Erläuternde Darstellungen zu den letzten Kapiteln meines Buches "Institutiones calculi differentialis" über unerklärbare Funktionen *

Leonhard Euler

§1 Weil dieser Gegenstand, natürlich in der Analysis vollkommen neu, in keinster Weise hinreichend klar und ausführlich behandelt worden ist, habe ich beschlossen, hier denselben mit größerem Eifer noch einmal zu behandeln und alle Fundamente, auf welche er gestützt ist, aus den ersten Prinzipien abzuleiten und erläuternd darzustellen; dort wird es überaus förderlich sein, geeignete Zeichen in die Rechnung eingeführt zu haben. So, wenn irgendeine Reihe vorgelegt war, werde ich ihre den Indizes 1, 2, 3, 4 etc. entsprechenden Terme mit diesen Zeichen (1), (2), (3), (4) etc. darstellen und daher wird der diesem Index x entsprechende allgemeine Term dieser Reihe für mich (x) sein, welcher also für jede Reihe eine gewisse Funktion von x sein wird, welche ich als vollkommen bekannt annehme, dabei natürlich so beschaffen, dass ihre Werte nicht nur für ganze sondern auch für gebrochene und sogar für surdische anstelle von x angenommene Zahlen dargeboten werden können.

*Originaltitel: "Dilucidationes in capita postrema calculi mei differentalis de functionibus inexplicabilibuss", erstmals publiziert in „*Memoires de l'academie des sciences de St.-Petersbourg* 4 1813, pp. 88-119", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 16,1 pp. 1 - 33 ", Eneström-Nummer E613, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Artur Diener, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

§2 Es bezeichne weiter $\Sigma : x$ den summatorischen Term derselben Reihe, der die Summe der Terme ausdrückt, indem alle Terme vom ersten aus bis zum Term (x) aufsummiert werden, so dass dann gilt

$$\Sigma : x = (1) + (2) + (3) + (4) + \ldots + (x),$$

all deren Werte, sooft x eine ganze positive Zahl war, daher tatsächlich aus der Reihe selbst dargeboten werden können werden, weil es sich ja verhalten wird wie folgt:

$$\begin{aligned}
&\Sigma : 1 = (1),\\
&\Sigma : 2 = (1) + (2),\\
&\Sigma : 3 = (1) + (2) + (3),\\
&\Sigma : 4 = (1) + (2) + (3) + (4)
\end{aligned}$$

etc.

Werte von welcher Art aber die Formel $\Sigma : x$ erhalten wird, wann immer x entweder gebrochene oder gar surdische Werte, ob positive oder negative, zugeteilt werden, wird daher in keinster Weise klar; daher rechne ich die Werte zu einem eigenen Geschlecht von Funktionen, welche ich als *unerklärbare* bezeichnet habe. Wie also solche Funktionen durch analytische Formeln bestimmt ausgedrückt werden können, werde ich hier im Besonderen untersuchen.

§3 Aber diese ganze Aufgabe wird am angenehmsten durch aus der vorgelegten Reihe derivierte ununterbrochene Differenzen bewältigt werden, während natürlich jeder beliebige Term vom folgenden subtrahiert wird, auf welche Weise die Reihe der ersten Differenzen entspringen wird, aus welcher weiter auf die gleiche Weise die zweiten, dritten, vierten etc. Differenzen gebildet werden werden. Aber diese Differenzen werde ich mit den folgenden Charakteren anzeigen.

I. Differenzen	II. Differenzen	III. Differenzen	
$(2)-(1)=\Delta 1$	$\Delta 2-\Delta 1=\Delta^2 1$	$\Delta^2 2-\Delta^2 1=\Delta^3 1$	
$(3)-(2)=\Delta 2$	$\Delta 3-\Delta 2=\Delta^2 2$	$\Delta^2 3-\Delta^2 2=\Delta^3 2$	
$(4)-(3)=\Delta 3$	$\Delta 4-\Delta 3=\Delta^2 3$	$\Delta^2 4-\Delta^2 3=\Delta^3 3$	etc.
$(5)-(4)=\Delta 4$	$\Delta 5-\Delta 4=\Delta^2 4$	$\Delta^2 5-\Delta^2 4=\Delta^3 4$	
etc.	etc.	etc.	

§4 Nachdem diese Charaktere festgelegt worden sind, werden die einzelnen Terme der Reihe aus dem ersten, (1), und seinen Differenzen $\Delta 1$, $\Delta^2 1$, $\Delta^3 1$, $\Delta^4 1$ etc. ausgedrückt werden können. Weil nämlich gilt

$$(2)=(1)+\Delta 1 \quad \text{und} \quad \Delta 2=\Delta 1+\Delta^2 1,$$

wird wegen $(3)=(2)+\Delta 2$ auch sein

$$(3)=(1)+2\Delta 1+\Delta^2 1.$$

Daraus fließt nun diese Gleichheit

$$\Delta 3=\Delta 1+2\Delta^2 1+\Delta^3 1.$$

Weil nun $(4)=(3)+\Delta 3$ ist, werden wir haben

$$(4)=(1)+3\Delta 1+3\Delta^2 1+\Delta^3 1;$$

Wegen $(5)=(4)+\Delta 4$ wird

$$(5) = (1) + 4\Delta 1 + 6\Delta^2 1 + 4\Delta^3 1 + \Delta^4 1$$

und so weiter sein. Aus der Bildung dieser Formeln selbst ist es offenbar, dass hier dieselben Koeffizienten, die man in der Binomialpotenz hat, deren Exponent um eine Einheit kleiner ist als der Index des vorgelegten Terms, auftauchen. So wird sein

$$(n) = (1) + \frac{n-1}{1}\Delta 1 + \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2}\Delta^2 1 + \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-3}{3}\Delta^3 1 + \text{etc.}$$

§5 Wenn wir daher diese Zahl n um eine Einheit vermehren, werden wir haben

$$(n+1) = (1) + \frac{n}{1}\Delta 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}\Delta^2 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}\Delta^3 1 + \text{etc.}$$

Weil nun dieser letzte Ausdruck den Term darbietet, der vom ersten um n Schritte wegbewegt worden ist, wird auf die gleiche Weise der Term, der vom zweiten aus genauso viele Schritte nach vorne bewegt worden ist, $(n+2)$, aus dem zweiten und seinen Differenzen bestimmt; es wird nämlich gelten

$$(n+2) = (2) + \frac{n}{1}\Delta 2 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}\Delta^2 2 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}\Delta^3 2 + \text{etc.}$$

Auf die gleiche Weise ist es ersichtlich, dass unmittelbar anschließend sein wird

$$(n+3) = (3) + \frac{n}{1}\Delta 3 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}\Delta^2 3 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}\Delta^3 3 + \text{etc.},$$

$$(n+4) = (4) + \frac{n}{1}\Delta 4 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}\Delta^2 3 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}\Delta^3 4 + \text{etc.}$$

etc.

§6 Daher tritt es also klar zu tage, dass der allgemeine Terme unserer Reihe, also (x), aus dem ersten und seinen Differenzen auf diese Weise definiert wird

$$(x) = (1) + \frac{x-1}{1}\Delta 1 + \frac{x-1}{1}\cdot\frac{x-2}{2}\Delta^2 1 + \frac{x-1}{1}\cdot\frac{x-2}{2}\cdot\frac{x-3}{3}\Delta^3 1 + \text{etc.},$$

woher der dem letzten folgende Term, $(x+1)$, offenbar sein wird

$$(x+1) = (1) + \frac{x}{1}\Delta 1 + \frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\Delta^2 1 + \frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{3}\Delta^3 1 + \text{etc.};$$

weil dieser Ausdruck im Folgenden sehr häufig auftaucht, wollen wir der kürze wegen die folgenden Charaktere einführen:

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{1} = x, \\
&\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2} = x', \\
&\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{3} = x'', \\
&\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{3}\cdot\frac{x-3}{4} = x''' \\
&\qquad\qquad \text{etc.},
\end{aligned}$$

unter Verwendung welcher wir die folgenden Gleichungen haben werden:

$$\begin{aligned}
(x+1) &= (1) + x\Delta 1 + x'\Delta^2 1 + x''\Delta^3 1 + \text{etc.},\\
(x+2) &= (2) + x\Delta 2 + x'\Delta^2 2 + x''\Delta^3 2 + \text{etc.},\\
(x+3) &= (3) + x\Delta 3 + x'\Delta^2 3 + x''\Delta^3 3 + \text{etc.},\\
(x+4) &= (4) + x\Delta 4 + x'\Delta^2 4 + x''\Delta^3 4 + \text{etc.},\\
\cdots \quad & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\
\cdots \quad & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\
(x+n) &= (n) + x\Delta n + x'\Delta^2 n + x''\Delta^3 n + \text{etc.}
\end{aligned}$$

