnung so von statten gehen wird:

$$\begin{array}{lll}
r=+10, & p=+7, & q=1, \\
r=-3, & p=-1, & q=1, \\
r=+2, & p=+2, & q=1, \\
r=+0, & p=+1, & q=1, \\
r=+1, & p=+1, & q=2, \\
r=+1 & p=+1 & q=2
\end{array}$$

$$r = +1 \qquad p = +1 \qquad q = 2$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

und daher entspringt die obere Reihe der Quotienten, woher die Werte des Bruches $\frac{x}{y}$ auf die folgende Weise fortschreiten werden

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 1, & 1, & 1, & 2, & 2, & 2, & 2 \\ \frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{5}{3}, & \frac{13}{8}, & \frac{31}{19}, & \frac{75}{46}, \end{array}$$

von denen der zweite sofort den zuvor erwähnten Fall des Minimums gibt. Der dritte gibt $+2$, der vierte -1, der fünfte gibt $+1$, der sechste -1 etc.

Ohne Zweifel müssen dieselben Werte hervorgehen, wenn im Bruch für $\frac{x}{y}$ $\sqrt{2}$ negativ genommen wird, dass man hat

$$\frac{10-\sqrt{2}}{7},$$

welcher sich auch durch unsere Regel entwickeln lassen wird, solange er so dargestellt wird $\frac{\sqrt{2}-10}{-7}$, so dass gilt

$$r = -10 \quad \text{und} \quad p = -7,$$

woher die Rechnung diese sein wird

$$k = 2, \quad e = 1,$$

$$\begin{array}{lll} r = -10, & p = -7, & q = 1, \\ r = +3, & p = +1, & q = 4, \\ r = +1, & p = +1, & q = 2, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} r = +1 & p = +1 & q = 2 \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

Aus welchen Quotienten die folgenden Brüche gebildet werden

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 4, & 2, & 2, & 2 \\ \frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{5}{4}, & \frac{11}{9}, & \frac{27}{22}, \end{array}$$

von welchen der zweite die Formel auf $+1$ reduziert, der dritte auf -1, der vierte auf $+1$ etc. Hier taucht das bemerkenswerte Phänomen auf, dass diese Brüche von den vorhergehenden dermaßen abweichen und nichtsdestoweniger dieselben Minima hervorbringen. Aber oben [§ 18] haben wir schon gezeigt, dass eine Formel von dieser Art dieselben Werte erhalten kann, während anstelle von x und y verschiedene Werte eingesetzt werden.

Beispiel 3

§26 Es sei diese Formel vorgelegt

$$25xx - 70xy + 46yy,$$

die zum Minimum zu machen ist; hier muss näherungsweise sein

$$\frac{x}{y} = \frac{7+\sqrt{3}}{5},$$

woher der erste Quotient $= 1$ und der Rest $= 2+\sqrt{3}$ wird, also hat man für den zweiten Quotienten den Bruch $\frac{5}{2+\sqrt{3}} = \frac{5(2-\sqrt{3})}{1} = \frac{10-\sqrt{75}}{1}$ und daher den Quotienten $= 1$. Aber die ganze Operation kann durch unsere Regel erledigt werden, wenn unser Bruch durch Multiplizieren mit 5 auf diese Form $\frac{35+\sqrt{75}}{25}$

zurückgeführt wird, wo dann gilt

$$k = 75, \quad e = 8, \quad r = 35 \quad \text{und} \quad p = 25,$$

woher diese Rechnung folgt:

$$\begin{array}{lll}
r = +35, & p = +25, & q = 1, \\
r = -10, & p = -1, & q = 1, \\
r = +9, & p = +6, & q = 2, \\
r = +3, & p = +11, & q = 1, \\
r = +8, & p = +1, & q = 16, \\
r = +8, & p = +11, & q = 1, \\
r = +3, & p = +6, & q = 1, \\
r = +3, & p = +11, & q = 1, \\
r = +8 & p = +1 & q = 16 \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

Die Quotienten mit den Brüchen werden sich also so verhalten:

$$\begin{array}{ccc|cccc|cc}
1, & 1, & 2, & 1, & 16, & 1, & 1, & 1, & 16 \\
\frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{5}{3}, & \frac{7}{4}, & \frac{117}{67}, & \frac{124}{71}, & \frac{241}{138}, & \frac{365}{209};
\end{array}$$

es ist also ersichtlich, dass die den Indizes 16 unterschriebenen Brüche dem Gefragten Genüge leisten müssen, was passiert, wenn $x = 7$ und $y = 4$ ist; dann geht aber unsere Formel in $+1$ über.

