Eine umfassendere Darstellung des Vergleiches der in der Integralformel $\int \frac{Zdz}{\sqrt{1+mzz+nz^4}}$ enthaltenen Grössen, während Z irgendeine rationale Funktion zz bezeichnet *

Leonhard Euler

§1 Auch wenn ich diesen Gegenstand schon öfter behandelt habe und der hochillustre Lagrange viele außerordentliche Beobachtungen über Formeln dieser Art veröffentlicht hat, ist er dennoch noch keinesfalls als hinreichend erforscht, um vieles weniger als ausgeschöpft anzusehen, sondern scheint noch sehr viele im höchsten Maße im Verborgenen liegende Dinge zu involvieren, welche eine sehr umfangreiche Untersuchung verlangen und vorzügliche Zuwächse für die Analysis verheißen. Aber besonderes die analytischen Operationen selbst, die mich zuerst zu dieser Untersuchung geführt haben, sind so beschaffen, dass sie die ganze Aufgabe nur über viele Umwege erledigen, woher mit Recht immer noch besonders eine direkte Methode zu verlangen ist, die zu denselben Vergleichen führt. Außerdem erstreckt sich

*Originaltitel: "Plenior explicatio circa comparationem quantitatum in formula integrali $\int \frac{Zdz}{\sqrt{1+mzz+nz^4}}$ contentarum denotante Z functionem quamcunque rationalem ipsius zz", erstmals publiziert in „*Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 6* 1781, pp. 3-22", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 21, pp. 39 - 56 ", Eneström-Nummer E581, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

diese allgemeine Untersuchung um vieles weiter als auf die Integralformeln, welche ich zuerst betrachtet habe, wo ich für den Buchstaben Z nur entweder eine konstante Größe oder eine ganze Funktion von Z von dieser Form $F + Gzz + Hz^4 + Iz^6 + Kz^8+$etc. angenommen habe, in welchen Fällen ich gezeigt habe, dass, nachdem irgendwelche zwei Größen dieses Geschlechts vorgelegt worden sind, immer eine dritte desselben Geschlechts gefunden werden kann, die von der Summe jener um eine algebraische Größe abweicht, welche freilich in dem Fall verschwindet, in welchem Z nur eine konstante Größe ist.

§2 Nun habe ich aber beobachtet, dass dieselben Vergleiche angestellt werden können, wenn für Z irgendeine rationale Funktion von zz angenommen wird, die natürlich eine Form dieser Art habe

$$\frac{F + Gzz + Hz^4 + Iz^6 + Kz^8 + \text{etc.}}{\mathfrak{F} + \mathfrak{G}zz + \mathfrak{H}z^4 + \mathfrak{I}z^6 + \mathfrak{K}z^8 + \text{etc.}},$$

wo freilich dieser Unterschied auftaucht, dass die Differenz zwischen der Summe zweier Formeln dieser Art und einer zu findenden dritten Formel desselben Geschlechts nicht weiter eine algebraische Größe ist, aber gleichwohl immer durch Logarithmen und Kreisbogen dargeboten werden kann, so dass sich diese Untersuchung nun um vieles weiter erstreckt als ich sie bis jetzt erfasst hatte. Und daher werden unter Umständen, wenn alle Operationen, die zu diesem Ziel führen, mit entsprechender Aufmerksamkeit betrachtet werden, einen leichteren Weg eröffnen können, zu einer direkten Methode zu gelangen und diesen ganzen im höchsten Maße im Verborgenen liegenden Gegenstand mit glücklicherem Erfolg zu erforschen.

§3 Damit aber all diese Dinge besser verstanden werden können, bezeichne dieser Charakter $\Pi : z$ die transzendente Größe, die aus der Integration der vorgelegten Formel

$$\int \frac{Zdz}{\sqrt{1 + mzz + nz^4}}$$

entsprießt, während das Integral angenommen wird so genommen zu werden, dass es nach Setzen von $z = 0$ verschwindet; daher ist es sofort offenbar, dass auch $\Pi : 0 = 0$ sein wird. Weil darauf Z nur gerade Potenzen von z involviert, von welcher Art sie auch in der Wurzelformel enthalten sind, ist es ersichtlich, wenn $-z$ anstelle von z geschrieben wird, dass dann auch der Wert dieser Integralformel und damit auch der dieses Charakters $\Pi : z$ in sein Negatives übergeht, so dass $\Pi : (-z) = -\Pi : z$ ist. Wenn, nachdem diese Dinge vorbereitet worden sind, irgendwelche zwei Größen $\Pi : p$ und $\Pi : q$ dieser Art vorgelegt werden, ist es immer möglich, eine dritte Größe $\Pi : r$ desselben Geschlechts zu finden, welche von der Summe jener Formeln $\Pi : p + \Pi : q$ um eine entweder algebraische oder zumindest durch Logarithmen und Kreisbogen angebbare Größe abweicht. Aber die Regel, mit welcher aus den gegebenen Buchstaben p und q der dritte r gefunden wird, bleibt immer dieselbe, welche Funktion auch immer mit dem Buchstaben Z bezeichnet wird; es wird nämlich immer sein

$$r = \frac{p\sqrt{a + mqq + nq^4} + q\sqrt{1 + mpp + np^4}}{1 - nppqq}.$$

Daher wird es aber für die folgenden Kombinationen förderlich sein bemerkt zu haben, dass gelten wird

$$\sqrt{1 + mrr + nr^4}$$
$$= \frac{(mpq + \sqrt{1 + mpp + np^4}\sqrt{1 + mqq + nq^4})(1 + nppqq) + 2npq(pp + qq)}{(1 - nppqq)^2}.$$