§7 Des Weiteren werden auch die Summen wie vieler Terme unserer Reihe auch immer allein aus dem ersten Term und seinen Differenzen bestimmt werden können, so wie die folgende Tabelle aufzeigt.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
\Sigma : 1 & = & (1) & & & & & & & & \\
\text{add. } (2) & = & (1) & + & \Delta 1 & & & & & & \\
\hline
\Sigma : 2 & = & 2(1) & + & \Delta 1 & & & & & & \\
(3) & = & (1) & + & 2\Delta 1 & + & \Delta^2 1 & & & & \\
\hline
\Sigma : 3 & = & 3(1) & + & 3\Delta 1 & + & \Delta^2 1 & & & & \\
(4) & = & (1) & + & 3\Delta 1 & + & 3\Delta^2 1 & + & \Delta^3 1 & & \\
\hline
\Sigma : 4 & = & 4(1) & + & 6\Delta 1 & + & 4\Delta^2 1 & + & \Delta^3 1 & & \\
(5) & = & (1) & + & 4\Delta 1 & + & 6\Delta^2 1 & + & 4\Delta^3 1 & + & \Delta^4 1 \\
\hline
\Sigma : 5 & = & 5(1) & + & 10\Delta 1 & + & 10\Delta^2 1 & + & 5\Delta^3 1 & + & \Delta^4 1
\end{array}$$

etc.

Hier ist es wiederum ersichtlich, dass die Koeffizienten dieselben sind wie die, die in der Binomialpotenz derselben Ordnung auftauchen.

§8 Also werden wir unter Verwendung der gerade zuvor eingeführten Charaktere den summatorischen Term unserer Reihe selbst, also $\Sigma : x$, ausdrücken können; es wird nämlich sein

$$\Sigma : x = x(1) + x'\Delta 1 + x''\Delta^2 1 + x'''\Delta^3 1 + \text{etc.},$$

welche Form schon so beschaffen ist, dass sich anstelle von x nicht nur ganze Zahlen, sondern auch gebrochene, ja sogar irgendwelche surdische, so positive wie negative, annehmen lassen, in welchen Fällen dieser Ausdruck natürlich bis ins Unendliche fortschreiten wird, wenn die vorgelegte Reihe nicht zufällig schließlich zu verschwindenden Differenzen führt; Reihen von dieser Art pflegen algebraisch genannt zu werden, in welchen Fällen also nicht zu unerklärbaren Formeln gelangt wird. Dennoch bringt indes dieser für den summatorischen Term gefundene Ausdruck, wann immer er sich bis ins Unendliche erstreckt, nichts an Vorteil mit sich, wann immer Differentiationen oder auch Integrationen durchzuführen sind; deswegen wird sich damit zu beschäftigen sein, wie, zumindest für bestimmte Fälle, der gefundene summatorische Term in andere Formen überführt werden kann, die weder einer Differentiation noch einer Integration hinderlich sind; und darauf beziehen sich alle Hilfsmittel, die ich in meinem Buch *Institutiones Calculi Differentialis* umfassender dargestellt habe und deren der Fund zu nicht wenigen Teilen im Verborgenen gelegen haben. Aber diese ganze Aufgabe wird auf die folgende Weise leicht erledigt werden.

§9 Zu dem gerade zuvor für den summatorischen Term $\Sigma : x$ gefundenen Term werden nun mehrere in dieser Gattung enthaltene Formeln addiert

$$(n) + x\Delta n + x'\Delta^2 n + x''\Delta^3 n + \text{etc.} \ldots - (x+n),$$

deren Summen, weil sie dem Nichts gleich sind, alle, wie viele auch immer es waren, mit $\Sigma : x$ zusammen genommen nichts desto weniger den summatorischen Term ausdrücken werden. Es werden also für n nacheinander alle Zahlen 1, 2, 3, 4 etc. genommen und der Ausdruck auf die folgende Weise nach den den einzelnen Werten x, x', x'' etc. entsprechenden Spalten angeordnet.

ALLGEMEINER AUSDRUCK FÜR DEN SUMMATORISCHEN TERM

$$x(1) + x'\Delta 1 + x''\Delta^2 1 + x'''\Delta^3 1 + \text{etc.}$$

$$\begin{array}{l}
+ (1) + x\Delta 1 + x'\Delta^2 1 + x''\Delta^3 1 + x'''\Delta^4 1 + \ldots - (x+1) \\
+ (2) + x\Delta 2 + x'\Delta^2 2 + x''\Delta^3 2 + x'''\Delta^4 2 + \ldots - (x+2) \\
+ (3) + x\Delta 3 + x'\Delta^2 3 + x''\Delta^3 3 + x'''\Delta^4 3 + \ldots - (x+3) \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
+ (n) + x\Delta n + x'\Delta^2 n + x''\Delta^3 n + x'''\Delta^4 n + \ldots - (x+n).
\end{array}$$

§10 Auch wenn die Gültigkeit dieses Ausdrucks nicht weiter einem Zweifel unterliegt, wird es dennoch nicht unwesentlich förderlich sein, ihn aus der Form selbst bestätigt zu haben. Es werden natürlich die einzelnen Spalten zu einer Summe gesammelt; und freilich wird die Summe der ersten sein

$$(1) + (2) + (3) + (4) + \ldots + (n) = \Sigma : n,$$

Die zweite Spalte gibt

$$x((1) + \Delta 1 + \Delta 2 + \Delta 3 + \ldots + \Delta n).$$

Weil aber gilt

$$\Delta 1 = (2) - (1),$$
$$\Delta 2 = (3) - (2),$$
$$\Delta 3 = (4) - (3)$$

etc.,

wird diese ganze Summe zusammengezogen werden zu

$$x(n+1).$$

Auf die gleiche Weise wird die Summe der dritten Spalte sein

$$x'(\Delta 1 + \Delta^2 1 + \Delta^2 3 + \Delta^4 + \ldots + \Delta^2 n);$$

und weil auch gilt

$$\Delta^2 1 = \Delta 2 - \Delta 1, \quad \Delta^2 2 = \Delta 3 - \Delta 2, \ldots, \quad \Delta^2 n = \Delta(n+1) - \Delta n,$$

wird jene Reihe zusammengezogen zu

$$x' \Delta(n+1).$$

Auf dieselbe Weise tritt es klar zu tage, dass die Summe der vierten Spalte diese sein wird

$$x'' \, \Delta^2(n+1)$$

und der fünften

$$x'''\Delta^3(n+1)$$

und so weiter. Die Summe der letzten zu subtrahierenden Spalte ist hingegen

$$(x+1)+(x+2)+(x+3)+\ldots+(x+n)=\Sigma:(x+n)-\Sigma:x.$$

§11 Die Summe aller mittleren Spalten außer der ersten und der letzten ist, wie wir gesehen haben, diese

$$x(n+1)+x'\Delta(n+1)+x''\Delta^2(n+1)+x'''\Delta^3(n+1)+\text{etc.}$$

Weil aber gilt

$$x(1)+x'\Delta 1+x''\Delta^2 1+x'''\Delta^3 1+\text{etc.}=\Sigma:x,$$

wird nach Vermehren der einzelnen Terme um die Zahl n die Summe unserer Reihe diese sein

$$x(n+1)+x'\Delta(n+1)+x''\Delta^2(n+1)+\text{etc.}=\Sigma:(x+n)-\Sigma:n;$$

als logische Konsequenz ist die Summe gänzlich aller Spalten diese

$$=\Sigma:(x+n);$$

daher, wenn die Summe der letzten Spalte, welche diese ist

$$\Sigma : (x+n) - \Sigma : x,$$

subtrahiert wird, wird die Summe des ganzen Ausdruckes als $= \Sigma : x$ zurückbleiben, das heißt der gesuchte summatorische Term.

§12 Hier wird es im höchsten Maße wundersam erscheinen, dass wir den Wert der Formel $\Sigma : x$, welcher mit einer hinreichend einfachen Reihe ausgedrückt wird, durch eine Ansammlung von unzähligen Reihen ausgedrückt und in selbige eingehüllt angegeben haben; aber bald wird der riesige Nutzen dieser sehr komplizierten Form klar zu tage treten, wann immer wir die Anzahl der horizontalen Reihen sogar bis ins Unendliche fortgesetzt haben werden, was geschehen wird, wenn wir für n eine unendlich große Zahl annehmen, wie wir es nun deutlicher erklären werden.

