

ÜBER DIE REPRÄSENTATION EINER SPHÄRISCHEN OBERFLÄCHE AUF EINER EBENE *

Leonhard Euler

§1 Hier betrachte ich nicht nur optische Projektionen, in denen die verschiedenen Punkte der sphärischen Oberfläche in der Ebene so dargestellt werden, wie sie von einem Beobachter, der sich an einer bestimmten Stelle aufhält, wahrgenommen werden, während die einzelnen von ihm gesehenen Punkte nach den Perspektivgesetzen auf die Ebene projiziert werden: Aber hier fasse ich das Wort "Repräsentation" im weitesten Sinne auf, so dass die einzelnen Punkte der Oberfläche nach irgendeinem Gesetz auf einer ebenen Oberfläche dargeboten werden, und den einzelnen Punkten auf der Sphäre gewisse Punkte in der Ebene entsprechen, und umgekehrt, wenn es nicht zufällig passiert, dass die Repräsentation gewisser Punkte der Sphäre imaginär wird.

§2 Es bezeichne also die Figur (Fig. 1) *abc* einen Anteil der sphärischen Oberfläche, deren Pol im Punkt *b* und deren Äquator der Kreis *alc* sei;

*Originaltitel: "De Repraesentatione superficiei sphaericae super plano", erstmals publiziert in „Acta academiae scientiarum Petropolitanae 1777, pp. 107-132“, Nachdruck in „Opera Omnia: Series 1, Volume 28, pp. 248 - 275 “, Eneström-Nummer E490, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Artur Diener, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz“

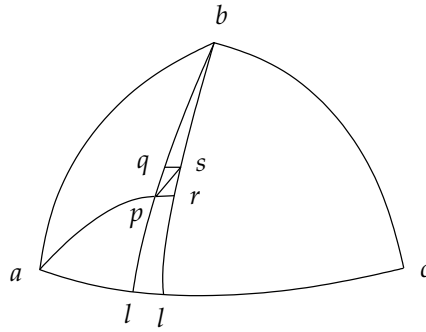


FIG. 1

der erste Meridian sei ab , von welchem aus die Längengrade der einzelnen Punkte der Sphäre gezählt werden, wie es in der Geographie gebräuchlich ist. Es werde nun irgendein auf dem Meridian bpl gelegener Punkt p betrachtet, der vom ersten Meridian ba um den Winkel abl oder den Bogen $al = t$ des Äquators entfernt sei; die Breite dieses Ortes sei hingegen der Bogen $lp = u$, während wir den Radius der Sphäre mit der Einheit ausgedrückt annehmen. Nun stelle in der zweiten Figur die Tischebene die Ebene dar, in welcher die Repräsentation geschehen muss, und es sei P der jenem Ort p entsprechende Punkt, woher zur einer irgendwie nach Blieben angenommenen Achse EF das Lot PX gefällt werde, und, nachdem der Anfang der Abszissen im Punkt E festgelegt worden ist, werde die Abszisse $EX = x$ und die Ordinate $XP = y$ genannt; und weil wir den Punkt P nach irgendeinem Gesetz aus der Lage des Punktes p auf der Sphäre bestimmt zu werden annehmen, aber die Lage des Punktes p durch die zwei Variablen t und u bestimmt wird, werden die gegenwärtigen Koordinaten x und y als irgendwelche Funktionen jener Variablen t und u angesehen werden müssen; daher tritt es klar zu tage, dass diese Untersuchung zu dem Teil der Analysis zu rechnen ist, in welchem Funktionen von zwei Variablen behandelt werden.

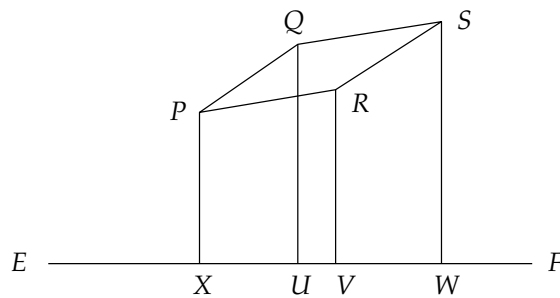


FIG. 2

§3 Nun wollen wir die Veränderlichkeit der zwei Größen t und u in die Rechnung einführen, und es sei (Fig. 1) auf der Sphäre q der Ort, dessen Längengrad $= t$, aber Breitengrad $= u + du$ ist; r sei hingegen der Punkt, dessen Längengrad $t + dt$, aber Breitengrad $lr = u$ sei, woher nach Vervollständigung des Parallelogramms $pqrs$ der Längengrad des Punktes s als Konsequenz $t + dt$ und der Breitengrad desselben Grades $= u + du$ sein wird. Dann werden aber die elementaren Größen auf der Sphäre $pq = du$ und $ll = dt$ sein, woher das Element aus der sphärischen Figur $pr = dt \cos u$ wird, aber das Parallelogramm $pqrs$ wird hingegen ein Rechteck sein, und daher die Diagonale

$$ps = \sqrt{du^2 + dt^2 \cos^2 u}.$$

§4 Nun mögen (Fig. 2) jenen Punkten p, q, r, s der Sphäre in der Ebene die Punkte P, Q, R, S entsprechen, woher zur Achse EF die Lote PX, QU, RV und SW gefällt werden, und weil der Punkt Q aus P entspringt, während allein die Variable u um ihr Element du vermehrt wird, werden die Koordinaten für diesen Punkt Q diese sein

$$EU = x + du \left(\frac{dx}{du} \right) \quad \text{und} \quad UQ = y + du \left(\frac{dy}{du} \right).$$

Auf die gleiche Weise, weil der Punkt R aus P durch die Veränderlichkeit von P allein entspringt, wird es sich für diesen Punkt wie folgt verhalten

$$\text{die Abszisse } EV = x + dt \left(\frac{dx}{dt} \right) \quad \text{und} \quad \text{die Ordinate } VR = y + dt \left(\frac{dy}{dt} \right).$$

Schließlich wird aber die Abszisse für den Punkt S , welcher aus der Veränderlichkeit jeder der beiden t und u entspringt, diese sein

$$EW = x + du \left(\frac{dx}{du} \right) + dt \left(\frac{dx}{dt} \right)$$

und die Ordinate wird diese sein

$$WS = x + dy \left(\frac{dy}{du} \right) + dt \left(\frac{dy}{dt} \right).$$

Daher tritt es klar zutage, dass gelten wird

$$XU = du \left(\frac{dx}{du} \right),$$

welcher also nachstehendes Intervall gleich ist

$$VW = du \left(\frac{dx}{du} \right).$$

Auf die gleiche Weise wird sein

$$WS - VR - UQ - XP = du \left(\frac{dy}{du} \right).$$

Daher folgt, dass das Element RS = dem Element PQ und auf die gleiche Weise $PR = QS$ und daher das Viereck $PQRS$ ein Parallelogramm sein wird.

§5 Weil also das Elementarrechteck $pqrs$ auf der Sphäre in der Ebene durch das Parallelogramm $PQRS$ dargestellt wird, wollen wir zuerst die Seiten miteinander vergleichen, und weil gilt

$$pq = du \quad \text{und} \quad pr = dt \cos u,$$

werden wir in der Ebene haben

$$PQ = du \sqrt{\left(\frac{dx}{du} \right)^2 + \left(\frac{dy}{du} \right)^2} \quad \text{und} \quad PR = dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2}.$$

Dann wird das Element PQ in der Ebene hingegen die Richtung des Meridians uns das dem Zuwachs du entsprechende Stückchen von selbigem darbieten. Aber das Element PR bezeichnet die Richtung der Parallele und das dem Zuwachs $dt \cos u$ entsprechende Stückchen derselben. Wenn daher also die Funktionen x und y so beschaffen wären, dass wäre

$$du = du \sqrt{\left(\frac{dx}{du} \right)^2 + \left(\frac{dy}{du} \right)^2} \quad \text{und} \quad dt \cos u = du \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2},$$

dann erhielten so die Meridiane wie die Parallelen in Ebene dieselbe Größe, welche sie auf der Sphäre haben. Denn ein umso größerer Unterschied bestünde, umso mehr wichen die Winkel in der Ebene von den geraden Winkel ab.

§6 Wir wollen also zuerst die Lage suchen, welche die Richtung des Meridians PQ und der Parallele PR in Bezug auf die Koordinaten x und y haben. Und zuerst ist freilich nach der Figur das Element des Meridians PQ zu unserer Achse EF im einem Winkel geneigt, dessen Tangens dieser ist

$$\left(\frac{dy}{du}\right) : \left(\frac{dx}{du}\right).$$

Auf die gleiche Weise ist die Richtung der Parallele PR zu unserer Achse EF in dem Winkel geneigt, dessen Tangens ist

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right).$$

Die Differenz dieser Winkel wird also den Winkel QPR geben, in welchem die Parallel zum Meridian geneigt ist, deren Tangens also sein wird

$$\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{du}\right) - \left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)}.$$

Deswegen, wenn dieser Winkel ein rechter sein muss, so wie bei der Sphäre, ist es notwendig, dass wird

$$\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) \quad \text{oder} \quad \left(\frac{dy}{du}\right) : \left(\frac{dx}{du}\right) = -\left(\frac{dx}{dt}\right) : \left(\frac{dy}{dt}\right).$$

§7 Wenn daher also verlangt werden würde, dass die Figur $PQRS$ in der Ebene der Figur $pqrs$ auf der Sphäre vollkommen ähnlich und gleich ist, müsste den folgenden Bedingungen Genüge geleistet werden:

als erstes natürlich, dass $PQ = pq$ würde

2°) $PR = pr$

und

3°) der Winkel $QPR = qpr = 90^\circ$.