Wenn in der ersten Formel der Wurzel das Vorzeichen $-$ zugeteilt wird, dass hervorgeht

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{75} - 35}{-25},$$

liefert diese durch die Regel entwickelt wegen

$$k = 75 \quad \text{und} \quad e = 8, \quad r = -35, \quad p = -25, \quad q = 1:$$

$$\begin{array}{lll}
r = -35, & p = -25, & q = 1, \\
r = +10, & p = +1, & q = 18, \\
r = +8, & p = +11, & q = 1, \\
r = +3, & p = +6, & q = 1, \\
r = +3, & p = +11, & q = 1, \\
r = +8, & p = +1, & q = 16, \\
r = +8, & p = +11, & q = 1, \\
r = +3, & p = +6, & q = 1, \\
r = +3, & p = +11, & q = 1, \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

Daher werden aber die Quotienten mit den Brüchen so fortschreiten:

$$\begin{array}{cc|cccc|cc}
1, & 18, & 1, & 1, & 1, & 16, & 1, & 1 \\
\frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{19}{18}, & \frac{20}{19}, & \frac{39}{37}, & \frac{59}{56}, & \frac{983}{933}, & \frac{1042}{989}.
\end{array}$$

Der zweite dem Index 18 entsprechende Bruch bringt ohne Zweifel den kleinsten Wert hervor, natürlich $+1$, welcher aus dem ersten Fall nicht gefolgert werden kann, weil dort dieser Bruch $\frac{1}{1}$ dem kleinsten Quotienten unterschrieben worden ist; aber dies ist keinesfalls verwunderlich, deshalb weil diese Werte der Buchstaben x und y sehr klein sind, aber das oben aufgestellte Prinzip, nach welchem wir befohlen werden, die den größten Quotienten entsprechenden Brüche anzunehmen, eigens den größeren Zahlen zukommt und es natürlich passieren kann, dass die mit kleineren Zahlen ausgedrückten Werte von dieser Regel abweichen.

§27 Aus diesen Beispielen wird schon übergenug erkannt, wie unsere genauso leichte wie gefällige Regel in allen Fällen gebraucht werden muss; besonders wird sie aber mit glücklichstem Erfolg beim Lösen jenes hochberühmten Pell'schen Problems verwendet werden können, wo Zahlen x und y gesucht werden, dass $y = \sqrt{kxx+1}$ ist; dann wird nämlich näherungsweise $\frac{y}{x} = \sqrt{k}$ sein müssen, weil ja die Formel $yy - kxx$ minimal werden muss, das Minimum steht aber schon von selbst fest $= 1$ zu sein, hervorgehend, wenn $x = 0$ und $y = 1$ ist. Wie wenn beispielsweise $k = 13$, welchem $e = 3$ zukommt; und zuerst wird $r = 0$, $p = 1$ und so wird die Rechnung so von statten gehen:

$$\begin{array}{lll} r=0, & p=1, & q=3, \\ r=3, & p=4, & q=1, \\ r=1, & p=3, & q=1, \\ r=2, & p=3, & q=1, \\ r=1, & p=4, & q=1, \\ r=3, & p=1, & q=6, \\ r=3 & p=4 & q=1 \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

Daher werden die Quotienten mit den Brüchen $\frac{y}{x}$ sein

$$\begin{array}{ccccc|cccccc|c} 3, & 1, & 1, & 1, & 1, & 6, & 1, & 1, & 1, & 1, & & 6 \\ \frac{1}{0}, & \frac{3}{1}, & \frac{4}{1}, & \frac{7}{2}, & \frac{11}{3}, & \frac{18}{5}, & \frac{119}{33}, & \frac{137}{38}, & \frac{256}{71}, & \frac{393}{109}, & & \frac{649}{180}, \end{array}$$

wo die größten Quotienten sechs sind; weil aber $\frac{y}{x}$ größer sein muss als $\sqrt{k}$, überragen und unterschreiten die hier resultierenden Brüche diesen Wert abwechselnd, für unseren Fall müssen aber die angenommen werden, die an den ungeraden Stellen stehen, also leistet der elfte dieser Brüche, der $y = 649$ und $x = 180$ gibt, dem Gefragten Genüge; aber der der ersten 6 unterschriebene löst die Gleichung $y = \sqrt{13xx - 1}$ auf.