§13 Während also n eine unendlich große Zahl bezeichnet, wird die Summe der zweiten Spalte, die $x(n+1)$ ist, den infinitesimalen Term unserer Reihe enthalten; wenn dieser also verschwindet, werden noch um Vieles mehr die Summen aller folgenden Spalten verschwinden, weswegen es für diesen Fall genügen wird, allein die erste zusammen mit der letzten Spalte in der Rechnung beibehalten zu haben. Wenn aber die infinitesimalen Terme nicht verschwinden, aber dennoch einander gleich waren, dann wird sich die dritte zusammen mit allen folgenden Spalten verwerfen lassen. Wenn aber weiter erst die zweiten infinitesimalen Differenzen verschwinden, werden die ersten drei vertikalen Spalten in der Rechnung beibehalten werden müssen; und auf die gleiche Weise vier, wenn erst die dritten infinitesimalen verschwinden. Nach diesem Unterschied werden wir also die Reihen selbst in die folgenden Gattungen einteilen.

Die erste Gattung von Reihen, deren infinitesimale Terme verschwinden

§14 Sooft also eine solche Reihe vorgelegt wird, wird es für ihren summatorischen Term genügen, die Terme der ersten und der letzten Spalte in der Rechnung beibehalten zu haben, und so werden wir für den summatorischen Term den folgenden Ausdruck erlangen

$$\Sigma : x =$$

$$\begin{array}{cccccccccc} & (1) & + & (2) & + & (3) & + & (4) & + & \text{etc.} \\ - & (x-1) & - & (x-2) & - & (x-3) & - & (x-4) & - & \text{etc.,} \end{array}$$

welcher freilich bis ins Unendliche läuft und umso schneller konvergiert, umso kleiner der Index x war, weil ja, wenn er verschwindet, die ganze Reihe ins Nichts übergehen wird oder $\Sigma : 0 = 0$ sein wird, was mit der Natur der Sache überaus übereinstimmt; wann immer nämlich die Anzahl der zu addierenden Terme die Null ist, muss auch die Summe notwendigerweise verschwinden.

§15 Wann immer der Index x eine riesige Zahl ist, wird diese Reihe natürlich sehr langsam konvergieren; aber es wird immer möglich sein, Fälle von dieser Art auf kleinere Indizes zurückzuführen. Weil nämlich gilt

$$\Sigma : (x+1) = \Sigma : x + (x+1),$$

wird auf die gleiche Weise sein

$$\Sigma : (x+2) = \Sigma : x + (x+1) + (x+2)$$

und daher im Allgemeinen, während i eine ganze Zahl bezeichnet,

$$\Sigma : (x+i) = \Sigma : x + (x+1) + (x+2) + \ldots + (x+i).$$

Deswegen, wenn die Summe von $x + i$ Termen verlangt wird, wird es ausreichen, die Summe von x Termen, das heißt $\Sigma : x$, ausfindig gemacht zu haben und auf diese Weise werden alle Fragen von dieser Art auf Fälle zurückgeführt werden können, wo der Index x sogar kleiner ist als die Einheit, in welchem Fall die zuvor für $\Sigma : x$ gegebene Reihe sehr stark konvergieren wird.

§16 Eine solche Reduktion ist besonders notwendig, wann immer der Index x eine negative Zahl ist. Weil nämlich gilt

$$\Sigma : x = \Sigma : (x-1) + (x),$$

wird sein

$$\Sigma : (x-1) = \Sigma : x - (x)$$

und auf dieselbe Weise

$$\Sigma : (x-2) = \Sigma : x - (x) - (x-1)$$

und

$$\Sigma : (x-3) = \Sigma : x - (x) - (x-1) - (x-2)$$

und im Allgemeinen

$$\Sigma : (x-i) = \Sigma : x - (x) - (x-1) - \ldots - (x-i+1)$$

und auf diese Weise, wie groß auch immer die negative Zahl $x - i$ war, kann die Auflösung immer auf $\Sigma : x$ zurückgeführt werden, so dass $x < 1$ ist.

Beispiel

Es sei diese harmonische Reihe vorgelegt

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{x} = \Sigma : x,$$

von welcher die Summe von x Termen verlangt werde, wo sich für x irgendwelche außer den ganzen positiven Zahlen annehmen lässt, weil ja für die Fälle, in denen x eine ganze positive Zahl ist, die ganze Sache keine Schwierigkeiten bereitet. In diesem Fall wird also aus der zuvor gegebenen Form sein

$$\Sigma : x =$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{4} & + \text{etc.} \\ - & \frac{1}{x+1} & - & \frac{1}{x+2} & - & \frac{1}{x+3} & - & \frac{1}{x+4} & - \text{etc.}; \end{array}$$

diese zwei Reihen werden zu dieser einen einzigen zusammengezogen werden

$$\Sigma : x = \frac{x}{x+1} + \frac{x}{2(x+2)} + \frac{x}{3(x+3)} + \frac{x}{4(x+4)} + \text{etc.},$$

die Summe welcher Reihe per se bekannt ist, sooft x eine ganze positive Zahl war. So wird es sich wie folgt verhalten,
Ist $x = 1$,

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \text{etc.};$$

ist $x = 2$,

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 4} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{4 \cdot 6} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \text{etc.};$$

ist $x = 3$,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{3}{3 \cdot 6} + \frac{3}{4 \cdot 7} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \text{etc.};$$

ist $x = 4$,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{1 \cdot 5} + \frac{4}{2 \cdot 6} + \frac{4}{3 \cdot 7} + \frac{4}{4 \cdot 8} + \frac{4}{5 \cdot 9} + \text{etc.};$$

etc.,

welche freilich allbekannt sind.

§18 Damit diese Dinge besser verstanden werden, wollen wir die Kurve (Fig. 1) konstruieren, deren Abszisse

$$0x = x$$

diese Abszisse entspricht

$$xy = y = \Sigma : x,$$

so dass, nachdem über der Achse $0x$ in gleichen Einheitsintervallen $0, 1$; $1, 2$; $2, 3$; $3, 4$ etc. genommen worden sind, die Ordinaten diese sein werden

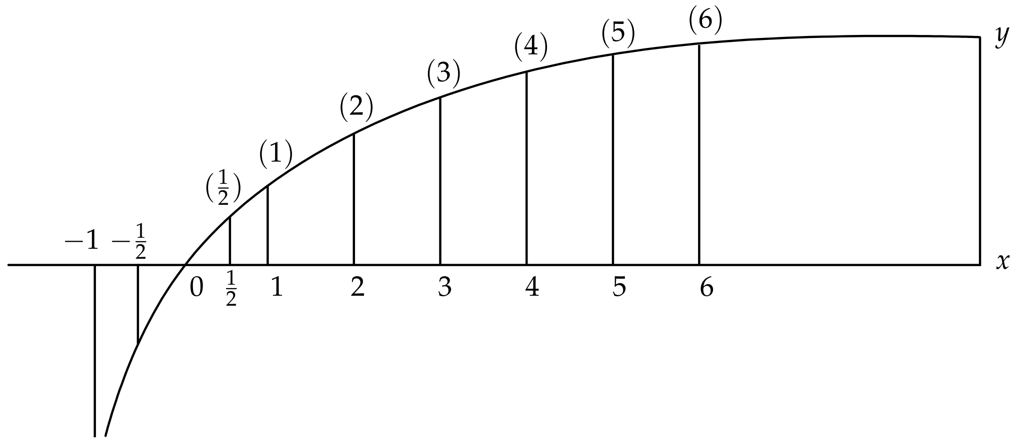

Fig. 1

$$\begin{gathered}1\ldots(1)=1,\\ 2\ldots(2)=1+\frac{1}{2},\\ 3\ldots(3)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\\ 4\ldots(4)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\\ \text{etc.;}\end{gathered}$$

und die Gleichung zwischen je zwei Koordinaten wird sein

$$y=\frac{x}{x+1}+\frac{x}{2(x+2)}+\frac{x}{3(x+3)}+\frac{x}{4(x+4)}+\text{etc.},$$

aus welcher Gleichung also alle dazwischen liegenden definiert werden können werden; und daher wird es ausreichen, für x kleinere Werte als die Einheit angenommen zu haben. So, wenn die Ordinate $\frac{1}{2}\ldots\left(\frac{1}{2}\right)$, die der Abszisse $0\ldots\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ entspricht, verlangt wird, wird aufgefunden werden

$$\frac{1}{2}\ldots\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{4\cdot 9}+\frac{1}{5\cdot 11}+\text{etc.},$$

die Summe welcher Reihe auf diese Weise durch Logarithmen angegeben können wird. Es werde diese Reihe gebildet

$$y = \frac{t^3}{1 \cdot 3} + \frac{t^5}{2 \cdot 5} + \frac{t^7}{3 \cdot 7} + \frac{t^9}{4 \cdot 9} + \text{etc.},$$

welche Reihe also nach Nehmen von $t = 1$ den gesuchten Werten geben wird; aber durch Differenzieren werden wir hingegen haben