Dafür würden also die drei folgenden Gleichungen erfordert werden:

$$\begin{aligned}
\text{I. } & \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} = 1 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 1, \\
\text{II. } & \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \cos u \quad \text{oder} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \cos^2 u, \\
\text{III. } & \left(\frac{dy}{du}\right)^2 : \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = -\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 : \left(\frac{dy}{dt}\right)^2.
\end{aligned}$$

Daher, wenn wir festlegen

$$\left(\frac{dy}{du}\right) : \left(\frac{dx}{du}\right) = \tan \varphi,$$

müsste durch die dritte Bedingung sein

$$\left(\frac{dy}{du}\right) = \left(\frac{dx}{du}\right) \tan \varphi \quad \text{und} \quad \left(\frac{dy}{dt}\right) = -\left(\frac{dx}{dt}\right) \cot \varphi,$$

welche Werte in den zwei vorhergehenden Gleichungen eingesetzt lieferten

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \cos^2 \varphi \quad \text{und} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \sin^2 \varphi \cos^2 u.$$

Es ist aber offenbar, dass diesen drei Bedingungen zusammengenommen auf keine Weise Genüge geleistet werden kann, weil ja gewiss ist, dass eine sphärische Oberfläche in keinsten Weise genau in der Ebene darstellt werden kann.

§8 Um aber die Differentialformeln aus der Rechnung herauszuwerfen, wollen wir die folgenden Substitutionen durchführen

$$\left(\frac{dx}{du}\right) = p, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right) = q, \quad \left(\frac{dy}{du}\right) = r \quad \text{und} \quad \left(\frac{dy}{dt}\right) = s,$$

und zuerst wird daher freilich werden

$$dx = pdu + qdt \quad \text{und} \quad dy = rdu + sdt$$

und daher wird vor Allem verlangt, dass diese zwei Formeln integrierbar werden, was passieren wird, wenn p, q, r, s solche Funktionen der zwei Variablen t und u waren, dass ist

$$\left(\frac{dp}{dt}\right) = \left(\frac{dq}{du}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{dr}{dt}\right) = \left(\frac{ds}{du}\right).$$

Außerdem werden die oben gefundenen Werte in der Tat so ausgedrückt werden, dass gilt

$$PQ = du\sqrt{pp+rr} \quad \text{und} \quad PR = dt\sqrt{qq+ss}.$$

Dann wird aber der Tangens des Winkels, in welchem das Element PQ zur Achse geneigt ist, $= \frac{s}{q}$ sein; schließlich wird der Tangens des Winkels QPR sein

$$\frac{qr - ps}{pq + rs}.$$

§9 Nachdem also diese Benennungen eingeführt worden sind, müssten für eine vollkommene Darstellung die drei folgenden Bedingungen erfüllt werden:

$$\text{I. } pp + rr = 1, \quad \text{II. } qq + ss = \cos^2 u, \quad \text{III. } \frac{r}{p} = -\frac{q}{s}.$$

Daher wird also, wenn $\frac{r}{p} = \tan \varphi$ wird, $\frac{s}{q} = -\cot \varphi$ sein, so dass ist

$$r = p \tan \varphi \quad \text{und} \quad s = -q \cot \varphi,$$

woher die zwei ersten Bedingungen geben

$$pp = \cos^2 \varphi \quad \text{und} \quad qq = \sin^2 \varphi \cos^2 u,$$

und daher folgern wir

$$p = \cos \varphi \quad \text{und} \quad q = -\sin \varphi \cos u$$

und daher

$$r = \sin \varphi \quad \text{und} \quad s = \cos \varphi \cos u.$$

Nachdem diese Werte also eingesetzt worden sind, müssen diese zwei Formeln integrierbar gemacht werden:

$$dx = du \cos \varphi - dt \sin \varphi \cos u$$

und

$$dy = du \sin \varphi + dt \cos \varphi \cos u;$$

weil dafür verlangt wird, dass gilt

$$\left(\frac{dp}{dt}\right) = \left(\frac{dq}{du}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{dr}{dt}\right) = \left(\frac{ds}{du}\right),$$

werden diese zwei Gleichungen entspringen

$$\text{I.} \quad -\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \sin \varphi = \sin u \sin \varphi - \left(\frac{d\varphi}{du}\right) \cos u \cos \varphi$$

$$\text{II.} \quad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \cos \varphi = -\sin u \cos \varphi - \left(\frac{d\varphi}{du}\right) \cos u \sin \varphi.$$

Daher liefert

$$\text{I.} \cos \varphi + \text{II.} \sin \varphi$$

also

$$0 = \left(\frac{d\varphi}{du}\right) \cos u, \quad \text{daher} \quad \left(\frac{d\varphi}{du}\right) = 0,$$

und so müsste der Winkel φ nur von der Variable t abhängen; aber diese Kombination:

$$\text{II.} \cos \varphi - \text{I.} \sin \varphi$$

gibt hingegen

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = -\sin u,$$

und daher müsste der Winkel φ von u abhängen, weil was der vorhergehenden Schlussfolgerung widerspricht, ist es auch durch konkrete Berechnung dargetan worden, dass eine solche vollkommene Darstellung Geltung haben kann.

§10 Weil also eine vollkommene Darstellung gänzlich ausgeschlossen wird, sind wir natürlich gezwungen eine Disparität in der Darstellung zuzulassen, mit welcher eine in der Ebene beschriebene Figur von einer sphärischen Figur abweicht. Je nachdem welche Abweichung von der Wahrheit wir also zulassen wollten, wird es möglich sein die Darstellung an das in einem bestimmten Fall vorgelegte Ziel anzupassen; daher, weil die Bedingungen, denen wir Genüge zu leisten wünschen, auf unendlich viele Arten variiert werden können, wollen wir im Folgenden einige wesentliche Fälle entwickeln. Aber wir werden vor Allem annehmen, dass der Winkel, welchen die Meridiane mit den Parallelen festlegen, überall ein rechter sein muss; weil, wenn wir schiefe Winkel zuließen, eine besonders ungeeignete Darstellung hervorginge, weshalb wir im Folgenden ununterbrochen annehmen, dass der Winkel QPR ein rechter Winkel ist und daher gilt

$$\frac{r}{p} = -\frac{q}{s}.$$

§11 Also wollen wir diese Eigenschaft, nach welcher in der Darstellung alle Parallelen die Meridiane normal durchlaufen müssen, im Allgemeinen genauer entwickeln. Für dieses Ziel wollen wir wiederum den Winkel φ einführen, dass $r = p \tan \varphi$ und $s = -q \cot \varphi$ ist. Nachdem also diese Werte anstelle von r und s eingesetzt worden sind, werden die zwei folgenden Differentialformeln integrierbar gemacht werden müssen

$$dx = pdu + qdt \quad \text{und} \quad dy = pdu \tan \varphi - qdt \cot \varphi.$$

§12 Um nun diese Formeln uniformer zu machen, wollen wir anstelle von p und q die zwei neuen Variablen m und n einführen, indem wir festlegen

$$p = m \cos \varphi \quad \text{und} \quad q = n \sin \varphi,$$

woher werden wird

$$r = m \sin \varphi \quad \text{und} \quad s = -n \cos \varphi$$

und sie beiden integrierbar zu machenden Formeln werden dann diese sein

$$dx = mdu \cos \varphi + ndt \sin \varphi \quad \text{und} \quad dy = mdu \sin \varphi - ndt \cos \varphi.$$

Und so wird die ganze Aufgabe darauf reduziert, dass danach gesucht wird, Funktionen von welcher Art für m und n angenommen werden müssen, dass diese zwei Formeln integrierbar gemacht werden; es wird besonders auf die Bedingung zu achten sein, welche wir darüber hinaus in jedem Fall erfüllen wollten.

ANNAHME 1,

*in welcher alle Meridiane zu unserer Achse EF normal,
die Parallelen hingegen EF parallel festgelegt werden*

§13 Weil der Winkel φ die Neigung des Elements PQ zur Achse EF misst, weil wir ja $\tan \varphi = \frac{r}{p}$ angenommen haben, das Element PQ hingegen die Richtung der Meridians anzeigt, wird dieser Winkel φ für diese Annahme ein rechter sein, woher die beiden Differentialformeln sein werden

$$dx = ndt \quad \text{und} \quad dy = mdu,$$

weil welche integrierbar sein müssen, wird es auf unendlich viele Weise bewirkt werden können, solange für m irgendeine Funktion von u , für n hingegen eine Funktion von t angenommen wird; deswegen wird darüber hinaus mehreren Bedingungen, die verlangt werden können, genügt werden können.