§4 Aber diese Untersuchung ist nicht nur auf nach Belieben anzunehmende Formeln $\Pi : p$ und $\Pi : q$ dieser Art beschränkt, sondern kann auch auf wie viele gegebene Formeln auch immer ausgedehnt werden, so dass, wie viele Integralformeln dieser Art auch immer vorgelegt waren, natürlich

$$\Pi : f + \Pi : g + \Pi : h + \Pi : i + \Pi : k + \text{etc.},$$

immer eine neue Formel dieser Art $\Pi : r$ angegeben werden kann, welche von der Summe jener Größen um eine entweder algebraische oder zumindest durch Logarithmen und Kreisbogen angebbare Größe abweicht. Ja es wird sogar möglich sein, jene Formeln, welche wir als gegeben angesehen haben, so zu bestimmen, dass jener entweder algebraische oder von Logarithmen und Kreisbogen abhängende Unterschied völlig verschwindet, so dass sein wird

$$\Pi : r = \Pi : f + \Pi : g + \Pi : h + \Pi : i + \Pi : k + \text{etc.}$$

Und dies sind fast die Dinge, zu welchen es mir diese allgemeinere Untersuchung, welche ich beschlossen habe hier darzustellen, auszudehnen freilich möglich gewesen ist; deswegen werde ich die einzelnen Operationen, welche mir dorthin geführt haben, kurz darlegen.

Operation 1

§5 Ich habe diese ganze Untersuchung mit der Betrachtung dieser algebraischen Gleichung begonnen

$$\alpha + \gamma(xx + yy) + 2\delta xy + \zeta xxyy = 0,$$

aus welcher, weil sie quadratisch ist, so für x wie für y durch Ziehen der Wurzeln entweder dies erschlossen wird

$$y = \frac{-\delta x + \sqrt{-\alpha\gamma + (\delta\delta - \gamma\gamma - \alpha\zeta)xx - \gamma\zeta x^4}}{\gamma + \zeta xx}$$

oder aber dies

$$x = \frac{-\delta y + \sqrt{-\alpha\gamma + (\delta\delta - \gamma\gamma - \alpha\zeta)yy - \gamma\zeta y^4}}{\gamma + \zeta yy},$$

so dass daher wird

$$\sqrt{-\alpha\gamma + (\delta\delta - \gamma\gamma - \alpha\gamma)xx - \gamma\zeta x^4} = \gamma y + \delta x + \zeta xxy$$

sowie

$$\sqrt{-\alpha\gamma + (\delta\delta - \gamma\gamma - \alpha\gamma)yy - \gamma\zeta y^4} = \gamma x + \delta y + \zeta xyy.$$

§6 Nun definiere ich die Buchstaben α, β, γ, ζ so, dass die beiden Wurzelformeln auf die Form

$$\sqrt{1 + mxx + nx^4} \quad \text{und} \quad \sqrt{1 + myy + ny^4}$$

reduziert werden, für welches Ziel ich festlege

$$1. \quad -\alpha\gamma = k, \quad 2. \quad \delta\delta - \gamma\gamma - \alpha\zeta = mk \quad \text{und} \quad 3. \quad -\gamma\zeta = nk;$$

aus der ersten dieser Gleichheiten wird $\alpha = -\frac{k}{\gamma}$, aus der dritten $\zeta = \frac{-nk}{\gamma}$, welche Werte in der zweiten eingesetzt liefern

$$\delta\delta = \gamma\gamma + \frac{nkk}{\gamma\gamma} + mk$$

und daher

$$\delta = \sqrt{\gamma\gamma + \frac{nkk}{\gamma\gamma} + mk} = \frac{1}{\gamma}\sqrt{\gamma^4 + m\gamma\gamma k + nkk};$$

daher wird unsere Gleichung nun diese sein

$$-k + \gamma(xx + yy) + 2xy\sqrt{\gamma^4 + m\gamma\gamma k + nkk} - nkxxyy = 0;$$

daher werden unsere beiden irrationalen Formeln diese sein

$$\sqrt{k(1 + mxx + nx^4)} = \gamma y + \frac{1}{\gamma}x\sqrt{\gamma^4 + m\gamma\gamma k + nkk} - \frac{nk}{\gamma}xxy,$$
$$\sqrt{k(1 + myy + ny^4)} = \gamma x + \frac{1}{\gamma}x\sqrt{\gamma^4 + m\gamma\gamma k + nkk} - \frac{nk}{\gamma}xyy.$$

§7 Weil nun diese beiden Größen x und y so voneinander abhängen, wie die angenommene Gleichung aufzeigt, wollen wir die noch unbestimmten Buchstaben γ und k so bestimmen, dass für $x = 0$ gesetzt $y = a$ wird. Es wird also von Nöten sein, dass $-k + \gamma\gamma aa = 0$ und daher $k = \gamma\gamma aa$ ist, nach Einsetzen welches Wertes unsere Gleichung diese sein wird

$$0 = \gamma\gamma(yy + xx - aa) + 2\gamma\gamma xy + 2\gamma\gamma xy\sqrt{1 + maa + na^4} - n\gamma\gamma aaxxyy,$$

und daher wird, indem durch $\gamma\gamma$ dividiert wird, werden

$$0 = (xx + yy - aa) + 2xy\sqrt{1 + maa + na^4} - naaxxyy.$$

Dann werden aber unsere beiden Wurzelformeln so ausgedrückt werden

$$\sqrt{1+mxx+nx^4} = \frac{y}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1+maa+na^4} - naxxy,$$

$$\sqrt{1+myy+ny^4} = \frac{x}{a} + \frac{y}{a}\sqrt{1+maa+na^4} - naxyy.$$

§8 Um diese Formeln leichter handhabbar zu machen, wollen wir festlegen

$$\sqrt{1+maa+na^4} = \mathfrak{A}$$

und auf die gleiche Weise auch

$$\sqrt{1+mxx+nx^4} = \mathfrak{X} \quad \text{und} \quad \sqrt{1+myy+ny^4} = \mathfrak{Y}$$