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{1} + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3} + \frac{t^8}{4} + \text{etc.}$$

und durch erneutes Differenzieren

$$\frac{ddy}{2d^2} = t + t^3 + t^5 + t^7 + \text{etc.} = \frac{t}{1-tt}.$$

Daher wird also umgekehrt sein

$$\frac{dy}{2dt} = \int \frac{tdt}{1-tt} \quad \text{und} \quad y = 2\int dt \int \frac{tdt}{1-tt},$$

welche zweifache Integration auf die gewohnte Weise auf eine einzige reduziert wird, wonach sein wird

$$y = 2t\int \frac{tdt}{1-tt} - 2\int \frac{ttdt}{1-tt}.$$

Weil aber nach der Integration $t = 1$ gesetzt werden muss, wird sein

$$y = 2\int \frac{tdt}{1-tt} - 2\int \frac{ttdt}{1-tt} = 2\int \frac{tdt}{1+t};$$

deswegen wird durch Integrieren werden

$$y = 2t - 2\log(t+1)$$

und daher in unserem Fall

$$y = 2 - 2\log 2,$$

was näherungsweise $0,61370564$ ist.

§19 Nachdem nun die der Abszisse $\frac{1}{2}$ entsprechende Ordinate gefunden worden ist, natürlich

$$\Sigma : \frac{1}{2} = 2 - 2\log 2,$$

werden aus ihr leicht durch die oben gegebenen Formeln deriviert, natürlich

$$\begin{aligned}
\Sigma : \left(1 + \frac{1}{2}\right) &= \frac{2}{3} + \Sigma : \frac{1}{2}, \\
\Sigma : \left(2 + \frac{1}{2}\right) &= \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \Sigma : \frac{1}{2}, \\
\Sigma : \left(3 + \frac{1}{2}\right) &= \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \Sigma : \frac{1}{2} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Ja sogar die vorhergehenden in der Figur ausgedrückten Ordinaten werden aus der Formel $\Sigma : (x - i)$, welche wir in [§ 16] gefunden haben, natürlich aus

$$\Sigma : (x-i) = \Sigma : x - (x) - (x-1) - (x-2) - \ldots - (x-i+1),$$

abgeleitet werden können. Weil also in unserem Fall $x = \frac{1}{2}$ ist, wird die Ordinate diese sein

$$\Sigma : \left(-\frac{1}{2}\right) = \Sigma : \frac{1}{2} - 2 = -2\log 2,$$

sie wird natürlich negativ sein. Nachdem aber $x = -1$ genommen worden ist, wird sie unendlich. Sie wird in der Tat auch den Fällen $x = -2$, $x = -3$, $x = -4$ etc. unendlich werden. Innerhalb dieser Intervalle wird aber sein

$$\begin{aligned}
\Sigma : -\left(1+\frac{1}{2}\right) &= \Sigma : \frac{1}{2} - 2 + 2, \\
\Sigma : -\left(2+\frac{1}{2}\right) &= \Sigma : \frac{1}{2} - 2 + 2 + \frac{2}{3}, \\
\Sigma : -\left(3+\frac{1}{2}\right) &= \Sigma : \frac{1}{2} - 2 + 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

etc.

§20 Wir wollen nun die für die Ordinate y gefundene Reihe differenzieren und es wird werden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \text{etc.},$$

welche Reihe also den Tangens des Winkels ausdrückt, unter welchem das Kurvenelement in y zur Achse geneigt ist; daher tritt es klar zu tage, dass diese Neigung für eine unendliche Abszisse null sein wird, oder dass der

Kurvenverlauf im Unendlichen der Achse parallel ist. Dann wird aber nach Nehmen von $x = 0$ die Neigung der Kurve zum Anfang selbst

$$= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{6} = 1,644$$

und daher der Winkel $= 58°42'$ sein. Dann wird nach Nehmen von $x = 1$ hingegen sein

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{6} - 1 = 0,644,$$

wo also die Neigung $= 32°48'$ sein wird, und indem von da aus weiter fortgeschritten wird, wird die Neigung ununterbrochen abnehmen.

§21 Wir haben aber hingegen durch Rückwärtsgehen zu negativen Abszissen oben gesehen, dass in den Fällen, in denen $x = -1$ oder $x = -2$ oder $x = -3$ etc. ist, die Ordinaten unendlich groß sind und ebenso viele Asymptoten der Kurve festlegen. Nun werden wir aber sehen, dass an denselben Stellen $\frac{dy}{dx} = \infty$ wird und die Neigung der Kurve 90° ist oder die Tangenten zur Achse senkrecht sein werden. Zusätzlich, weil ja die für $\frac{dy}{dx}$ gefundene Reihe immer eine positive Summe hat, folgt, dass alle Teile der Kurve nach rechts hin ansteigen, andererseits aber, nach links, absteigen.

§22 Ja wir werden sogar eine Integration verwenden können und die Kurvenfläche vom Anfang aus bis hin zur Ordinate $x \dots y$ angeben werden können. Denn aus der ersten Form, zu welcher wir unmittelbar gelangt sind, wird offenbar werden

$$\int y dx =$$

$$\begin{array}{c} x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \text{etc.} \\ -\log(1+x) - \log(2+x) - \log(3+x) - \text{etc.} \\ +\text{Konst.}, \end{array}$$

welche Konstante so bestimmt werden muss, dass im Fall $x = 0$ die ganze Fläche verschwindet; daher wird jene in herkömmlicher Weise so ausgedrückt werden:

$$\int y dx =$$

$$\begin{array}{c} x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \text{etc.} \\ -\log(1+x) - \log\left(1+\frac{1}{2}x\right) - \log\left(1+\frac{1}{3}x\right) - \text{etc.} \end{array}$$

Weil also gilt

$$\log\left(1+\frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \frac{x^3}{3n^3} - \frac{x^4}{4n^4} + \text{etc.},$$

wird der obere Ausdruck durch die folgenden Reihen ausgedrückt werden können:

$$\int y dx =$$

$$\begin{array}{c} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} - \text{etc.} \\ + \frac{x^2}{2 \cdot 4} - \frac{x^3}{3 \cdot 8} + \frac{x^4}{4 \cdot 16} - \frac{x^5}{5 \cdot 32} + \frac{x^6}{6 \cdot 64} - \text{etc.} \end{array}$$

$$+\frac{x^2}{2\cdot 9}-\frac{x^3}{3\cdot 27}+\frac{x^4}{4\cdot 81}-\frac{x^5}{5\cdot 243}+\frac{x^6}{6\cdot 729}-\text{etc.}$$

$$+\frac{x^2}{2\cdot 16}-\frac{x^3}{3\cdot 64}+\frac{x^4}{4\cdot 256}-\frac{x^5}{5\cdot 1024}+\frac{x^6}{6\cdot 4096}-\text{etc.}+\text{etc.}$$

§23 Wenn wir daher nun diese Spalten sammeln, werden wir haben

$$\int ydx =$$

$$+\frac{1}{2}x^2\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{etc.}\right)=+0,822467x^2$$

$$-\frac{1}{3}x^3\left(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+\frac{1}{125}+\text{etc.}\right)=-0,400685x^3$$

$$+\frac{1}{4}x^4\left(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\frac{1}{625}+\text{etc.}\right)=+0,270581x^4$$

$$-\frac{1}{5}x^5\left(1+\frac{1}{32}+\frac{1}{243}+\frac{1}{1024}+\frac{1}{3125}+\text{etc.}\right)=-0,207385x^5$$

$$+\text{etc.}$$

Wir wollen nun $x=1$ setzen, dass die Fläche $01(1)$ [Fig. 1] hervorgeht; und weil die hier gegebenen Dezimalbrüche kaum konvergieren, sei es angemerkt, dass die Summe irgendeiner Reihe, wo die Vorzeichen alternieren, natürlich

$$s=a-b+c-d+e-\text{etc.},$$

so durch ununterbrochene Differenzen ausgedrückt werden, dass gilt

$$s=\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}\Delta a+\frac{1}{8}\Delta^2 a-\frac{1}{16}\Delta^3 a+\text{etc.},$$

mit Hilfe welcher Regel die Rechnung auf die folgende Weise durchgeführt werden können wird:

		$-\Delta$	$+\Delta^2$	$-\Delta^3$	$+\Delta^4$	$-\Delta^5$	$+\Delta^6$	$-\Delta^7$	$+\Delta^8$	
$a)$	$0,822467$									
		$0,421782$								
$b)$	$0,400685$		$0,291678$							
		$0,130104$		$0,224770$						
$c)$	$0,207385$		$0,066908$		$0,183230$					
		$0,063196$		$0,041540$		$0,154737$				
$d)$	$0,207385$		$0,025368$		$0,028493$		$0,133936$			
		$0,037828$		$0,013047$		$0,020801$		$0,118072$		
$e)$	$0,169557$		$0,012321$		$0,007692$		$0,015864$		$0,105564$	etc.
		$0,025507$		$0,005355$		$0,004937$		$0,012508$		
$f)$	$0,144050$		$0,006966$		$0,002755$		$0,003356$			
		$0,018541$		$0,002600$		$0,001581$				
$g)$	$0,125509$		$0,004366$		$0,001174$					
		$0,014175$		$0,001426$						
$h)$	$0,111334$		$0,002940$							
		$0,011235$								
$i)$	$0,100099$									

§24 Von diesen Spalten, von welchen die erste aus den *Institutiones Calculi Differentialis* Kap. VI. Teil II. S. 456 entnommen worden ist, bezeichnen die oberen Zahlen den ersten Term a mit seinen ununterbrochenen Differenzen; die zweiten beim Heruntergehen bezeichnen hingegen den Term b mit seinen Differenzen, die dritten den Term c mit ihren Differenzen. Weil nun die obersten Terme kaum konvergieren, wollen wir die zwei ersten $a - b$ tatsächlich sammeln und es wird $a - b = 0,421782$ sein; wir wollen hingegen die Summe der folgenden $c - d + e - f +$etc.

$$= \frac{1}{2}c - \frac{1}{4}\Delta c + \frac{1}{8}\Delta^2 c - \frac{1}{16}\Delta^3 c + \text{etc.}$$

nach dem gegebenen Gesetz berechnen und es wird sein

$$
\begin{aligned}
+\ \frac{1}{2}c &= 0,135290\\
-\ \frac{1}{4}\Delta c &= 0,015799\\
+\ \frac{1}{8}\Delta^2 c &= 0,003171\\
-\ \frac{1}{16}\Delta^3 c &= 0,000815\\
+\ \frac{1}{32}\Delta^4 c &= 0,000240\\
-\ \frac{1}{64}\Delta^5 c &= 0,000077\\
+\ \frac{1}{128}\Delta^6 c &= 0,000026\\
-\int eqq &= 0,000010\\
\hline
\text{Summe} &= 0,155428\\
a-b &= 0,421782\\
\hline
\text{Fläche} &= 0,577210
\end{aligned}
$$

Ich hoffe aber, dass die genauere Entwicklung dieser ziemlich bemerkenswerten gekrümmten Linie niemanden unangenehm sein wird, besonders weil die Gleichung für diese Kurve sich auf unerklärbare Funktionen bezieht und deshalb die Abschweifung zu einem spezielleren Fall als unserem Ziel nicht fremd einzuschätzen ist.

Die zweite Gattung von Reihen, deren erste infinitesimale Differenzen verschwinden

§25 Auf diese Gattung beziehen sich also alle Reihen, deren infinitesimale Terme einander gleich sind. Um also den summatorischen Term dieser Reihen, $\Sigma : x$, auszudrücken, ist nichts anderes nötig, außer dass zum Ausdruck der vorhergehenden Gattung darüber hinaus die Terme der zweiten Spalte der in § 9 dargebotenen Form hinzugefügt werden, deren oberster Term einzeln darzubieten sein wird; und weil die einzelnen Reihen nun aus drei Termen bestehen, wird der gesuchte summatorische Term $\Sigma : x$ mit den folgenden drei Reihen definiert werden

$$\Sigma : x =$$

$$\begin{array}{rccccccccc} & + & (1) & + & (2) & + & (3) & + & (4) & +\text{etc.} \\ +x(1) & + & x\Delta 1 & + & x\Delta 2 & + & x\Delta 3 & + & x\Delta 4 & +\text{etc.} \\ & - & (x+1) & - & (x+2) & - & (x+3) & - & (x+4) & -\text{etc.}; \end{array}$$

welche Form wegen

$$\Delta 1 = (2) - (1), \quad \Delta 2 = (3) - (2), \quad \Delta 3 = (4) - (3) \quad \text{etc.}$$

in diese überführt wird

$$\Sigma : x =$$

$$\begin{array}{rccccccccc} & + & (1-x)(1) & + & (1-x)(2) & + & (1-x)(3) & + & (1-x)(4) & +\text{etc.} \\ +x(1) & + & x\Delta 1 & + & x\Delta 2 & + & x\Delta 3 & + & x\Delta 4 & +\text{etc.} \\ & - & (x+1) & - & (x+2) & - & (x+3) & - & (x+4) & -\text{etc.}; \end{array}$$

welche Reihe umso stärker konvergiert, umso kleiner x angenommen wird. Oben haben wir aber gelehrt, dass alle Fälle immer dorthin reduziert werden können, wo x ein Bruch kleiner als die Einheit ist.

§26 Wir wollen zuerst den einfachsten Fall betrachten, in welchem alle Terme der Reihe einander gleich sind, natürlich $(x) = a$; es tritt nämlich per se klar zu tage, dass ihr summatorischer Term ax ist, welchen Wert unser Ausdruck sofort aufzeigen wird. Es wird nämlich $\Sigma : x = xa$ sein.

§27 Nun werde der Fall betrachtet, in welchem $(x) = \frac{x+1}{x}$ ist, so dass unsere Reihe diese ist

$$\Sigma : x = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \ldots + \frac{x+1}{x} + \text{etc.},$$

deren infinitesimale Terme alle der Einheit gleich werden. Unsere Formel wird uns also geben

$$\Sigma : x =$$

$$\begin{aligned}
&+ (1-x)\cdot\frac{2}{1} + (1-x)\cdot\frac{3}{2} + (1-x)\cdot\frac{4}{3} + \text{etc.}\\
+2x &+ \quad x \quad \cdot\frac{3}{2} + \quad x \quad \cdot\frac{4}{3} + \quad x \quad \cdot\frac{5}{4} + \text{etc.}\\
&- \frac{x+2}{x+1} \quad - \frac{x+3}{x+2} \quad - \frac{x+4}{x+3} \quad - \text{etc.},
\end{aligned}$$

woher es klar zu tage treten wird, dass nach Nehmen von $x = 1$ $\Sigma : x = \frac{2}{1}$ sein wird; aber nach Nehmen von $x = 2$ wird werden

$$\Sigma : x =$$

$$\begin{aligned}
&- 1\cdot\frac{2}{1} - 1\cdot\frac{3}{2} - 1\cdot\frac{4}{3} - \text{etc.}\\
+4 &+ 2\cdot\frac{3}{2} + 2\cdot\frac{4}{3} + 2\cdot\frac{5}{4} + \text{etc.}\\
&- \quad \frac{4}{3} \quad - \quad \frac{5}{4} \quad - \quad \frac{6}{5} \quad - \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$= 4 - \frac{2}{1} + \frac{3}{2}.$$

§28 Dieser Fall kann in der Tat leicht auf die vorhergehende Gattung reduziert werden. Weil nämlich der allgemeine Term $(x) = \frac{x+1}{x}$ ist, wird er in Teile aufgelöst $(x) = 1 + \frac{1}{x}$ geben; deswegen werden zwei Reihen gebildet, die erste natürlich aus dem allgemeinen Term 1, die andere hingegen aus dem allgemeinen Term $\frac{1}{x}$, und diese zwei Reihen werden zusammen genommen die gesuchte Summe $\Sigma : x$ geben; es wird natürlich sein

$$\Sigma : x =$$

$$\begin{aligned} &+1+1\ +1\ +1\ +\ldots+1 \\ &+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Nun ist die Summe der oberen Reihe x, die untere kann hingegen durch die erste Gattung entwickelt werden und daher wird man haben

$$\Sigma : x =$$

$$\begin{aligned} x + \quad 1 \quad &+ \quad \frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{3} \quad + \quad \frac{1}{4} \quad + \text{etc.} \\ -\frac{1}{x+1} &- \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} - \text{etc.}, \end{aligned}$$

welcher Ausdruck um Vieles einfacher ist als der vorhergehende, aber nichtsdestoweniger denselben Wert darbietet. So, wenn $x = \frac{1}{2}$ genommen wird, wird uns der erste Ausdruck geben

$$\Sigma : x =$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}+\text{etc.}\\
+1&+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}+\text{etc.}\\
&-\quad\frac{5}{3}\quad-\quad\frac{7}{5}\quad-\quad\frac{9}{7}\quad-\quad\frac{11}{9}\quad-\text{etc.}
\end{aligned}
$$

und nachdem die Terme der Reihe nach gesammelt worden sind, wird werden

$$\Sigma:\frac{1}{2}=1+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 12}+\frac{1}{7\cdot 24}+\frac{1}{9\cdot 40}+\frac{1}{11\cdot 60}+\text{etc.},$$

deren Struktur deutlicher aus der folgenden Form zu tage treten wird

$$\Sigma:\frac{1}{2}=1+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{3\cdot 7\cdot 8}+\frac{1}{4\cdot 9\cdot 10}+\frac{1}{5\cdot 11\cdot 12}+\text{etc.}$$