§14 Zuerst wird also bewirkt werden können, dass alle Längengrade einander gleich werden, weil es ja keinen Grund gibt, dass in diesen Graden eine Ungleichheit festgelegt wird. Wenn daher also unsere Achse EF den Äquator bezeichnet, so dass die Abszisse EX den Bogen $al = t$ des Äquators darstellt, wird $x = t$ und daher n der Einheit oder einer anderen nach Belieben anzunehmenden konstanten Größe gleich gesetzt werden müssen, dann wird hingegen für die Ordinate irgendeine Funktion von u angenommen werden können.

§15 In dieser Annahme (Fig. 3) wird das Viereck $PQRS$ nicht nur ein rechtwinkliges Parallelogramm sein, wie bei der Sphäre, sondern auch der Punkt Q wird auf der verlängerten Ordinate XP selbst gelegen sein, so dass $PQ = dy$ und $PR = dx = dt$ sein wird.

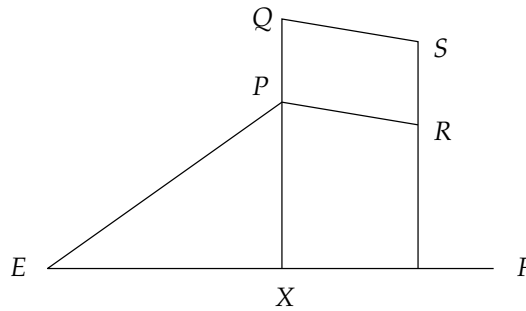


FIG. 3

Wenn wir daher also $y = u$ nähmen, weil ja u den Breitengrad des Ortes bezeichnet, wenn $dx = du$ den Längengrad und $dy = du$ den Breitengrad darstellt, wäre in diesem Fall $dy = dx$. Aber eine solche Darstellung wäre völlig nutzlos und böte die Erdregionen sehr stark verzerrt dar.

§16 Für die Ordinate y wird aber eine solche Funktion des Breitengrades u angenommen werden müssen, damit einem gewissen Ziel, welches wir uns vorlegen, Genüge geleistet wird. Und zuerst taucht hier freilich die Bedingung auf, dass das Parallelogramm $PQRS$ in der Ebene dem Parallelogramm $pqrs$ auf der Sphäre gleich gemacht wird, weil ja auf diese Weise zumindest alle kleinsten Stückchen auf der sphärischen Oberfläche auf die gleiche Weise in der Ebene dargeboten werden werden. Und diese ist jene Bedingung selbst, die in nach dem Erfinder MERCATOR'sche genannten hydrographischen Karten beobachtet zu werden pflegt, weil ja eine solche Darstellung den Schiffsfahren die größten Vorteile an die Hand gibt, welche Darstellungsweise wir also kurz genauer entwickeln wollen.

1°) ÜBER DIE HYDROGRAPHISCHEN KARTEN DES MERCATOR

§ 16[a] Weil ja hier also verlangt wird, dass das Rechteck $PQRS$ dem Rechteck $pqrs$ gleich wird, wo $pq = du$ und $pr = dt \cos u$ ist, muss wegen $dx = dt$ werden

$$dy : dt = du : dt \cos u,$$

woher $dy = \frac{du}{\cos u}$ erschlossen wird, und daher wird durch Integrieren sein

$$y = \log \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2}u \right).$$

Der Breite, welche auf der Sphäre mit einem Winkel bezeichnet wird, wird in dieser Darstellung natürlich die Ordinate y entsprechen, welche dem hyperbolischen Logarithmus des Tangens $45^\circ + \frac{1}{2}u$ gleich ist; aus dieser Formel pflegen die Werte von y für die einzelnen Breitengrade u berechnet und in der Tischebene dargestellt zu werden.

§17 Weil hier natürlich alle Parallelen dem Äquator gleich gesetzt werden, welche dennoch auf der Sphäre ununterbrochen kleiner werden, müssen die Grade eines jeden Meridians, welche auf der Sphäre gleich sind, in dieser Darstellung umso größer angenommen werden, umso kleiner hier die Grade einer jeden Parallele als bei der Sphäre sind. Und auf diese Weise werden die Breitengrade immer mehr vermehrt werden, umso größer der Breitengrad war, und das in demselben Verhältnis, in welchem der Kosinus des Breitengrades vermindert wird. So, wenn du einen Grad im Meridian auf der Sphäre bezeichnet, ist die Größe dieses Grades in diesen Karten $\frac{du}{\cos u}$; daher ist der Grad des Meridians unter einer Breite mit 60° doppelt so groß wie auf der sphärischen Oberfläche; aber am Pol wächst er sogar ins Unendliche, welches Grundes wegen es nicht möglich ist, diese Karten bis hin zu den Polen auszudehnen.

§18 Aber der größte Vorteil, welchen diese Karten den Schiffsfahrern verschaffen, besteht darin, dass die Loxodromen, welche auf der Sphäre alle Meridiane in demselben Winkel durchlaufen, in dieser Darstellung mit gekrümmten Linien dargeboten werden, welche natürlich alle Meridiane, die hier einander parallel sind, in demselben Winkel schneiden.

§19 So, wenn auf der Sphäre die Linie ap eine Loxodrome bezeichnet, die die Meridiane in einem Winkel $= \zeta$ durchlaufe, und ihre Länge $ap = z$ genannt wird, wird gelten

$$du : dz = \cos \zeta : 1 \quad \text{und daher} \quad dz = \frac{du}{\cos \zeta} \quad \text{und daraus} \quad z = \frac{u}{\cos \zeta}.$$

Wenn daher dieser Linie ap in der Ebene die Linie EP entspricht, weil ja der Winkel EPX ebenso $= \zeta$ ist, ist es ersichtlich, dass diese Linie EP eine Gerade

und ihre Länge $\frac{y}{\cos \zeta}$ sein wird; daher wird aus der bekannten Größe der Linie EP umgekehrt die wahre Länge des von einem Schiff befahrenen Weges, natürlich die Linie ap , erschlossen werden können, weil $ap : EP = u : y$ ist; aber dieses Verhältnis $u : y$ kann als bekannt angesehen werden.

§20 Wie aber die Loxodromen auf diese Weise in der Ebene sehr leicht durch gerade Linien dargeboten werden, so werden andererseits die größten auf der Sphäre gezogenen Kreise hier durch sehr hoch transzendente Linien dargestellt werden. Es sei nämlich ap der Bogen des größten Kreises, der zum Äquator in a im Winkel $lap = \vartheta$ geneigt ist, es wird, wie bekannt ist, sein

$$\tan u = \tan \vartheta \sin t,$$

woher die Natur der jenem Bogen entsprechenden Kurve EP durch die nachstehenden Formeln bestimmt werden können wird

$$x = t \quad \text{und} \quad y = \log \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2}u \right).$$

§21 Um also die Natur dieser Kurve EP ausfindig zu machen, bezeichne e die Zahl, deren hyperbolischer Logarithmus = 1 ist, und es wird sein

$$e^y = \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2}u \right) = \frac{1 + \tan \frac{1}{2}u}{1 - \tan \frac{1}{2}u},$$

und daher

$$\tan \frac{1}{2}u = \frac{e^y - 1}{e^y + 1},$$

woher weiter erschlossen wird

$$\tan u = \frac{e^{2y} - 1}{2e^y},$$

welcher Wert in der oberen Gleichung eingesetzt wegen $t = x$ diese Gleichung zwischen x und y liefern wird:

$$\frac{e^{2y} - 1}{2e^y} = \tan \vartheta \sin x,$$

mit welcher die Natur dieser Kurve EP ausgedrückt wird; daher tritt es klar zu tage, wenn die Länge x kleinst möglich war, dass dann auch y am kleinsten sein wird, und daher

$$e^y = 1 + y \quad \text{und} \quad e^{2y} = 1 + 2y,$$

woher wegen $\sin x = x$ sein wird

$$\frac{y}{1+y} = x \tan \vartheta$$

und daher auch

$$\frac{y}{x} = \tan \vartheta;$$

daher tritt es klar zu tage, dass die Kurve in E zum Äquator auch im Winkel ϑ geneigt ist. Dann wird aber nach Nehmen von $x = 90^\circ$ die Ordinate y maximal werden und daher

$$\frac{e^{2y} - 1}{2e^y} = \tan \vartheta,$$

woher abgeleitet wird

$$e^y = \tan \vartheta \pm \sqrt{\tan^2 \vartheta + 1} = \frac{\sin \vartheta + 1}{\cos \vartheta} = \sqrt{\frac{1 + \sin \vartheta}{1 - \sin \vartheta}}$$

welcher Ausdruck weiter auf $\cot(45^\circ - \frac{1}{2}\vartheta)$ reduziert wird, und so wird sein

$$e^y = \cot\left(45^\circ - \frac{1}{2}\vartheta\right)$$

und daher

$$y = \log \cot\left(45^\circ - \frac{1}{2}\vartheta\right) = \log \tan\left(45^\circ + \frac{1}{2}\vartheta\right)$$

Daher wird eingesehen, dass diese Kurve eine sehr hohe Transzendente ist.