und unsere Gleichung wird dann diese sein

$$xx+yy-aa+2\mathfrak{A}xy - naaxxyy = 0,$$

woher aufgefunden wird

$$y = -\frac{\mathfrak{A}x - a\mathfrak{X}}{1-naaxx} \quad \text{und} \quad x = -\frac{\mathfrak{A}y - a\mathfrak{Y}}{1-naayy};$$

daher tritt es klar zu tage, wenn $y=0$ war, dass $x=a$ sein wird; dann werden aber die Wurzelformel diese sein

$$\sqrt{1+mxx+nx^4} = \mathfrak{X} = \frac{y}{a} + \frac{\mathfrak{A}x}{a} - naxxy,$$

$$\sqrt{1+myy+ny^4} = \mathfrak{Y} = \frac{y}{a} + \frac{\mathfrak{A}y}{a} - naxyy.$$

§9 Wie es aber möglich gewesen ist, so y wie x durch y auszudrücken, wird es auch möglich sein, $\mathfrak{Y}$ allein durch x und $\mathfrak{X}$ allein durch y auzudrücken. Nachdem aber die Rechnung durchgeführt worden ist, wird aufgefunden werden, dass sein wird

$$\mathfrak{X} = \frac{(-may+\mathfrak{A}\mathfrak{Y})(1+naayy) - 2nay(aa+yy)}{(1-naayy)^2},$$

$$\mathfrak{Y} = \frac{(-max+\mathfrak{A}\mathfrak{X})(1+naaxx) - 2nax(aa+xx)}{(1-naaxx)^2}.$$

§10 Über unsere Gleichung

$$xx + yy - aa + 2\mathfrak{A}xy - naaxxyy = 0$$

verdient es aber bemerkt zu werden, dass die drei Größen xx, yy, aa vollkommen miteinander vertauscht werden können. Wenn nämlich das irrationale Glied auf die andere Seite gebracht wird, dass gilt

$$xx + yy - aa - naaxxyy = -2\mathfrak{A}xy,$$

und die Quadrate genommen werden, wird, indem für $\mathfrak{A}^2$ wieder sein Wert $1 + maa + na^4$ eingesetzt wird, diese Gleichung hervorgehen

$$\left.\begin{array}{llll} + x^4 & - 2xxyy & - 4maaxxyy & - 2na^4xxyy + nna^4x^4y^4 \\ + y^4 & - 2aaxx & & - 2naax^4yy \\ + a^4 & - 2aayy & & - 2naaxxy^4 \end{array}\right\} = 0,$$

wo die Vertauschbarkeit der Buchstaben a, x, y ganz klar ins Auge fällt. In den oberen Formeln, wo die Größe a selbst eingeht, ist die Vertauschbarkeit zwar nicht ganz offenbar, aber wird sich vollkommen zeigen, wenn wir $-b$ anstelle von a und ebenso $\mathfrak{B}$ anstelle von $\mathfrak{A}$ schreiben; dann wird nämlich, wie galt

$$y = -\frac{x\mathfrak{B} + b\mathfrak{X}}{1 - bbxx} \quad \text{und} \quad x = -\frac{y\mathfrak{B} + b\mathfrak{Y}}{1 - bnnyy},$$

auch gelten

$$b = -\frac{x\mathfrak{Y} + y\mathfrak{X}}{1 - nxxyy}$$

und auf die gleiche Weise wird für die Wurzelformeln oder die Großbuchstaben sein

$$\mathfrak{Y} = \frac{(mbx + \mathfrak{B}\mathfrak{X})(1 + nbbxx) + 2nbx(bb + xx)}{(1 - nbbxx)^2},$$

$$\mathfrak{X} = \frac{(mby + \mathfrak{B}\mathfrak{Y})(1 + nbbyy) + 2nby(bb + yy)}{(1 - nbbyy)^2},$$

$$\mathfrak{B} = \frac{(mxy + \mathfrak{X}\mathfrak{Y})(1 + nxxyy) + 2nxy(xx + yy)}{(1 - nxxyy)^2}$$

woher die vollkommene Permutabilität erkannt wird.

OPERATION 2

§11 Wir wollen nun unsere angenommene algebraische Gleichung differenzieren, welche ja diese ist

$$xx + yy - aa + 2\mathfrak{A}xy - naaxxyy = 0,$$

und die Differentialgleichung wird diese sein

$$dx(x + \mathfrak{A}y - naaxyy) + dy(y + \mathfrak{A}x - naaxxy) = 0$$

oder

$$\frac{dx}{y + \mathfrak{A}x - naaxxy} + \frac{dy}{x + \mathfrak{A}y - naaxyy} = 0.$$

Aus dem oben Gesagten ist aber bekannt, dass gilt

$$y + \mathfrak{A}x - naaxxy = a\mathfrak{X} \quad \text{und} \quad x + \mathfrak{A}y - naaxyy = a\mathfrak{Y},$$

woher die Differentialgleichung diese Form annehmen wird

$$\frac{dx}{a\mathfrak{X}} + \frac{dy}{a\mathfrak{Y}} = 0$$

oder

$$\frac{dx}{\sqrt{1 + mxx + nx^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1 + myy + ny^4}} = 0.$$

§12 Nachdem also diese Differentialgleichung gefunden worden ist, bezeichne dieser Charakter $\Gamma : x$ das Integral $\int \frac{dx}{\mathfrak{X}}$ und der Charakter $\Gamma : y$ das Integral $\int \frac{dy}{\mathfrak{Y}}$, nachdem jedes der beiden Integrale so genommen worden ist, dass es entsprechend entweder für $x = 0$ oder $y = 0$ gesetzt verschwindet, und, indem jene Differentialgleichung integriert wird, wird $\Gamma : x + \Gamma : y = C$ werden. Weil aber für $x = 0$ genommen auch $\Gamma : x = 0$ und $y = a$ wird, wird jene Konstante $C = \Gamma : a$ sein, so dass wir diese Gleichung $\Gamma : x + \Gamma : y = \Gamma : a$ haben.