Der andere Ausdruck gibt hingegen diese Reihe

$$\Sigma:\frac{1}{2}=$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}+1&+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\text{etc.}\\
&-\frac{2}{3}-\frac{2}{5}-\frac{2}{7}-\frac{2}{9}-\text{etc.},
\end{aligned}
$$

der nach Sammeln der Terme geben wird

$$\Sigma:\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{4\cdot 9}+\text{etc.}$$

§29 Aus diesem Beispiel wird es klar, dass die aus der zweiten Gattung abgeleitete Reihe schneller konvergiert als die zweite aus der ersten Gattung derivierte; daher wird es der Mühe wert sein, die Konvergenz der ersten Reihe aufmerksamer zu betrachten. Natürlich entspringt jeder beliebige Term dieser Reihe aus diesen drei Teilen

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n+2}{n+1}-\frac{2n+3}{2n+1};$$

weil diese sich näherungsweise gegenseitig aufheben, wird die Summe der zwei ersten der dritten gleich sein, woher diese ziemlich bemerkenswerte Formel folgt

$$\frac{n+1}{n}+\frac{n+2}{n+1}=\frac{2(2n+3)}{2n+1},$$

was umso näher an die Wahrheit herankommt, umso größer die Zahl n war. Daher, indem auf beiden Seiten 2 subtrahiert wird, wird näherungsweise sein

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}=\frac{4}{2n+1}.$$

§30 Aber eine solche Reduktion auf die erste Gattung kann immer Geltung haben, wenn die vorgelegte Reihe schließlich zu einem endlichen Wert konvergiert; aber wenn die Terme der Reihe schließlich bis ins Unendliche wachsen, kann diese Reduktion nicht weiter Geltung haben und es wird daher notwendigerweise zur zweiten Gattung zurückzukehren zu sein. Ein solcher Fall ist der, in dem $(x)=\sqrt{x}$ ist; während nämlich n eine unendliche Zahl bezeichnet, werden die benachbarten infinitesimalen Terme $\sqrt{n}$ und $\sqrt{n+1}$ sein, deren Differenz $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ und daher verschwindend ist. In diesem Fall wird unsere Reihe also diese sein

$$\Sigma : x=\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\ldots+\sqrt{x}.$$

Daher werden wir also durch die gegebenen Vorschriften diesen Ausdruck haben

$$\Sigma : x =$$

$$\begin{array}{rcccccccc}
 & + (1-x)\sqrt{1} & + & (1-x)\sqrt{2} & + & (1-x)\sqrt{3} & + \text{etc.} \\
+x+ & x\sqrt{2} & + & x\sqrt{3} & + & x\sqrt{4} & + \text{etc.} \\
- & \sqrt{x+1} & - & \sqrt{x+2} & - & \sqrt{x+3} & - \text{etc.};
\end{array}$$

wie sehr diese Reihe konvergiert, wollen wir im Fall $x = \frac{1}{2}$ sehen und es wird sein

$$\Sigma : \frac{1}{2} =$$

$$\begin{array}{r}
+\frac{1}{2}\sqrt{1} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{4} + \text{etc.} \\
+\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{4} + \frac{1}{2}\sqrt{5} + \text{etc.} \\
- \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{7}{2}} - \sqrt{\frac{9}{2}} - \text{etc.};
\end{array}$$

und nach Sammeln der Terme wird irgendeiner sein

$$\frac{1}{2}\sqrt{n} + \frac{1}{2}\sqrt{n+1} - \sqrt{\frac{2n+1}{2}},$$

was umso näher an das Nichts herankommen muss, um größer die Zahl n war, weshalb näherungsweise sein wird

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} = \sqrt{2(2n+1)}.$$

Nach Quadrieren wird man nämlich haben

$$2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)} = 2(2n+1)$$

und daher

$$2\sqrt{n(n+1)} = 2n + 1.$$

Nach erneutem Quadrieren wird werden

$$4nn + 4n = 4nn + 4n + 1,$$

welches Verhältnis natürlich näherungsweis an die Gleichheit herankommt. Im Übrigen verdient es hier bemerkt zu werden, dass die wahren Werte für die anstelle von x angenommenen Brüche dermaßen transzendent sind, dass sie mit überhaupt keinen analytischen Formeln ausgedrückt werden können. Ja es wird sich sogar jeder beliebige für x angenommene Wert auf ein eigentümliches Geschlecht von Transzendenten beziehen.

§31 Bevor wir aber diese Gattung verlassen, wollen wir noch einen außergewöhnlichen Lehrsatz über die Konvergenz von Formeln hinzufügen, der um Vieles allgemeiner als der ist, den wir gerade zuvor angeführt haben.

LEHRSATZ

Die folgende Gleichheit

$$(\beta - \alpha)\sqrt[\mu]{n^\nu} + \alpha\sqrt[\mu]{(n+1)^\nu} = \beta\sqrt[\mu]{\left(n + \frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu}$$

wird umso näher an die Wahrheit herankommen, um größer die Zahl n angenommen wird, und umso kleiner zugleich der Bruch $\frac{\alpha}{\beta}$ war, wenn nur der Exponent $\frac{\nu}{\mu}$ kleiner als die Einheit war. Aber nachdem ν negativ genommen worden ist, wird hingegen diese Gleichheit

$$\frac{\beta-\alpha}{\sqrt[\mu]{n^\nu}}+\frac{\alpha}{\sqrt[\mu]{(n+1)^\nu}}=\frac{\beta}{\sqrt[\mu]{\left(n+\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu}}$$

ohne die zweite Bedingung umso näher an die Wahrheit herankommen, umso größer die Zahl n war und umso kleiner der Bruch $\frac{\alpha}{\beta}$ war. Ja es wird sogar unter denselben Bedingungen durch Logarithmen zum einen gelten

$$(\beta-\alpha)\log n+\alpha\log(n+1)=\beta\log\left(n+\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

zum anderen

$$\frac{\beta-\alpha}{\log n}+\frac{\alpha}{\log(n+1)}=\frac{\beta}{\log\left(n+\frac{\alpha}{\beta}\right)}.$$

Beweis

§32 Dieser Lehrsatz folgt aus der für diese Gattung gegebenen allgemeinen Lösung, in welcher Geschlecht irgendein Term aus diesen Teilen besteht

$$(1-x)(n)+x(n+1)-(n+x)$$

und umso kleiner wird, umso größer die Zahl n angenommen wird, während x ein Bruch kleiner als die Einheit ist. Wenn wir daher nun $x=\frac{\alpha}{\beta}$ und $(x)=\sqrt[\mu]{x^\nu}$ und daher auch $(n)=\sqrt[\mu]{n^\nu}$ setzen, ist es notwendig, dass $\frac{\nu}{\mu}<1$ ist, weil andernfalls die infinitesimalen Terme keine verschwindenden Differenzen hätten. Diese Substitutionen liefern die in dem Lehrsatz gegebenen ersten Formeln. Wann immer aber der Bruch $\frac{\nu}{\mu}$ negativ angenommen wird, dann wird die vorgelegte Reihe sogar in der ersten Gattung enthalten sein, weil ja die infinitesimalen Terme ins Nichts übergehen.

§33 Damit die Weite dieses Lehrsatz eingesehen wird, wird es förderlich sein angemerkt zu haben, dass diese Formeln in vier Fällen genau mit der Wahrheit übereinstimmen; von diesen ist der erste der, wenn $\alpha = 0$ ist; der zweite der, in dem $\alpha = \beta$ ist; der dritte der, in dem $\nu = 0$ ist; der vierte hat schließlich Geltung, wenn für n eine unendliche Zahl angenommen wird, Außerdem ist aber ein fünfter Fall gegeben, in welchem in der ersten Form $\mu = \nu$ oder $\sqrt[\mu]{n^\nu} = n$ ist.