2°) ÜBER KARTEN, DIE DIE WAHRE GRÖSSE EINER JEDEN REGION DARBIETEN

§22 Es bleiben, wie wir in dieser Hypothese angenommen haben, alle Meridiane einander parallel, aber die Grade am Äquator einander alle gleich,

welchen also auch die Grade in allen Parallelen gleich werden werden, so dass $x = t$ ist; und nun wird verlangt, dass die Rechteckfläche $PQRS = dx dy$ der Rechteckfläche $pqrs$ auf der Sphäre $= du dt \cos u$ gleich gemacht wird. Es werde also $dy = du \cos u$ und es wird durch Integrieren $y = \sin u$ sein, woher eine Konstruktion einer Repräsentation von dieser Art sehr leicht sein wird, weil die einzelnen Ordinaten den Sinus der Breitengrade gleich genommen werden müssen, denen sie entsprechen. Aber die Grade in jedem beliebigen Meridian werden beim Entfernen ununterbrochen vermindert werden und am Pol vollkommen verschwinden; aber der Pol wird durch eine dem Äquator EF parallele und von ihr um das Intervall $\sin u = 1$, das heißt dem Radius der Sphäre gleich, entfernte gerade Linie dargestellt werden.

§23 Wenn daher also die ganze Erdoberfläche auf diese Weise dargestellt wird, wird die Karte ein Parallelogramm sein, dessen Länge der Peripherie des ganzen Äquators $= 2\pi$ gleich sein wird; die Breite wird aber zu beiden Seiten hin vo, Äquator aus bis hin zur Distanz $= 1$ ausgedehnt, woher die Fläche des ganzen Rechtecks $= 4\pi$ sein wird, welche der Fläche der ganzen sphärischen Oberfläche gleich wird. In solchen Karten werden also alle Bereiche der Erde mit der wahren Größe dargeboten werden, obgleich deren Form sehr stark von der Wahrheit abweichen wird. Denn immer wird die Fläche einer jeden auf diese Weise in der Ebene dargestellten Region der Fläche derselben Region auf der Erdoberfläche gleich sein; daher werden solche Karten dazu dienen, die verschiedenen Bereiche der Erde gemäß der wahren Größe miteinander zu vergleichen, was am angenehmsten durch die Grade oder Meilenquadrate geleistet werden wird, während den einzelnen Graden des Äquators fünfzehn germanische Meilen zugeteilt werden.

ANNAHME 2,

in welcher sehr kleine Regionen auf der Erde durch gleiche Formen in der Ebene dargeboten werden

§24 Um diese Gleichheit zu bewahren (Fig. 2), ist es vor Allem notwendig, dass die Meridiane überall zu den Parallelen normal festgelegt werden, weswegen die beiden Integralformeln, welche integrierbar gemacht werden müssen, wie sie schon oben in Paragraph 12 gefunden sind, diese sein werden

$$dx = mdu \cos \varphi + ndt \sin \varphi$$

und

$$dy = mdu \sin \varphi - ndt \cos \varphi,$$

daher werden aber die Elemente

$$PQ = du\sqrt{pp + rr} = mdu \quad \text{und} \quad PR = dt\sqrt{qq + aa} = ndt,$$

der Winkel QPR ist aber hingegen mit diesen Formeln schon zu einem rechten gemacht worden.

§25 Weil also das Rechteck $PQRS$ dem Rechteck $pqrs$ gleich sein muss, ist es notwendig, dass $PQ : PR = pq : pr$ wird, das heißt $m : n = 1 : \cos u$ und daher $n = m \cos u$, woher unsere zwei Differentialformeln sein werden:

$$dx = mdu \cos \varphi + mdt \cos u \sin \varphi$$

und

$$dy = mdu \sin \varphi - mdt \cos u \cos \varphi.$$

§26 Die ganze Aufgabe wird also darauf reduziert, dass aufgezeigt wird, welche Funktionen von t und u für m und φ angenommen werden müssen, dass diese beiden Formeln integrierbar gemacht werden. Weil wir ja aber oben festgelegt haben

$$p = m \cos \varphi \quad \text{und} \quad r = m \sin \varphi,$$

wollen wir der Kürze wegen diese Buchstaben p und r einführen, dass wir diese zwei Gleichungen haben:

$$dx = pdu + rdt \cos u$$

und

$$dy = rdu - p dt \cos u,$$

und nun wird gesucht, welche Funktionen von t und u für die Buchstaben p und r angenommen werden müssen, dass diese beiden Formeln integrierbar werden, wo sich freilich sofort der Fall der hydrographischen Karten offenbart, in welchem natürlich genommen werden muss

$$p = 0 \quad \text{und} \quad r = \frac{1}{\cos u}.$$

Aber hier andere Fälle durch Raten zu finden, ist nicht so leicht möglich.

§27 Aus den bekannten Integrationsbedingungen wird aber verlangt, dass gilt

$$\left(\frac{dp}{dt}\right) = \left(\frac{dr \cos u}{du}\right) = -r \sin u + \cos u \left(\frac{dr}{du}\right)$$

und

$$\left(\frac{dr}{dt}\right) = -\left(\frac{dp \cos u}{du}\right) = p \sin u - \cos u \left(\frac{dp}{du}\right),$$

aus der zweiten von welchen wird

$$\left(\frac{dp}{du}\right) = p \tan u - \left(\frac{dr}{dt}\right) \frac{1}{\cos u}.$$

Daher, weil gilt

$$dp = du \left(\frac{dp}{du}\right) + dt \left(\frac{dp}{dt}\right),$$

entspricht diese neue Bedingung:

$$dp = pdu \tan u - \left(\frac{dr}{du}\right) \frac{du}{\cos u} - r dt \sin u + \left(\frac{dr}{du}\right) dt \cos u,$$

welche mit $\cos u$ multipliziert, nachdem der Term p auf die andere Seite gebracht worden ist, wird

$$dp \cos u - pdu \sin u = -rdt \sin u \cos u + \left(\frac{dr}{du}\right) dt \cos^2 u - \left(\frac{dr}{dt}\right) du,$$

wo, weil die linke Seite von selbst integrierbar ist, auch die rechte integrierbar gemacht werden muss, indem natürlich für r eine geeignete Funktion von t und u gesucht wird.

§28 Dieser Sache wegen muss auch ein anderer Weg beschritten werden, diese Formeln aufzulösen. Nachdem ich diese Schwierigkeit sittsam und gründlich betrachtet hatte, haben sich mir zwei Methoden offenbart, diese Aufgabe zu bewältigen, von denen die eine unzählige partikuläre Lösungen an die Hand gibt, die andere mich hingegen zur allgemeinsten Lösung geführt hat. Diese beiden Methoden, mit welchen der um Funktionen zweier Variablen kreisenden Analysis riesige Zuwächse verschafft zu werden scheinen, möchte ich hier also genauer entwickeln.

EINE PARTIKULÄRE METHODE DIE NACHSTEHENDEN
DIFFERENTIALGLEICHUNGEN AUFZULÖSEN

$$dx = pdu + rdt \cos u, \quad dy = rdu - pdt \cos u$$

§29 Weil die beiden Funktionen p und r jede der beiden Variablen u und t involvieren, wollen wir jede der beiden einem Produkt aus einer Funktion von u mit einer Funktionen von t gleich setzen. Es sei also

$$p = UT \quad \text{und} \quad r = V\Theta,$$

während U und V Funktionen allein von u , T und Θ hingegen Funktionen allein von t sind, und so werden wir diese zwei Differentialformeln integrierbar zu machen haben:

- I. $dx = UTdu + V\Theta dt \cos u$
- II. $dy = V\Theta du - UTdt \cos u.$

§30 Daher wird nun auf zwei Weisen so der Wert von x wie der von y durch die Integralformeln dargeboten werden können. Wenn nämlich die Größe t wie eine Konstante angesehen wird und daher die letzteren Glieder verschwinden, wird aus den ersten erschlossen werden

$$x = T \int U du \quad \text{und} \quad y = \Theta \int V du;$$

wenn aber die Größe u für konstant gehalten wird, wird aus den zweiten Gliedern werden

$$x = V \cos u \int \Theta dt \quad \text{und} \quad y = -U \cos u \int T dt$$

und diese je zwei Werte jeder der beiden müssen einander gleich sein, woher wir für x diese Gleichung erlangen:

$$T \int U du = V \cos u \int \Theta dt \quad \text{oder} \quad \frac{\int U du}{V \cos u} = \frac{\int \Theta dt}{T};$$

für y wird aber sein

$$\Theta \int V du = -U \cos u \int T dt \quad \text{oder} \quad \frac{\int V du}{U \cos u} = -\frac{\int T dt}{\Theta}.$$

Aus den zwei ersten zwei Bedingungen muss die natürliche Beschaffenheit der Funktionen U und V , T und Θ gefunden werden.