§13 Weil ja hier aber der Variabilität nicht weiter Rechnung getragen wird, tritt es klar zu tage, dass, nachdem die zwei Buchstaben x und y genommen worden sind, der Buchstabe a immer so bestimmt werden kann, dass wird

$$\Gamma : a = \Gamma : x + \Gamma : y.$$

Wenn nämlich in § 10 $-a$ anstelle von b geschrieben wird, muss dies genommen werden

$$a = \frac{x\mathfrak{Y} + y\mathfrak{X}}{1 - nxxyy},$$

welcher Vergleich schon einen speziellen Fall der allgemeinen Untersuchung festlegt, welche wir in Angriff genommen haben. Wenn wir nämlich p und q anstelle von x und y, aber r anstelle von a, dann hingegen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ anstelle von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{A}$ schreiben und wenn, nachdem die Größen p, q nach Belieben genommen worden sind, $r = \frac{p\mathfrak{Q}+q\mathfrak{P}}{1-nppqq}$ genommen wird, dann wird natürlich $\Gamma : r = \Gamma : p + \Gamma : q$ sein, so dass in diesem Fall jener Unterschied zwischen $\Gamma : r$ und der Summe $\Gamma : p + \Gamma : q$ vollkommen verschwindet. Und so haben wir schon den Fall entwickelt, in welchem in unserer allgemeinen Form

$$\int \frac{Zdz}{\sqrt{1 + mzz + nz^4}}$$

für Z eine konstante Größe genommen wird.

OPERATION 3

§14 Um nun näher an unser Ziel heranzukommen, seien X und Y solche Funktionen von X und Y, wie wir wollen, dass Z eine von z ist, und weil wir ja gerade gefunden haben

$$\frac{dx}{\sqrt{1 + mxx + nx^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1 + myy + ny^4}} = 0,$$

wollen wir festlegen, dass ist

$$\frac{Xdx}{\sqrt{1 + mxx + nx^4}} + \frac{Ydy}{\sqrt{1 + myy + ny^4}} = dV,$$

so dass, wenn X und Y konstante Größen wären, $dV = 0$ wäre. Daher, wenn wir $\frac{-dx}{\sqrt{1+mxx+nx^4}}$ anstelle von $\frac{dy}{\sqrt{1+myy+ny^4}}$ schreiben, wird also werden

$$dV = \frac{(X-Y)dx}{\sqrt{1+mxx+nx^4}} \quad \text{oder auch} \quad dY = \frac{(Y-X)dy}{\sqrt{1+myy+ny^4}}.$$

Aber wenn wir anstelle der Wurzeln wieder ihre rationalen Werte schreiben, wird sein

$$dV = \frac{a(X-Y)dx}{y+\mathfrak{A}x-naaxxy} \quad \text{oder} \quad dV = \frac{a(Y-X)dy}{x+\mathfrak{A}y-naaxyy}.$$

§15 Weil es aber keinen Grund gibt, warum wir dieses Differential dV eher durch dx als durch dy ausdrücken sollten, wird es ratsam sein, eine neue Größe in die Rechnung einzuführen, welche sich gleichermaßen auf x und y bezieht. Für dieses Ziel wollen wir das Produkt $xy = u$ setzen und festlegen

$$\frac{dx}{y+\mathfrak{A}x-naaxxy} = -\frac{dy}{x+\mathfrak{A}y-naaxyy} = sdu.$$

Daher wird also sein

$$dx = sdu(y+\mathfrak{A}x-naaxxy) \quad \text{und} \quad dy = -sdu(x+\mathfrak{A}y-naaxyy),$$

aus welchen wir erschließen

$$ydx + xdy = sdu(yy-xx) = du,$$

und so werden wir $s = \frac{1}{yy-xx}$ haben, so dass wir haben

$$\frac{dx}{y+\mathfrak{A}x-naaxxy} = -\frac{dy}{x+\mathfrak{A}y-naaxyy} = \frac{du}{yy-xx}.$$

Nachdem also dieser Wert eingesetzt worden ist, erlangen wir

$$dY = \frac{a(X-Y)du}{yy-xx} = \frac{-adu(X-Y)}{xx-yy}.$$

§16 Weil aber X und Y die gleichen rationalen Funktionen von x und y sind, in welchen nur gerade Potenzen dieser Buchstaben enthalten sind, wird leicht eingesehen, dass die Formel $X-Y$ immer durch $xx-yy$ teilbar sind und der Quotient außer dem Produkt $xy = u$ darüber hinaus die Summe der Quadrate

$xx + yy$ involviert; deswegen wollen wir $xx + yy = t$ setzen, und weil unsere fundamentale Gleichung diese wird

$$t - aa + 2\mathfrak{A}u - naauu = 0,$$

wird aus ihr

$$t = aa - 2\mathfrak{A}u + naauu,$$

so dass t einer rationalen Funktion von u gleich wird. Wenn daher also dieser Wert überall anstelle von t geschrieben wird, wird unser gesuchtes Differential dV allein durch die Variable u ausgedrückt werden, dass nach Setzen von $dV = Udu$ U immer eine rationale Funktion von u ist; wenn diese also ganz war, dann wird V einer algebraischen Funktion von u gleich werden, wenn die Funktion eine gebrochene ist, dann wird das Integral $V = \int Udz$ immer durch Logarithmen und Kreisbogen dargeboten werden können. Wenn also dieses Integral so genommen wird, dass es für $u = xy =$ verschwindet, wird es auch für $x = 0$ oder $y = 0$ gesetzt verschwinden. Und daher werden wir durch Integrieren erlangen

$$\int \frac{Xdx}{\sqrt{1 + mxx + nx^4}} + \int \frac{Ydy}{\sqrt{1 + myy + ny^4}} = C + V = C + \int Udu.$$