Die dritte Gattung von Reihen, von welchen erst die zweiten infinitesimalen Differenzen verschwinden

§34 Dies wird also passieren, sooft die infinitesimalen Termen selbst eine arithmetische Progression festlegen; die zuvor in der oberen Gattung für $\Sigma : x$ gefundene Formel wird an diesen Fall angepasst werden, wenn darüber hinaus die einzelnen Termen der dritten Spalten (der in § 9 dargebotenen allgemeinen Form) hinzugefügt werden. Auf diese Weise wird der summatorische Terme so ausgedrückt werden

$$\Sigma : x =$$

$$\begin{array}{llllllll}
 & + \ (1) & + \ (2) & + \ (3) & + \ldots + & (n) & + \text{etc.} \\
+ \ x(1) & + \ x\Delta 1 & + \ x\Delta 2 & + \ x\Delta 3 & + \ldots + & x\Delta n & + \text{etc.} \\
+ \ x'\Delta 1 & + \ x'\Delta^2 1 & + \ x'\Delta^2 2 & + \ x'\Delta 3 & + \ldots + & x'\Delta^2 n & + \text{etc.} \\
 & - (x+1) & - (x+2) & - (x+3) & - \ldots - & (x+n) & - \text{etc.}
\end{array}$$

§35 Wir wollen nun diesen Ausdruck in eine nützlichere Form überführen; und wir wollen freilich anstelle von x' seinen Wert $\frac{xx-x}{2}$ schreiben; dann wird aber wegen

$$\Delta n = (n+1) - (n)$$

und

$$\Delta^2 n = (n+2) - 2(n+1) + (n)$$

nach Einsetzen dieser Werte die letzte Reihe der vorhergehenden Formel in diese Form übergehen

$$\begin{aligned} &(n) + \quad x \quad (n+1) + \frac{xx-x}{2}(n+2) \\ - &\quad x \quad (n) - (xx-x)(n+1) \\ + &\frac{xx-x}{2}(n) \end{aligned}$$

welche Terme gesammelt liefern

$$\frac{xx-3x+2}{2}(n) - (xx-2x)(n+1) + \frac{xx-x}{2}(n+2).$$

Wir wollen also der Kürze wegen festlegen

$$\frac{xx-3x+2}{2} = p, \quad xx-2x = q \quad \text{und} \quad \frac{xx-x}{2} = r$$

und so wird der gesuchte summatorische Term mit der folgenden Form ausgedrückt werden

$$
\begin{aligned}
\Sigma : x = {} & \\
& \frac{3x - xx}{2}(1) + \frac{xx - x}{2}(2) \\
& + p(1) - q(2) + r(3) - (x+1) \\
& + p(2) - q(3) + r(4) - (x+2) \\
& + p(3) - q(4) + r(5) - (x+3) \\
& + \text{etc.},
\end{aligned}
$$

welche Reihe schon sehr stark konvergieren wird.

§36 Daher können wir also einen dem vorhergehenden aber sich um Vieles weiter erstreckenden Lehrsatz derivieren, indem wir wie zuvor festlegen

$$x = \frac{\alpha}{\beta}, \quad (n) = \sqrt[\mu]{n^\nu},$$

wo es schon genügt, dass der Exponent $\frac{\nu}{\mu}$ kleiner als zwei ist; aber um Vieles mehr wird sich dieser Exponent negativ festlegen lassen.

Lehrsatz

Diese Gleichheit

$$
\begin{aligned}
(\alpha\alpha - 2\alpha\beta + 2\beta\beta)\sqrt[\mu]{n^\nu} - (2\alpha\alpha - 4\alpha\beta)\sqrt[\mu]{(n+1)^\nu} + (\alpha\alpha - \alpha\beta)\sqrt[\mu]{(n+2)^\nu} \\
= 2\beta\beta\sqrt[\mu]{\left(n + \frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu}
\end{aligned}
$$

wird umso näher an die Wahrheit herankommen, umso größer die Zahl n

angenommen wird und umso weniger der Bruch $\frac{\alpha}{\beta}$ von der Einheit abweichen wird, solange $\frac{\nu}{\mu}$ kleiner als zwei ist. Dann wird aber für negativ genommenes μ um Vieles genauer gelten

$$\frac{\alpha\alpha - 3\alpha\beta + 2\beta\beta}{\sqrt[\mu]{n^\nu}} - \frac{2\alpha\alpha - 4\alpha\beta}{\sqrt[\nu]{(n+1)^\nu}} + \frac{\alpha\alpha - \alpha\beta}{\sqrt[\mu]{(n+2)^\nu}} = \frac{2\beta\beta}{\sqrt[\mu]{\left(n+\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu}}.$$

Ja es werden sogar Logarithmen für die Wurzelformeln angenommen werden können.

§37 Die Gültigkeit dieses Lehrsatzes besteht auch genau in diesen vier Fällen

$$1^\circ) \quad \alpha = 0, \quad 2^\circ) \quad \alpha = \beta, \quad 3^\circ) \quad \nu = 0, \quad \text{und} \quad 4^\circ) \quad n = \infty.$$

Außerdem passiert in der Tat dasselbe, wann immer in der ersten Form entweder $\nu = \mu$ oder $\nu = 2\mu$ ist, so dass $\sqrt[\mu]{n^\nu}$ entweder n oder nn ist. Wir haben also sechs Fälle, in welchen dieser Lehrsatz nicht vollkommen von der Wahrheit abweicht; daher wird leicht eingesehen, dass auch in allen übrigen Fällen der Fehler nicht merklich sein kann.

§38 Wir können auch diesen Lehrsatz noch weiter verallgemeinern, indem wir $\frac{n}{c}$ anstelle von n schreiben und überall mit der entsprechenden Potenz von c multiplizieren, damit die die Brüche beseitigt werden. Und so wird die erste Form werden

$$\begin{aligned}(\alpha\alpha - 3\alpha\beta + 2\beta\beta)\sqrt[\mu]{n^\nu} - 2\alpha\alpha - 4\alpha\beta)\sqrt[\mu]{(n+c)^\nu} \\ +(\alpha\alpha - \alpha\beta)\sqrt[\mu]{(n+2c)^\nu} = 2\beta\beta\sqrt[\mu]{\left(n+\frac{\alpha c}{\beta}\right)^\nu},\end{aligned}$$

diese andere Form weicht aber von dieser nur darin ab, dass die Wurzeln in die Nenner eingehen, was auch über die Logarithmen zu verstehen ist.

§39 Es wird also der Mühe wert sein, diesen Lehrsatz an einem Beispiel illustriert zu haben. Es werde also $\alpha = 1$ und $\beta = 2$ genommen und die im Lehrsatz dargebotenen Gleichheiten werden werden

$$3\sqrt[\mu]{n^\nu} + 6\sqrt[\mu]{(n+c)^\nu} - \sqrt[\mu]{(n+2c)^\nu} = 8\sqrt[\mu]{\left(n+\frac{1}{2}c\right)^\nu},$$

$$\frac{3}{\sqrt[\mu]{n^\nu}} + \frac{6}{\sqrt[\mu]{(n+1)^\nu}} - \frac{1}{\sqrt[\mu]{(n+2)^\nu}} = \frac{8}{\sqrt[\mu]{(n+\frac{1}{2})^\nu}}.$$

Wir wollen die erste Form auf Logarithmen anwenden und es wird werden

$$3\log n + 6\log(n+c) - \log(n+2c) = 8\log\left(n+\frac{1}{2}c\right).$$

Es sei nun $n = 10$ und $c = 2$, dass hervorgeht

$$3\log 10 + 6\log 12 - \log 4 = 8\log 11.$$

Nach der Entwicklung wird also sein

$$\begin{array}{rcr} 3\log 10 = 3,0000000 & & \log 14 = 1,1461280 \\ 6\log 12 = 6,4750872 & & 8\log 11 = 8,3311416 \\ 9,4750872 & = & 9,4772696, \end{array}$$

deren Differenz $0,0021824$ ist, welche um Vieles kleiner hervorgegangen wäre, wenn wir der Zahl n einen größeren Wert zugeteilt hätten.

§40 Über den summatorischen Term der vorgelegten Reihe sollte besonders bemerkt werden, dass so die Differentiation wie Integration leicht durchgeführt werden kann, nachdem natürlich der Index x als Variable genommen worden ist, so wie dies schon in der ersten Gattung ausführlicher gezeigt wurde, wo der summatorische Term $\Sigma : x$ als Ordinate eine gewissen Kurve betrachtet worden ist, während der Index x die Abszisse darstellt, und hauptsächlich in diesem Hinblick habe ich in *Calculi Differntialis* die unerklärbaren Funktionen behandelt.