§31 Weil also sein muss

$$\frac{\int U du}{V \cos u} = \frac{\int \Theta dt}{T},$$

ist es offenbar, dass diese zwei Brüche einer konstanten Größen gleich sein müssen, weil ja die beiden Variablen t und u in keinsten Weise voneinander abhängen. Es sei also α diese konstante Größe, und es wird sein

$$\int U du = \alpha V \cos u \quad \text{und} \quad \int \Theta dt = \alpha T.$$

Weil auf die gleiche Weise gilt

$$\frac{\int V du}{U \cos u} = -\frac{\int T dt}{\Theta},$$

werde jeder der beiden Brüche einer konstanten Größe β gleich und es wird daher werden

$$\int V du = \beta U \cos u \quad \text{und} \quad \int T dt = -\beta \Theta.$$

Und auf diese Weise werden die Integralformeln auf absolute Größen reduziert, woher die Werte von x und y so ohne das Summationszeichen ausgedrückt werden werden:

$$x = \alpha TV \cos u \quad \text{und} \quad y = \beta \Theta U \cos u.$$

§32 Wir wollen der Kürze wegen $U \cos u = p$ und $V \cos u = Q$ setzen, so dass gilt

$$U = \frac{P}{\cos u} \quad \text{und} \quad V = \frac{Q}{\cos u},$$

woher unsere vier Formeln sein werden

$$\int \Theta dt = \alpha T \quad \text{und} \quad \int T dt = -\beta \Theta.$$

$$\int \frac{P du}{\cos u} = \alpha Q \quad \text{und} \quad \int \frac{Q du}{\cos u} = \beta P.$$

Nun geben die ersten Formeln jeder der beiden Ordnungen differenziert

$$\Theta = \frac{\alpha dT}{dt}, \quad P = \frac{\alpha dQ \cos u}{du},$$

welche Werte in den zweiten eingesetzt liefern

$$\int T dt = -\frac{\alpha \beta dT}{dt} \quad \text{und} \quad \int \frac{Q du}{\cos u} = \frac{\alpha \beta dQ \cos u}{du}.$$

Diese Gleichungen liefern erneut differenziert, wobei die Elemente dt und du konstant angenommen werden, die folgenden Gleichungen:

$$T = -\frac{\alpha \beta d d T}{dt^2} \quad \text{und} \quad Q = \frac{\alpha \beta d d Q \cos^2 u}{du^2} - \frac{\alpha \beta d Q \sin u \cos u}{du}$$

und so sind wir zu zwei Differentialgleichungen zweiten Grades geführt worden, von deren Integration die ganze Lösung abhängt.

§34 Wir wollen von der ersten Gleichung aus beginnen

$$T = -\frac{\alpha\beta ddT}{dt^2},$$

welche mit $2dT$ multipliziert und integriert liefert

$$TT = -\frac{\alpha\beta dT^2}{dt^2} + A,$$

woher erschlossen wird

$$dt^2 = \frac{\alpha\beta dT^2}{A - TT}.$$

Auf die gleiche Weise liefert die andere Gleichung

$$Q = \frac{\alpha\beta ddQ \cos^2 u}{du^2} - \frac{\alpha\beta dQ \sin u \cos u}{du}$$

mit $2dQ$ multipliziert und integriert

$$QQ = \frac{\alpha\beta Q^2 \cos^2 u}{du^2} + B,$$

woher erschlossen wird

$$\frac{du^2}{\cos^2 u} = \frac{\alpha\beta dQ^2}{QQ - B}.$$

Für die weitere Integration von diesen müssen aber zwei Fälle unterschieden werden, je nachdem ob die Größe $\alpha\beta$ positiv oder negativ war.

DER ERSTE FALL,

in welchem $\alpha\beta = +\lambda\lambda$ und daher $\beta = \frac{\lambda\lambda}{\alpha}$ ist

§35 In diesem Fall werden wir also haben

$$dt^2 = \frac{\lambda\lambda dT^2}{A - TT},$$

wo, weil A eine positive Größe sein muss, wir $A = aa$ setzen wollen und sein wird

$$dt = \frac{\lambda dT}{\sqrt{aa - TT'}}$$

deren Integral offenbar dieses ist

$$t + \delta = \lambda \arcsin \frac{T}{a};$$

umgekehrt wird also erschlossen

$$T = a \sin \left(\frac{t + \delta}{\lambda} \right);$$

daher, weil gilt

$$dT = \frac{adt}{\lambda} \cos \left(\frac{t + \delta}{\lambda} \right)$$

wird wegen $\Theta = \frac{\alpha dT}{dt}$ nun sein

$$\Theta = \frac{\alpha a}{\lambda} \cos \left(\frac{t + \delta}{\lambda} \right).$$

§36 Aber die andere zu integrierende Gleichung wird wegen $\alpha\beta = \lambda\lambda$ sein

$$\frac{du}{\cos u} = \frac{\lambda dQ}{\sqrt{QQ - B}}$$

welche integriert gibt

$$\log \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2}u \right) + \lambda\lambda \varepsilon = \lambda \log(Q + \sqrt{QQ - B}).$$

Um aber diese Formeln angenehmer entwickeln zu können, wollen wir festlegen

$$\tan \left(45^\circ + \frac{1}{2}u \right) = s,$$

und weil gilt

$$\log s = \int \frac{du}{\cos u},$$

wird sein

$$\frac{ds}{s} = \frac{du}{\cos u} \quad \text{und daher} \quad ds = \frac{s du}{\cos u}.$$

Weil also gilt

$$\log \varepsilon^\lambda s = \lambda \log(Q + \sqrt{QQ - B}),$$

wird sein

$$\varepsilon^\lambda = (Q + \sqrt{QQ - B})^\lambda$$

und daher

$$Q + \sqrt{QQ - B} = \varepsilon s^{\frac{1}{\lambda}},$$

wo wir der Kürze wegen $\frac{1}{\lambda} = \nu$ setzen wollen, und nach der Entwicklung wird hervorgehen

$$Q = \frac{1}{2} \varepsilon s^\nu + \frac{Bs^{-\nu}}{2\varepsilon},$$

und daher wird

$$dQ = \frac{1}{2} \nu \varepsilon s^{\nu-1} ds - \frac{\nu B}{2\varepsilon} s^{-\nu-1} ds,$$

welche Gleichung wegen $ds = \frac{s du}{\cos u}$ in diese übergeht

$$dQ = \frac{\frac{1}{2} \nu \varepsilon s^\nu du}{\cos u} - \frac{\nu B}{2\varepsilon} s^{-\varepsilon} \frac{du}{\cos u}.$$

Weil also $P = \frac{\alpha dQ \cos u}{du}$ war, wird sein

$$P = \frac{1}{2} \alpha \nu \varepsilon s^\nu - \frac{\alpha \nu B s^{-\nu}}{2\varepsilon}.$$

§37 Nachdem also diese Werte gefunden worden sind, wird sein

$$U = \frac{\alpha \nu \varepsilon s^\nu}{2 \cos u} - \frac{\alpha \nu B s^{-\nu}}{2 \varepsilon \cos u} \quad \text{und} \quad V = \frac{\varepsilon s^\nu}{2 \cos u} + \frac{B s^{-\nu}}{2 \varepsilon \cos u},$$

aus welchen wir schließlich unsere beiden Koordinaten x und y berechnen: Natürlich

$$x = \frac{1}{2} \alpha a \sin \left(\frac{t + \delta}{\lambda} \right) \left(\varepsilon s^\nu + \frac{B}{\varepsilon} s^{-\nu} \right)$$

und

$$y = \frac{1}{2} \alpha \nu \lambda a \cos \left(\frac{t + \delta}{\lambda} \right) \left(\varepsilon s^\nu - \frac{B}{\varepsilon} s^{-\nu} \right),$$

wo sich daran zu erinnern ist, dass ja gilt

$$\nu = \frac{1}{\lambda} \quad \text{und} \quad s = \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2} u \right);$$

daher wollen wir, um diese Formeln gefälliger zu machen, $B = \varepsilon b$ setzen, nach Anmerken welcher Dinge wir erhalten werden

$$x = \frac{1}{2} \alpha \varepsilon a \sin \left(\frac{t + \delta}{\lambda} \right) \left(s^{\frac{1}{\lambda}} + b s^{-\frac{1}{\lambda}} \right),$$

$$y = \frac{1}{2} \alpha \varepsilon a \cos \left(\frac{t + \delta}{\lambda} \right) \left(s^{\frac{1}{\lambda}} - b s^{-\frac{1}{\lambda}} \right).$$

DER ZWEITE FALL,

in welchem $\alpha \beta = -\mu \mu$ und daher $\beta = -\frac{\mu \mu}{\alpha}$ ist

§38 In diesem Fall werden wir also haben

$$dt^2 = -\frac{\mu \mu dT^2}{A - TT}$$

und daher

$$dt = \frac{\mu dT}{\sqrt{TT - A}},$$

woher durch Integrieren wird

$$t + \delta = \mu \log(T + \sqrt{TT - A}),$$

woher, wenn e die Zahl bezeichnet, deren hyperbolischer Logarithmus = 1 ist, sein wird

$$e^{\frac{t+\delta}{\mu}} = T + \sqrt{TT - A}.$$

Es sei der Kürze wegen $\frac{t+\delta}{\mu} = \vartheta$, so dass $d\vartheta = \frac{dt}{\mu}$ ist, und es wird sein

$$\varepsilon^\vartheta - T = \sqrt{TT - A},$$

woher wird

$$T = \frac{e^{2\vartheta} + A}{2e^\vartheta} = \frac{1}{2}e^\vartheta + \frac{1}{2}Ae^{-\vartheta}.$$