§17 Wenn daher also die Charaktere $\Pi : x$ und $\Pi : y$ die Werte dieser Integrale bezeichnen, so dass jedes der beiden verschwindet, nachdem entweder $x = 0$ oder $y = 0$ genommen worden ist, weil für $x = 0$ nach der Annahme $y = a$ wird, ist es offenbar, dass diese Konstante $\Pi : a$ sein wird und so wird die diese entgültige Gleichung resultieren

$$\Pi : x + \Pi : y = \Pi : a + \int Udu.$$

§18 Wir wollen aber nach Werten dieses Bruches U für jeglichen Fall suchen. Und zuerst wird freilich, wenn angenommen wird

$$Z = \alpha + \beta zz + \gamma z^4 + \delta z^6 + \text{etc.},$$

auf die gleiche Weise sein

$$X = \alpha + \beta xx + \gamma x^4 + \delta x^6 + \text{etc.} \quad \text{und} \quad Y = \alpha + \beta yy + \gamma y^4 + \delta y^6 + \text{etc.};$$

daher, weil wir gefunden haben

$$dV = Udu = -\frac{adu(X - Y)}{xx - yy},$$

wird sein

$$U = -\frac{a(X - Y)}{xx - yy} \quad \text{und daher} \quad U = -\frac{a(\beta(xx - yy) + \gamma(x^4 - y^4) + \delta(x^6 - y^6))}{xx - yy},$$

woher wird

$$U = -\alpha\beta - a\gamma(xx + yy) - a\delta(x^4 + xxyy + y^4).$$

Weil also $xx + yy = t$ und $xy = u$ ist, wird sein

$$U = -a\beta - a\gamma t - a\delta(tt - uu);$$

daher, weil $t = aa - 2\mathfrak{A}u + naauu$ ist, wird nach Durchführen der Rechnung werden

$$\int Udu = -a\beta u - a\gamma\left(aau - \mathfrak{A}uu + \frac{1}{3}naau^3\right)$$
$$-a\delta\left(a^4u - 2aa\mathfrak{A}uu + \frac{2}{3}na^4u^3 + \frac{4}{3}\mathfrak{A}^2u^3 - \frac{1}{3}u^3 - n\mathfrak{A}a^2u^4 + \frac{1}{5}n^2a^4u^5\right).$$

Und daher wird eingesehen, wenn Z zu höheren Potenzen aufseigt, auf welche Weise daher der Wert des Integrals $\int Udu$ gefunden werden muss.

§19 Wenn Z aber eine gebrochene Funktion war, natürlich

$$Z = \frac{\alpha + \beta zz + \gamma z^4}{\zeta + \eta zz + \theta z^4}$$

und daher auch

$$X = \frac{\alpha + \beta xx + \gamma x^4}{\zeta + \eta xx + \theta x^4} \quad \text{und} \quad Y = \frac{\alpha + \beta yy + \gamma y^4}{\zeta + \eta yy + \theta y^4},$$

wird sein

$$X - Y = \frac{(\beta\zeta - \alpha\eta)(xx - yy) + (\gamma\zeta - \alpha\theta)(x^4 - y^4) + (\gamma\eta - \beta\theta)x^2y^2(x^2 - y^2)}{\zeta\zeta + \zeta\eta(xx + yy) + \zeta\theta(x^4 + y^4) + \eta^2x^2y^2 + \eta\theta x^2y^2(xx + yy) + \theta\theta x^4y^4}.$$

Nachdem also die Buchstaben t und u eingeführt worden sind, wird sein

$$\frac{X - Y}{xx - yy} = \frac{\beta\zeta - \alpha\eta + (\gamma\zeta - \alpha\theta)t + (\gamma\eta - \beta\theta)uu}{\zeta\zeta + \zeta etat + \zeta\theta(tt - 2uu) + \eta\eta uu + \eta\theta tuu + \theta\theta u^4};$$

deswegen, weil gilt

$$U = -\frac{a(X - Y)}{xx - yy},$$

ist es wegen $t = aa - 2\mathfrak{A}u + naauu$ offenbar, dass das Integral der Formel $\int Udu$, wenn es nicht algebraisch war, unter Zulassung von Logarithmen und Kreisbogen immer dargeboten werden kann. Und so haben wir durch diese drei Operationen alles geleistet, was nötig ist, um alle sich hierauf beziehenden Probleme zu lösen.

PROBLEM 1

§20 Wenn $\Pi : x$ und $\Pi : y$ die Werte der nachstehenden Integralformeln bezeichnen

$$\int \frac{Xdx}{\sqrt{1 + mxx + nx^4}} \quad \text{und} \quad \int \frac{Ydy}{\sqrt{1 + myy + ny^4}},$$

wo X und Y die gleichen geraden Funktion von x und y sind, und zwei Formeln dieser Art $\Pi : x$ und $\Pi : y$ gegeben sind, eine dritte Formel desselben Geschlechts $\Pi : z$ zu finden, dass $\Pi : z = \Pi : x + \Pi : y + W$ ist, so dass W eine entweder algebraische oder durch Logarithmen und Kreisbogen angebbare Funktion ist.

LÖSUNG

Weil die zwei Größen x und y gegeben sind, werden aus ihnen diese Wurzeln gebildet

$$\mathfrak{X} = \sqrt{1 + mxx + nx^4} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Y} = \sqrt{1 + myy + ny^4},$$

aus welchen die Größe z bestimmt werde, und zwar auf dieselbe Weise, auf die wir oben den Buchstaben a durch x und y zu bestimmen gelehrt haben, so dass ist

$$z = \frac{x\mathfrak{Y} + y\mathfrak{X}}{1 - nxxyy}$$

und ihr irrationaler Wert dieser

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{1 + mzz + nz^4} = \frac{(mxy + \mathfrak{X}\mathfrak{Y})(1 + nxxyy) + 2nxy(xx + yy)}{(1 - nxxyy)^2};$$

dann wollen in den oberen Formeln z und Z anstelle von a und $\mathfrak{A}$ schreiben und es werde $U = -\frac{z(X-Y)}{xx-yy}$ genommen, welche Größe wir gesehen haben, immer auf eine Funktion von u zurückgeführt werden zu können, während $u = xy$ ist, und es werde $V = \int Udu$ gesetzt, in welcher Integration die Größen z und $\mathfrak{Z}$ für Konstanten zu halten sind, so dass der Buchstabe V als Funktion von $u = xy$ angesehen werden kann, weil ja auch z und $\mathfrak{Z}$ durch x und y bestimmt werden. Es sei aber sittsam angemerkt, dass in dieser Integralformel allein die Größe u wie eine Variable zu behandeln ist. Nachdem also diese Größe V gefunden worden ist, wird sein

$$\Pi : x + \Pi : y \ = \Pi : z + V;$$

daher, weil gelten muss

$$\Pi : z \ = \Pi : x + \Pi : y + W,$$

tritt es klar zu tage, dass $W = -V$ und daher eine entweder algebraische oder durch Logarithmen und Kreisbogen angebbare Größe ist.

KOROLLAR 1

§21 Die ganze Aufgabe geht also hier auf die Integration der Formel Udu zurück, während $u = xy$ und $U = -\frac{z(X-Y)}{xx-yy}$ ist, welche wir schon oben gesehen haben, immer durch u ausgedrückt werden zu können, wenn freilich in dieser Integration die Buchstaben z und $\mathfrak{Z}$ wie konstante Größen behandelt werden.

KOROLLAR 2

§22 Weil also für eine gegebene Gestalt der beiden Funktionen X und Y diese Integration keine Schwierigkeiten bereitet und das Integral selbst durch u, das heißt durch xy ausgedrückt wird, dessen Wert sich aus den gegebenen Größen x und y immer darbieten lässt, werden wir anstelle dieser Größe V im Nachfolgenden den Charakter $\Phi : xy$ schreiben, woher auch für gewisse andere anstelle von x und y angenommene Buchstaben die Bedeutung der Charaktere $\Phi : pq$, $\Phi : ab$ etc. verstanden wird.

KOROLLAR 3

§23 Wenn wir also, nachdem diese Charaktere gebraucht worden sind, für die gegebenen Größen x und y $z = \frac{x\mathfrak{Y}+y\mathfrak{X}}{1-nxxyy}$ nehmen, woher wird

$$\mathfrak{z} = \frac{(mxy+\mathfrak{X}\mathfrak{Y})(1+nxxyy)+2nxy(xx+yy)}{(1-nxxyy)^2},$$

wird sein

$$\Pi : z = \Pi : x + \Pi : y - \Phi : xy.$$

PROBLEM 2

§24 Wenn, nachdem alle Charaktere, welche wir bisher erklärt haben, beibehalten worden sind, die drei Formeln $\Pi : p$, $\Pi : q$, $\Pi : r$ gegeben sind, eine vierte $\Pi : z$ desselben Geschlechts zu finden, dass wird

$$\Pi : z = \Pi : p + \Pi : q + \Pi : r + \Pi : r + W,$$

so dass W eine algebraische oder durch Logarithmen oder Kreisbogen angebbare Größe ist.

LÖSUNG

Aus den gegebenen Größen p und q und daher auch den daher herstammenden $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ werde Folgendes angenommen

$$x = \frac{p\mathfrak{Q}+q\mathfrak{P}}{1-nppqq}$$

und zugleich

$$\mathfrak{X} = \frac{(mpq + \mathfrak{P}\mathfrak{Q})(1 + nppqq) + 2npq(pp + qq)}{(1 - nppqq)^2}.$$

Dann werde aber der Wert des Charakters $\Phi : pq$ berechnet und es wird durch das Vorhergehende sein

$$\Pi : x = \Pi : p + \Pi : q \ - \Phi : pq$$

oder

$$\Pi : p + \Pi : q \ = \Pi : x + \Phi : pq,$$

nach Einsetzen welches Wertes sein wird

$$\Pi : z = \Pi : x + \Pi : r + \Phi : pq + W.$$

Aber aus dem vorhergehenden Problem, wenn wir anstelle von y hier r schreiben und nehmen

$$z = \frac{x\mathfrak{R} + r\mathfrak{X}}{1 - nrrxx},$$

woher wird

$$\mathfrak{Z} = \frac{(mrx + \mathfrak{R}\mathfrak{X})(1 + nrrxx) + 2nrx(rr + xx)}{(1 - nrrxx)^2},$$

wird sein

$$\Pi : z = \Pi : x + \Pi : r - \Phi : rx,$$

nach einem Vergleich welcher Form mit der vorhergehenden erschlossen wird

$$W = -\Phi : pq - \Phi : rx,$$

so dass ist

$$\Pi : z = \Pi : p + \Pi : q + \Pi : r - \Phi : pq - \Phi : rx.$$

Problem 3

§25 Nachdem vier Formeln $\Pi : p$, $\Pi : q$, $\Pi : r$, $\Pi : s$ dieser Art vorgelegt worden sind, eine fünfte $\Pi : z$ desselben Geschlechts zu finden, dass wird

$$\Pi : z = \Pi : p + \Pi : q + \Pi : r + \Pi : s + W,$$

so dass W eine algebraische oder durch Logarithmen oder Kreisbogen angebbare Größe ist.