Daher wird aber

$$dT = \frac{dt}{2\mu}e^\vartheta - \frac{Adt}{2\mu}e^{-\vartheta},$$

woher wird

$$\Theta = \frac{dt}{2\mu}(e^\vartheta - Ae^{-\vartheta}).$$

§39 In diesem Fall wird aber weiter sein

$$\frac{du^2}{\cos^2 u} = -\frac{\mu\mu dQ^2}{QQ - B} = \frac{\mu\mu dQ^2}{B - QQ}.$$

Weil also B notwendigerweise positiv ist, wollen wir $B = bb$ setzen, dass wird

$$\frac{du}{\cos u} = \frac{\mu dQ}{\sqrt{bb - QQ}}$$

und durch Integrieren

$$\log\left(45^\circ + \frac{1}{2}u\right) + \log \varepsilon = \mu \arcsin \frac{Q}{b},$$

wo, wenn wiederum $\tan\left(45^\circ + \frac{1}{2}u\right) = s$ ist, sein wird

$$\frac{\log \varepsilon s}{\mu} = \arcsin \frac{Q}{b},$$

woher wir umgekehrt ableiten

$$Q = b \sin \frac{\log \varepsilon s}{\mu},$$

und daher

$$dQ = \frac{b}{\mu} \cdot \frac{ds}{s} \cos \frac{\log \varepsilon s}{\mu} = \frac{b}{\mu} \frac{du}{\cos u} \cos \frac{\log \varepsilon s}{\mu},$$

woher wird

$$P = \frac{\alpha b}{\mu} \cos \frac{\log \varepsilon s}{\mu}.$$

§40 Weil also aus dem Oberen gilt

$$x = \alpha TV \cos u = \alpha TQ \quad \text{und} \quad y = \beta \Theta P = -\frac{\mu \mu}{\alpha} \Theta P,$$

wird, indem die gerade gefundenen Werte eingesetzt werden, sein

$$x = \frac{1}{2} \alpha b \sin \frac{\log \varepsilon s}{\mu} (e^\vartheta + Ae^{-\vartheta})$$

und

$$y = -\frac{1}{2} \alpha b \cos \frac{\log \varepsilon s}{\mu} (e^\vartheta - Ae^{-\vartheta}).$$

Dort muss sich daran erinnert werden, dass ist

$$\vartheta = \frac{t + \delta}{\mu} \quad \text{und} \quad s = \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2} u \right).$$

§41 Weil ja in diesen Formeln einige von unserem Belieben abhängende Größen zurückgelassen worden sind, werden sich diese Lösungen schon ziemlich weit erstrecken und unzählige Spezialfälle in sich umfassen. Aber diese Lösung kann sogar um vieles weiter ausgedehnt werden, während zwei oder mehrere bestimmte gefundene Lösungen miteinander verbunden werden können. Natürlich, wenn zuerst diese Werte gefunden worden sind: $x = M$ und $y = N$, darauf aber $x = M'$ und $y = N'$, zusätzlich auch $x = M''$ und $y = N''$ etc., dann wird aus diesen Lösungen diese um vieles allgemeinere gebildet werden können:

$$x = \mathfrak{A}M + \mathfrak{B}M' + \mathfrak{C}M'' + \mathfrak{D}M''' + \text{etc.}$$

und

$$y = \mathfrak{A}N + \mathfrak{B}N' + \mathfrak{C}N'' + \mathfrak{D}N''' + \text{etc.},$$

welche Lösung natürlich so allgemein erscheint, dass sie alle möglichen Lösungen in sich umfasst.

EINE ALLGEMEINE METHODE DIE NACHSTEHENDEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN AUFZULÖSEN

$$dx = p du + r dt \cos u \quad \text{und} \quad dy = r du - p dt \cos u$$

§42 Es werde eine Kombination dieser zwei Formeln solcher Art gesucht, die eine Auflösung in zwei Faktoren zulasse. Für dieses Ziel werde die erste mit α , die zweite hingegen mit β multipliziert und das Aggregat der beiden wird sein

$$\alpha dx + \beta dy = p(\alpha du - \beta dt \cos u) + r(\beta du + \alpha dt \cos u),$$

deren Differentialfaktoren, um sei einander ähnlich zu machen, so angeordnet werden mögen:

$$\alpha dx + \beta dy = \alpha p \left(du - \frac{\beta}{\alpha} dt \cos u \right) + \beta t \left(du + \frac{\alpha}{\beta} dt \cos u \right).$$

Nun werde $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\beta}{\alpha}$ oder $\alpha\alpha + \beta\beta = 0$ oder $\beta = \alpha\sqrt{-1}$, und diese Kombination wird geben

$$dx + dy\sqrt{-1} = (p + r\sqrt{-1})(du - \sqrt{-1}dt \cos u),$$

welche Form, damit der Differentialfaktor integrierbar gemacht wird, so dargestellt werde

$$dx + dy\sqrt{-1} = \cos u (p + r\sqrt{-1}) \left(\frac{du}{\cos u} - \sqrt{-1} dt \right).$$

§43 Wir wollen $\frac{du}{\cos u} - dt\sqrt{-1} = dz$ festlegen, dass ist

$$z = \log \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2}u \right) - t\sqrt{-1}$$

und es wird sein

$$dx + dy\sqrt{-1} = \cos u(p + r\sqrt{-1})dz,$$

welche Gleichung offenbar nur integrierbar sein kann, wenn der endliche Faktor

$$\cos u(p + r\sqrt{-1})$$

eine Funktion von z ist; was für eine Funktion auch immer er aber war, die Integration wird dann immer Geltung haben. Daher tritt es klar zu tage, dass auch das Integral eine Funktion von z sein muss, so dass die Formel $x + y\sqrt{-1}$ irgendeine Funktion von z , das heißt der nachstehenden Größe, gleich wird

$$\log \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2}u \right) - t\sqrt{-1}$$

§44 Um aber diese Formel gefälliger zu machen, wollen wir wie bisher $\tan \left(45^\circ + \frac{1}{2}u \right) = s$ festlegen, dass ist

$$\frac{ds}{s} = \frac{du}{\cos u} \quad \text{und} \quad z = \log s - t\sqrt{-1}.$$

Nun bezeichne auf die gewohnte Weise der Charakter Γ irgendeine Funktion der nachgestellten Größen, und es wird sein

$$x + y\sqrt{-1} = \Gamma : (\log s - t\sqrt{-1})$$

oder auch, was auf dasselbe zurückgeht,

$$x + y\sqrt{-1} = 2\Gamma : (\log s - t\sqrt{-1}).$$

Weil aber die Formel $\sqrt{-1}$ in ihrer Natur das zweideutige Vorzeichen \pm involviert, wird auch sein

$$x - y\sqrt{-1} = 2\Gamma : (\log s + t\sqrt{-1}).$$

Daher erschließen wir aber, dass sein wird

$$x = \Gamma : (\log s - t\sqrt{-1}) + \Gamma : (\log s + t\sqrt{-1})$$

und

$$y\sqrt{-1} = \Gamma : (\log s - t\sqrt{-1}) - \Gamma : (\log s + t\sqrt{-1}).$$

Es ist aber bekannt, dass diese Ausdrücke für x und y immer auf reelle Werte zurückgeführt werden.

§45 So, wenn Γ irgendeine Potenz der nachgestellten oder auch irgendein Vielfaches bezeichnet, deren bzw. dessen Exponent λ ist, wird nach der Entwicklung, und nachdem der Kürze wegen $\log s = v$ gesetzt worden ist, werden

$$x = v^\lambda - \frac{\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2} v^{\lambda-2} t t + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} v^{\lambda-4} t^4 - \frac{\lambda \cdots (\lambda-5)}{1 \cdot 6} v^{\lambda-6} t^6 + \text{etc.}$$

und

$$y = \frac{\lambda}{1} v^{\lambda-1} t - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} v^{\lambda-3} t^3 + \frac{\lambda \cdots (\lambda-4)}{1 \cdot 5} v^{\lambda-5} t^5 - \frac{\lambda \cdots (\lambda-6)}{1 \cdots 7} v^{\lambda-7} t^7 + \text{etc..}$$

Aus diesen Formeln wäre freilich der Wert von y hervorgegangen, nachdem die Vorzeichen verändert worden sind: Aber aus der Natur der Sache wird eingesehen, dass die beiden Koordinaten x und y so negativ wie positiv angenommen werden können.

§46 Es ist aber ersichtlich, dass diese Werte sehr stark von denen abweichen, welche uns die partikuläre Lösung an die Hand gibt. Daher geht aber der Fall der hydrographischen Karten, welcher in den oberen Formeln nicht enthalten war, von selbst hervor, indem $\lambda = 1$ genommen wird; dann wird nämlich sein

$$x = \log s = \log \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2} u \right) \quad \text{und} \quad y = t.$$

Oben waren diese Werte für x und y freilich vertauscht gewesen: Aber es ist klar, dass die Koordinaten x und y immer miteinander vertauscht werden können.