Lösung

Aus den zwei gegebenen p und q werde die Größe x gesucht, dass ist

$$x = \frac{p\mathfrak{Q} + q\mathfrak{P}}{1 - nppqq},$$

ebenso

$$\mathfrak{X} = \frac{(mpq + \mathfrak{P}\mathfrak{Q})(1 + nppqq) + 2npq(pp + qq)}{(1 - nppqq)^2},$$

und es wird sein

$$\Pi : x = \Pi : p + \Pi : q - \Phi : pq.$$

Auf die gleiche Weise werde aus den zwei gegebenen r und s ein y gesucht, dass gilt

$$y = \frac{r\mathfrak{S} + s\mathfrak{R}}{1 - nrrss},$$

und es wird sein

$$\mathfrak{Y} = \frac{(mrs + \mathfrak{R}\mathfrak{S})(1 + nrrss) + 2nrs(rr + ss)}{(1 - nrrss)^2},$$

dann aber

$$\Pi : y = \Pi : r + \Pi : s - \Phi : rs.$$

Nun werde schließlich aus den gefundenen x und y Nachstehendes genommen

$$z = \frac{x\mathfrak{Y} + y\mathfrak{X}}{1 - nxxyy} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Z} = \frac{(mxy + \mathfrak{X}\mathfrak{Y})(1 + nxxyy) + 2nxy(xx + yy)}{(1 - nxxyy)^2}$$

und es wird sein

$$\Pi : z = \Pi : x + \Pi : y - \Phi : xy,$$

Wenn daher also anstelle von $\Pi : x$ und $\Pi : y$ die gerade gefundenen Werte eingesetzt werden, wird werden

$$\Pi : z = \Pi : p + \Pi : q + \Pi : r + \Pi : s - \Phi : pq - \Phi : rs - \Phi : xy.$$

KOROLLAR 1

§26 Daher wird schon übergenug eingesehen, wenn viele Formeln dieser Art auch immer vorgelegt werden, wie eine neue $\Pi : z$ desselben Geschlechts ausfindig gemacht werden muss, welche von jenen zusammengenommenen um eine algebraische oder durch Logarithmen oder Kreisbogen angebbare Größe abweicht.

KOROLLAR 2

§27 Daher, wenn all jene Formeln einander gleich waren und deren Anzahl $= \lambda$ war, wird immer eine neue Formel $\Pi : z$ gefunden werden können, dass gilt

$$\Pi : z = \lambda\Pi : p + W,$$

während W eine entweder algebraische oder durch Logarithmen oder Kreisbogen angebbare Funktion ist. Ja es wird sogar, nachdem zwei Formeln $\Pi : p$ und $\Pi : q$ dieser Art vorgelegt worden sind, ein $\Pi : z$ gefunden werden können, dass ist

$$\Pi : z = \lambda\Pi : p + \mu\Pi : q + W.$$

BEMERKUNG

§28 Ich glaube zwar, auf diese Weise nicht nur die Prinzipien und Fundamente, auf denen dieser Gegenstand fußt, kurz und klar erläutert zu haben, aber auch diesen Gegenstand um vieles mehr erweitert zu haben als es bisher geschehen ist. Aber es ist immer besonders zu wüschen, dass ein direkterer Weg entdeckt wird, welcher zu denselben Untersuchungen führt. Denn gewiss niemand wird bezweifeln, dass sich daher die größten Zuwächse auf die ganze Analysis ergießen werden.

ANWENDUNG AUF DIE TRANSZENDENTEN GRÖSSEN, DIE IN DER FORM $\int \frac{dz(\alpha+\beta zz)}{\sqrt{1+mzz+nz^4}}$ ENTHALTEN SIND

§29 Weil also hier $Z = \alpha + \beta zz$ ist, wird nach Vorlegen von zwei Formeln $\Pi : x$ und $\Pi : y$ dieses Geschlechts und nach Nehmen von

$$z = \frac{x\mathfrak{Y} + y\mathfrak{X}}{1 - nxxyy} \quad \text{und daher} \quad \mathfrak{Z} = \frac{(mxy + \mathfrak{X}\mathfrak{Y})(1 + nxxyy) + 2nxy(x^2 + y^2)}{(1 - nxxyy)^2}$$

aus § 18, wo $u = xy$ und $a = z$ ist, sein

$$\Pi : z = \Pi : x + \Pi : y + \beta xyz,$$

so dass der zuvor verwendete Charakter $\Phi : xy$ in diesem Fall den Wert βxyz annimmt. Mit Hilfe dieser Regel kann also immer, nachdem zwei Formeln $\Pi : x$ und $\Pi : y$ vorgelegt worden sind, eine dritte $\Pi : z$ aufgefunden werden, die von der Summe jener um die algebraische Größe βxyz abweicht.

§30 Wir wollen also festlegen, dass wie viele transzendente Formeln von dieser Art auch immer vorgelegt werden ,also

$$\Pi : a, \quad \Pi : b, \quad \Pi : c, \quad \Pi : d, \quad \Pi : e, \quad \Pi : f, \quad \Pi : g \quad \text{etc.},$$

und aus den einzelnen Größen a, b, c, d etc. diese mit den germanischen Buchstaben irrationalen Werte erschlossen werden

$$\mathfrak{A} = \sqrt{1 + maa + na^4}, \quad \mathfrak{B} = \sqrt{1 + mbb + nb^4},$$
$$\mathfrak{C} = \sqrt{1 + mcc + nc^4}, \quad \mathfrak{D} = \sqrt{1 + mdd + nd^4};$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

dann wird immer eine neue Formel desselben Geschlechts dargeboten werden können, welche von der Summe derer um eine algebraische Größe abweicht, wir groß auch immer die Anzahl der gegebenen Formeln war. Aber die für dieses Ziel durchzuführenden Operationen werden am bequemsten auf die folgende Weise unternommen werden.

§31 Zuerst werde natürlich aus zwei a und b der gegebenen ein p gesucht, dass ist

$$p = \frac{a\mathfrak{B} + b\mathfrak{A}}{1 - naabb} \quad \text{und} \quad \mathfrak{P} = \frac{(mab + \mathfrak{A}\mathfrak{B})(1 + naabb) + 2nab(aa + bb)}{(1 - naabb)^2}.$$

Darauf werde aus dieser Größe p zusammen mit der dritten der gegebenen c ein q definiert, dass gilt

$$q = \frac{p\mathfrak{C} + c\mathfrak{P}}{1 - nccpp} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Q} = \frac{(mcp + \mathfrak{C}\mathfrak{P})(1 + nccpp) + 2ncp(cc + pp)}{(1 - nccpp)^2}.$$

Als drittes werde aus dieser Größe q zusammen mit der vierten der gegebenen d ein r gesucht, dass gilt

$$r = \frac{q\mathfrak{D} + d\mathfrak{Q}}{1 - nddqq} \quad \text{und} \quad \mathfrak{R} = \frac{(mdq + \mathfrak{D}\mathfrak{Q})(1 + nddqq) + 2ndq(dd + qq)}{(1 - nddqq)^2}.$$

Als viertes werde aus dieser Größe r zusammen mit der fünften der gegebenen e ein s bestimmt, dass gilt

$$s = \frac{r\mathfrak{E} + e\mathfrak{R}}{1 - neerr} \quad \text{und} \quad \mathfrak{S} = \frac{(mer + \mathfrak{E}\mathfrak{R})(1 + neerr) + 2ner(ee + rr)}{(1 - neerr)^2}.$$

Und diese Operationen werden fortgesetzt, bis schließlich alle gegebenen Größen in die Rechnung eingeführt worden sind.

§32 Nachdem aber all diese Werte gefunden worden sind, werden sich die folgenden verlangten Vergleiche der Reihe nach so verhalten

$$\text{I.}\quad \Pi : p = \Pi : a + \Pi : b + \beta abp,$$

$$\text{II.}\quad \Pi : q = \Pi : a + \Pi : b + \Pi : c + \beta abp + \beta abp,$$

$$\text{III.}\quad \Pi : r = \Pi : a + \Pi : b + \Pi : c + \Pi : d + \beta abp + \beta abp + \beta cpq,$$

$$\text{IV.}\quad \Pi : a = \Pi : a + \Pi : b + \Pi : c + \Pi : d + \Pi : e$$
$$+\beta abp + \beta abp + \beta cpq + \beta ers,$$

$$\text{V.}\quad \Pi : t = \Pi : a + \Pi : b + \Pi : c + \Pi : d + \Pi : e + \Pi : f$$
$$+\beta abp + \beta abp + \beta cpq + \beta ers + \beta fst$$

etc.

§33 Weil also diese transzendente Formel

$$\Pi : z = \int \frac{dz(\alpha + \beta zz)}{\sqrt{1 + mzz + nz^4}}$$

die Bogen aller vom Scheitel genommenen Kegelschnitte in sich enthält, wird mit Hilfe dieser Formeln, wie viele Bogen bei einem gewissen Kegelschnitt auch immer vorgelegt werden, welche alle vom Scheitel aus genommen worden sind, immer ein neuer in demselben Kegelschnitt gleichermaßen vom Scheitel aus abgetrennt werden können, der von der Summe jener gegebenen Bogen um eine algebraisch angebbare Größe abweicht. Ja es steht sogar nichts im Wege, dass einige unter den gegebenen Bogen negativ genommen werden, weil wir ja schon angemerkt haben, dass $\Pi : (-z) = -\Pi : z$ ist, so dass unsere Bestimmung auch auf zwischen irgendwelchen Grenzen eingeschlossene Bogen angewendet werden kann. Und auf diese Weise wird die Behandlung, welche ich neulich über den Vergleich solcher Bogen dargelegt habe, um vieles weiter verallgemeinert werden können.

§34 Im Übrigen, wie in in diesem Fall, in welchem wir $Z = \alpha + \beta zz$ genommen haben, der oben benutzte Charakter $\Phi : xy$ in βxyz übergegangen ist, während natürlich aus den zwei Größen x und y gemäß der angegeben Vorschriften die dritte z bestimmt wird, so wird auch, welche andere Funktion auch immer anstelle von Z verwendet wird, weil wir ja festgelegt haben

$$\Phi : xy = -a \int \frac{(X-Y)du}{xx-yy},$$

wobei $u = xy$ ist, nach durchgeführter Integration die daher resultierende Funktion nur die Größe u zusammen mit den Buchstaben a und $\mathfrak{A}$ enthalten, weil ja der Buchstabe t so ausgedrückt wurde

$$t = aa - 2\mathfrak{A}u + naauu,$$

wenn nach dem Fund des Integrals anstelle von u überall xy, aber anstelle von a und $\mathfrak{A}$ hingegen z und $\mathfrak{Z}$ geschrieben wird; und auf diese Weise wird der Wert des Charakters $\Phi : xy$ für jeglichen vorgelegten Fall erhalten werden, welche Funktion, wenn sie algebraisch war, immer durch Logarithmen und Kreisbogen dargeboten werden können wird, wenn freilich, wie wir angenommen haben, der Buchstabe Z eine gerade rationale Funktion von z war.