§47 Dennoch ist es indes gewiss, dass alle oben gefundenen Werte auch in diesen Formeln enthalten sein müssen, weil ja diese Lösung offenbar völlig allgemein ist, was der Mühe wert sein wird, es gezeigt zu haben. Es sei also angemerkt, wenn die Formel $\Gamma : z$ irgendeine Funktion von z bezeichnet, dass dann an ihrer Stelle immer $\Delta : Z$ geschrieben werden kann, während Z irgendeine Funktion von z ist. Weil, nachdem dies angemerkt worden ist, $z = \log s - t\sqrt{-1}$ ist, wollen wir $e^{\alpha z}$ für Z nehmen wollen, und daher wird sich anstelle $\Gamma : (\log s - t\sqrt{-1})$ Nachstehendes schreiben lassen

$$\Delta : e^{\alpha \log s - \alpha t \sqrt{-1}}.$$

Es ist aber $e^{\alpha \log s} = s^\alpha$; dann ist aber

$$e^{\alpha t \sqrt{-1}} = \cos \alpha t + \sqrt{-1} \sin \alpha t,$$

woher werden wird

$$e^{\alpha \log s - \alpha t \sqrt{-1}} = s^\alpha (\cos \alpha t - \sqrt{-1} \sin \alpha t).$$

Deshalb wird, indem zwei Formeln von dieser Art verbunden werden, sein

$$\begin{aligned} x &= \Delta : s^\alpha (\cos \alpha t - \sqrt{-1} \sin \alpha t) + \Delta : s^\alpha (\cos \alpha t + \sqrt{-1} \sin \alpha t), \\ y\sqrt{-1} &= \Delta : s^\alpha (\cos \alpha t - \sqrt{-1} \sin \alpha t) - \Delta : s^\alpha (\cos \alpha t + \sqrt{-1} \sin \alpha t), \end{aligned}$$

wo es förderlich sein wird bemerkt zu haben, dass diese zwei Werte nicht nur mit irgendeiner Konstante multipliziert werden, sondern auch miteinander vertauscht werden können.

§48 Wir wollen hier den Fall betrachten, in welchem $\Delta : Z = Z$ ist, und es wird sein

$$x = 2s^\alpha \cos \alpha t \quad \text{und} \quad y = -2s^\alpha \sin \alpha t.$$

Wenn wir daher α hier negativ annehmen, werden auch diese Werte genügen

$$x = 2s^{-\alpha} \cos \alpha t \quad \text{und} \quad y = -2s^{-\alpha} \sin \alpha t.$$

Ober haben wir aber schon angemerkt, dass je zwei Lösungen immer so miteinander kombiniert werden können, dass die beiden mit irgendwelchen

konstanten Größen multipliziert werden; daher wird aus diesen zwei Lösungen diese sich um vieles weiter erstreckende gebildet werden können:

$$x = (\mathfrak{A}s^\alpha + \mathfrak{B}s^{-\alpha}) \cos \alpha t \quad \text{und} \quad y = (-\mathfrak{A}s^\alpha + \mathfrak{B}s^{-\alpha}) \sin \alpha t,$$

in welchen Formeln die zuvor in Paragraph 37 gegebene Lösung enthalten ist. Es ist aber ersichtlich, dass die hier mit der Funktion Δ dargebotenen Formeln unendlich mal allgemeiner sind.

§49 Um aber daher auch die zweite partikuläre Lösung zu finden, wollen wir nehmen

$$Z = \cos \alpha z = \cos(\alpha \log s - \alpha t \sqrt{-1}) = \cos \alpha \log s \cos \alpha t \sqrt{-1} + \sin \alpha \log s \sin \alpha t \sqrt{-1};$$

es ist aber bekannt, dass ist

$$\cos \alpha t \sqrt{-1} = \frac{e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t}}{2}$$

und

$$\sin \alpha t \sqrt{-1} = \frac{e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t}}{2\sqrt{-1}},$$

woher wird

$$Z = \left(\frac{e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t}}{2} \right) \cos \alpha \log s + \left(\frac{e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t}}{2\sqrt{-1}} \right) \sin \alpha \log s.$$

Nun wird also, indem der Charakter Δ vorangestellt wird, sein

$$\begin{aligned} x &= \Delta : \left(\frac{\cos \alpha \log s (e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t})}{2} + \frac{(e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t}) \sin \alpha \log s}{2\sqrt{-1}} \right) \\ &+ \Delta : \left(\frac{\cos \alpha \log s (e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t})}{2} - \frac{\sin \alpha \log s (e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t})}{2\sqrt{-1}} \right) \end{aligned}$$

und

$$y\sqrt{-1} = \Delta : \left(\frac{\cos \alpha \log s(e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})}{2} + \frac{\sin \alpha \log s(e^{-\alpha t} - e^{\alpha t})}{2\sqrt{-1}} \right) \\ + \Delta : \left(\frac{\cos \alpha \log s(e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})}{2} - \frac{\sin \alpha \log s(e^{-\alpha t} - e^{\alpha t})}{2\sqrt{-1}} \right).$$

Wenn daher also Z für $\Delta : Z$ genommen wird, wird sein

$$x = \cos \alpha \log s(e^{-\alpha t} + e^{\alpha t}) \quad \text{und} \quad y\sqrt{-1} = \frac{\sin \alpha \log s(e^{-\alpha t} - e^{\alpha t})}{\sqrt{-1}},$$

nachdem aber α negativ genommen worden ist, wird sein

$$x = \cos \alpha \log s(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) \quad \text{und} \quad y\sqrt{-1} = -\frac{\sin \alpha \log s(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t})}{\sqrt{-1}},$$

welche Formeln die Lösung des in Paragraph 40 angeführten zweiten Falles enthalten.

§50 In diesen für die Koordinaten x und y gefundenen allgemeinsten Formeln sind also vollkommen alle möglichen Darstellungen einer sphärischen Oberfläche enthalten, welche in der Ebene so dargeboten werden können, dass die Meridiane von den Parallelen normal durchlaufen werden und alle sehr kleinen auf der Sphäre angenommenen Formen durch gleiche Figuren in der Ebene ausgedrückt werden.

§51 In dieser allgemeinsten Lösung ist die gewöhnliche Projektion enthalten, in welcher die terrestrische Hemisphäre durch Kreise dargestellt zu werden pflegt, in deren Zentrum der eine der beiden Pole liegt. Diese Projektion geht nämlich hervor, wenn in den Formeln

$$x = s^\alpha \cos \alpha t \quad \text{und} \quad y = -s^\alpha \sin \alpha t$$

$\alpha = -1$ genommen wird, dass ist

$$x = \frac{\cos t}{\tan(45^\circ + \frac{1}{2}u)} \quad \text{und} \quad y = \frac{\sin t}{\tan(45^\circ + \frac{1}{2}u)},$$

dann verschwinden nämlich für den Pol, wo $u = 90^\circ$ ist, so x wie y . Aber für den Äquator, wo $u = 1$ und $s = 1$ ist, wird $x = \cos t$ und $y = \sin t$, woher wird

$$xx + yy = 1.$$

Und so wird der Äquator mit einem um den Pol beschriebenen Kreis, dessen Radius = 1 ist, dargestellt. Dann wird aber, während die Länge t dieselbe bleibt, sein

$$\frac{y}{x} = \tan t;$$

daher tritt es klar zu tage, dass die Meridiane die Radien eines Kreises sind. Aber für jeden Breitengrad u werden die Parallelen dem Äquator konzentrische Kreise sein, deren Radien sein werden

$$= \frac{1}{s} = \frac{1}{\tan\left(45^\circ + \frac{1}{2}u\right)} = \tan\left(45^\circ - \frac{1}{2}u\right),$$

das heißt dem Tangens der Hälfte der Distanz vom Pol gleich. Gemäß dieser Bedingungen pflegen auch solche Hemisphären dargeboten zu werden.

ANNAHME 3,

in welcher alle Erdregionen in der wahren Größe in der Ebene dargestellt werden

§52 Nachdem im Allgemeinen zwei Formeln für dx und dy festgelegt worden sind, welche seien

$$dx = pdu + qdt \quad \text{und} \quad dy = rdu + sdt,$$

werde es zuerst bewirkt, dass alle Meridiane von den Parallelen normal durchlaufen werden, was passiert, wenn $\frac{s}{q} = -\frac{p}{r}$ war. Es werde also $s = -np$ und $q = +nr$ gesetzt, dass wir haben

$$dx = pdu + nr dt \quad \text{und} \quad dy = rdu - np dt.$$

Nun wird also das Element sein

$$PQ = du \sqrt{pp + rr}$$

und daher Element der Parallele

$$PR = ndt \sqrt{pp + qq}.$$

Daher wird also die Fläche des Rechtecks $PQRS$ sein

$$ndudt(pp + qq);$$

auf der Sphäre ist aber die entsprechende Fläche $pqrs$

$$= dudt \cos u,$$

welche Formeln also gleich zu machen sind, woher wird

$$n(pp + rr) = \cos u$$

und daher

$$n = \frac{\cos u}{pp + rr'}$$

weswegen wir für unsere Annahme diese Formel haben werden:

$$dx = pdu + \frac{rdt \cos u}{pp + rr} \quad \text{und} \quad dy = rdu - \frac{pdt \cos u}{pp + rr}.$$

Es müssen also geeignete Funktionen für p und r gesucht werden, dass diese beiden Formeln integrierbar werden.

§53 Um dies leichter bewirken zu können, wollen wir festlegen

$$p = m \cos \varphi \quad \text{und} \quad r = m \sin \varphi,$$

dass $pp + rr = mm$ ist, und wir werden haben

$$dx = mdu \cos \varphi + \frac{dt \cos u \sin \varphi}{m}$$

und

$$dy = mdu \sin \varphi - \frac{dt \cos u \cos \varphi}{m}.$$

Es werde weiter $m = k \cos u$, dass wird erlangen

$$dx = kdu \cos u \cos \varphi + \frac{dt \sin \varphi}{k}$$

und

$$dy = kdu \cos u \sin \varphi - \frac{dt \cos \varphi}{k}.$$

Wir wollen schließlich $du \cos u = dv$ setzen, dass $v = \sin u$ ist, und es wird sein

$$dx = kdv \cos \varphi + \frac{dt \sin \varphi}{k} \quad \text{und} \quad dy = kdv \sin \varphi - \frac{dt \cos \varphi}{k},$$

wo also geeignete Werte für k und φ ausfindig gemacht werden müssen.

§54 Weil ja auf noch keine Weise klar zu tage tritt, wie die allgemeine Auflösung dieser Formeln durchgeführt werden muss, wollen wir partikuläre Lösungen suchen. Und zuerst offenbart sich freilich die Lösung dieses Falles, welche wir oben schon oben gefunden haben (siehe Paragraph 22), wo $x = t$ und $y = \sin u$ war, welche Werte aus unseren Formeln hervorgehen, wenn $k = 1$ und $\varphi = 90^\circ$ genommen wird; und daher tritt es klar zu tage, dass allgemeiner auch irgendwelche konstante Größen für k und φ genommen werden können. Es sei also $k = a$ und $\varphi = \alpha$, woher aufgefunden werden wird

$$x = av \cos \alpha + \frac{t \sin \alpha}{a} \quad \text{und} \quad y = av \sin \alpha - \frac{t \cos \alpha}{a}.$$

Diese Lösung weicht aber von jener nur darin ab, dass die Meridiane nicht weiter zu unserer Achse EF normal sind, sondern in einem schiefen Winkel geneigt sind, welcher dem Winkel $= \alpha$ gleich wird; aber die Parallelen werden diese Meridiane normal durchlaufen und werden deshalb in gleicher Weise gerade Linien sein.

§55 Aber wir werden andere Lösungen finden können, wenn wir für die eine der Größen k und φ nur eine Funktion von v , für die andere aber eine nur von t annehmen. Es sei also $k = T$ und $\varphi = V$, dass wir haben

$$dx = Tdv \cos V + \frac{dt}{T} \sin V$$

und

$$dy = T dv \sin V - \frac{dt}{T} \cos V.$$

Es wird natürlich gefunden

$$x = T \int dv \cos V = \sin V \int \frac{dt}{T},$$
$$y = T \int dv \sin V = -\cos V \int \frac{dt}{T}.$$

Diese Werte müssen also einander gleich gemacht werden.

§56 Aus den zwei Werten von x leiten wir ab

$$\frac{\int dv \cos V}{\sin V} = \int \frac{dt}{T} : T = \alpha$$

und aus den Werten von y

$$\frac{\int dv \sin V}{\cos V} = - \int \frac{dt}{T} : T = \beta,$$

woher für die Funktion T diese Gleichheiten hervorgehen

$$\int \frac{dt}{T} = \alpha T \quad \text{und} \quad \int \frac{dt}{T} = -\beta T,$$

wo es sofort klar zu tage tritt, dass $\beta = -\alpha$ sein muss; dann wird aber durch Differenzieren

$$\frac{dt}{T} = \alpha dT \quad \text{und daher} \quad T = \sqrt{\frac{2t}{\alpha}}.$$

Für V werden wir aber haben

$$\int dv \cos V = \alpha \sin V \quad \text{und} \quad \int dv \sin V = -\alpha \cos V;$$

diese beiden liefern differenziert $dv = \alpha V$, so dass $V = \frac{v}{\alpha}$ oder durch Hinzufügen einer Konstante

$$V = \frac{v + c}{\alpha}.$$

§57 Nachdem nun diese Werte gefunden worden sind, werden wegen

$$\int dv \cos V = \alpha V = \alpha \sin \frac{v+c}{\alpha} \quad \text{und} \quad \int \frac{dt}{T} = \alpha T = \sqrt{2\alpha t}$$

die beiden Koordinaten so ausgedrückt aufgefunden werden:

$$x = \sin \frac{v+c}{\alpha} \sqrt{2\alpha t} \quad \text{und} \quad y = -\cos \frac{v+c}{\alpha} \sqrt{2\alpha t}.$$

Daher erschließen wir sofort $\sqrt{xx+yy} = \sqrt{2\alpha t}$; daher ist es offenbar, dass sie für die Stellen, denen dieselbe Länge t zukommt, auf der Peripherie des Kreises liegen werden, dessen Radius $= \sqrt{2\alpha t}$ ist; deswegen werden in dieser Darstellung alle Meridiane durch konzentrische Kreise ausgedrückt werden und daher verläuft der ganze erste Meridian, wo $t = 0$ ist, im Zentrum der Kreise; daher ist es offenbar, dass alle parallelen Kreise hier durch die Radien des Kreises dargestellt werden. Eine solche Darstellung wäre aber zweifelsohne ziemlich absurd, auch wenn sie die vorgeschriebenen Bedingungen erfüllt.

§58 Es werde nun für k eine Funktion von v genommen, die V sei; der Winkel φ werde hingegen einer Funktion von t gleich gesetzt, welche $= T$ sei, und wir werden haben

$$dx = Vdv \cos T + \frac{dt \sin T}{V} \quad \text{und} \quad dy = Vdv \sin T - \frac{dt \cos T}{V},$$

woher die zwei für x und y resultierenden Werte werden

$$x = \cos T \int Vdv = \frac{1}{V} \int dt \sin T \quad \text{und} \quad y = \sin T \int Vdv = -\frac{1}{V} \int dt \cos T.$$

Aus diesen Werten werden also die folgenden Gleichheiten festgelegt

$$V \int Vdv = \frac{\int dt \sin T}{\cos T} = \alpha \quad \text{und} \quad -V \int Vdv = \frac{\int dt \cos T}{\sin T} = -\beta.$$

Aus den Werten von V wird sofort $\beta = \alpha$; dann wird aber durch Differenzieren

$$Vdv = -\frac{\alpha dV}{V},$$

woher $dv = -\frac{\alpha dV}{V^2}$ und durch Integrieren

$$v + c = \frac{\alpha}{2VV} \quad \text{und daher} \quad V = \sqrt{\frac{\alpha}{2(v+c)}}.$$

Für die Funktion T wird aber sein

$$\int dt \sin T = \alpha \cos T \quad \text{und} \quad - \int dt \cos T = \alpha \sin T,$$

aus deren Differentiation folgt

$$dT = -\frac{dt}{\alpha} \quad \text{also} \quad T = -\frac{t}{\alpha}.$$

§59 Nachdem diese Werte gefunden worden sind, wird wegen

$$\int V dv = \sqrt{2\alpha(v+c)},$$

sein

$$x = \sqrt{2\alpha(v+c)} \cos \frac{t}{\alpha} \quad \text{und} \quad y = -\sqrt{2\alpha(v+c)} \sin \frac{t}{\alpha}.$$

Daher wird zuerst

$$\frac{y}{x} = -\tan \frac{t}{\alpha} \quad \text{und} \quad xx + yy = 2\alpha(v+c).$$

Aus der ersten Formel tritt es klar zu tage, dass für denselben Längengrad t alle Meridiane durch aus einem festen Punkt als Radien gezogene Geraden dargestellt werden, aus der anderen tritt hingegen klar zu tage, dass alle Parallelen durch konzentrische Kreise ausgedrückt werden werden. Auf diese Weise werden also die Hemisphären der Erde überaus passend durch Kreise dargestellt werden können, während der Pol im Zentrum liegt; dort wird sogar die Form eines jeden Gebietes nicht viel von der Wahrheit abkommen, welches Grundes wegen es leicht sein wird, die Größe einer jeden Region zu messen.

§60 In diesen drei Annahmen ist aber alles enthalten, was von geographischen wie hydrographischen Darstellungen verlangt zu werden pflegt, und daher umfasst die zweite oben behandelte Annahme vollkommen alle möglichen Arten in sich. Aber wegen der sehr großen Allgemeinheit ist es weniger

leicht, die gebräuchlichen Methoden aus unseren allgemeinen Formeln zu finden. Und in der Tat erlaubt es das gegenwärtige Unterfangen nicht, dass wir uns mit dieser Aufgabe aufhalten, besonders weil die üblichen Projektionen von anderen schon übergenug erklärt worden sind.