§41 Aus der oben für den summatorischen Term $\Sigma : x$ gegebenen allgemeinen Formel wollen wir aber hier auch den Fall der harmonischen Reihe entwickeln, in welchem ist

$$\Sigma : x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{x},$$

und wir wollen ihren Wert für den Index $x = \frac{1}{2}$ suchen; und wegen $(x) = \frac{1}{x}$, dann aber wegen

$$p = \frac{3}{8}, \quad q = -\frac{3}{4}, \quad r = -\frac{1}{8}$$

werden wir haben

$$\begin{aligned} \Sigma : \frac{1}{2} = \frac{5}{8} - \frac{1}{16} & \\ + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} + \frac{3}{32} + \text{etc.} & \\ + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{20} + \text{etc.} & \\ - \frac{1}{24} - \frac{1}{32} - \frac{1}{40} - \frac{1}{48} - \text{etc.} & \\ - \frac{2}{3} - \frac{2}{5} - \frac{2}{7} - \frac{2}{9} - \text{etc.} & \end{aligned}$$

oder es wird sein

$$8\Sigma : \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\begin{aligned}
&+\frac{3}{1}+\frac{3}{2}+\frac{3}{3}+\frac{3}{4}+\text{etc.}\\
&+\frac{6}{2}+\frac{6}{3}+\frac{6}{4}+\frac{6}{5}+\text{etc.}\\
&-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\text{etc.}\\
&-\frac{16}{3}-\frac{16}{5}-\frac{16}{7}-\frac{16}{7}-\text{etc.}
\end{aligned}$$

Wir wollen die einzelnen Spalten zu einem einzigen Term sammeln und es wird sein

$$8\Sigma : \frac{1}{2} = \frac{9}{2} + \frac{6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 3} + \frac{6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{6}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 7} + \frac{6}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 9} + \text{etc.},$$

welche Reihe natürlich schneller konvergiert als die, die wir in der zweiten Gattung gefunden haben.

§42 Wenn wir daher aber die Terme nicht zusammenziehen, sondern die, die denselben Nenner haben, sammeln, nachdem die unterste Reihe weggelassen worden ist, werden wir haben

$$8\Sigma : \frac{1}{2} = \frac{9}{2} + \frac{3}{1} + \frac{9}{2}$$

$$\begin{aligned}
&+\ 8\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\text{etc.}\right)\\
&-16\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\text{etc.}\right)
\end{aligned}$$

oder wir werden, indem anstelle der oberen Reihe dies geschrieben wird

$$16\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\text{etc.}\right),$$

haben

$$\frac{1}{2}\Sigma:\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\text{etc.}$$

Wir wollen auf beiden Seiten Nachstehendes addieren

$$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\text{etc.};$$

es wird werden

$$\frac{1}{2}\Sigma:\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\log 2=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4},$$

als logische Konsequenz ist

$$\Sigma:\frac{1}{2}=2-\log 2,$$

welcher Wert überaus mit dem übereinstimmt, welcher in der ersten Gattung gegeben worden ist.

Supplement

Über unerklärbare Funktionen der Form $\Pi : x = A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E \cdot \dots \cdot X$

§1 Hier sind die Faktoren A, B, C, D etc. die Terme einer gewissen Reihe, die den Indizes 1, 2, 3, 4 etc. entsprechen und X der Term, der dem Index x entspricht; aber die Brüche, die den folgenden Indizes

$$x+1, \quad x+2, \quad x+3 \quad \text{etc.}$$

entsprechen, werde ich mit X', X'', X''' etc. bezeichnen. Daher tritt es schon sofort klar zu tage, dass

$$\Pi : (x+1) = X' \cdot \Pi : x$$

und

$$\Pi : (x+2) = X' \cdot X'' \cdot \Pi : x$$

und so weiter sein wird. Die vorhergehenden werden hingegen diese sein

$$\Pi : (x-1) = \frac{\Pi : x}{X}$$

etc.

Daher wird auszureichen eingesehen, dass diese Formeln für die Werte von x, die kleiner als die Einheit sind, angegeben werden.

§2 Sooft x eine ganze positive Zahl ist, gehen die Werte von $\Pi : x$ von selbst hervor. Es wird nämlich sein

$$\Pi : 1 = A, \quad \Pi : 2 = AB, \quad \Pi : 3 = ABC \quad \text{etc.}$$

Wann immer aber x keine ganze positive Zahl ist, wird das Produkt, was wir mit dem Charakter $\Pi : x$ bezeichnen, eine unerklärbare Funktion von x sein, wenn nicht zufälliug die Faktoren A, B, C, D etc, so beschaffen waren, dass die vorhergehenden von den vorausgehenden aufgehoben werden, wie es beispielsweise bei dieser Form passiert

$$\Pi : x = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \cdots \cdot \frac{x}{x+1},$$

weil ja hier offenbar ist

$$\Pi : x = \frac{1}{x+1},$$

oder auch in diesem Beispiel

$$\Pi : x = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{24}{25} \cdot \cdots \cdot \frac{xx+2x}{(x+1)^2}.$$

Daher wird nämlich sein

$$\Pi : 1 = \frac{3}{2 \cdot 2}, \quad \Pi : 2 = \frac{2}{3} = \frac{4}{2 \cdot 3}, \quad \Pi : 3 = \frac{5}{8} = \frac{5}{2 \cdot 4}, \quad \Pi : 4 = \frac{3}{5} = \frac{6}{2 \cdot 5},$$
$$\Pi : 5 = \frac{7}{2 \cdot 6} \quad \text{etc.},$$

woher es klar zu tage tritt, dass im Allgemeinen sein wird

$$\Pi : x = \frac{x+2}{2(x+1)}.$$

§3 Aber die unerklärbaren Fälle werden durch Logarithmieren auf die vorhergehende Dissertation zurückgeführt werden. Es wird nämlich sein

$$\log \Pi : x = \log A + \log B + \log C + \ldots + \log X,$$

welche Form uns mit der oben behandelten Form verglichen die folgenden Werte geben wird

$$\Sigma : x = \log \Pi : x,$$
$$(1) = \log A, \quad (2) = \log B, \quad (3) = \log C \quad \text{etc.} \quad \text{und} \quad (x) = \log X;$$

dann wird aber sein

$$(x+1) = \log X', \quad (x+2) = \log X'' \quad \text{etc.};$$

und nachdem diese Übereinstimmung bemerkt worden ist, wollen wie die oben behandelten Gattungen an den gegenwärtigen Fall anpassen.

Die erste Gattung, wo die Logarithmen der infinitesimalen Faktoren verschwinden oder wo die infinitesimalen Faktoren der Einheit gleich werden

§4 Weil wir also für diese erste Gattung nach Einführen der gerade gegebenen Werte haben

$$\log \Pi : x =$$

$$\begin{aligned} &+\log A \ +\log B \ +\log C \ +\log D \ +\text{etc.} \\ &-\log X' -\log X'' -\log X''' -\log X^{\mathrm{IV}} -\text{etc.}, \end{aligned}$$

wird durch Delogarithmieren sein

$$\Pi : x = \frac{A}{X'} \cdot \frac{B}{X''} \cdot \frac{C}{X'''} \cdot \frac{D}{X''''} \cdot \text{etc.}$$

Hier füge ich keine Beispiele hinzu, weil schon viele in *Calculi Differentialis* entwickelt worden sind.

Die zweite Gattung, wo die infinitesimalen Terme einander gleich werden

§5 Dann werden nämlich auch deren Logarithmen einander gleich sein und daher werden alle ersten Differenzen verschwinden. Hierauf wollen wir also die oben in § 25 gefundene Formel anwenden und es wird sein

$$\log \Pi : x =$$

$$\begin{array}{rlllll} & +\,(1-x)\log A & +\,(1-x)\log B & +\,(1-x)\log C & +\,\text{etc.} \\ +\,x\log A & +\quad x \quad \log B & +\quad x \quad \log C & +\quad x \quad \log D & +\,\text{etc.} \\ & -\qquad \log X' & -\qquad \log X'' & -\qquad \log X''' & -\,\text{etc.,} \end{array}$$

woher wir durch Delogarithmieren haben werden

$$\Pi : x = A^x \cdot \frac{A^{1-x} \cdot B^x}{X'} \cdot \frac{B^{1-x} \cdot C^x}{X''} \cdot \frac{C^{1-x} \cdot D^x}{X'''} \cdot \text{etc.}$$

Die dritte Gattung, wo die infinitesimalen Terme eine geometrische Progression festlegen

§6 Dann werden nämlich die Logarithmen dieser Terme eine arithmetische Progression festlegen, deren zweite Differenzen also verschwinden werden. Um also den oben in § 35 gefundenen Ausdruck auf diesen Fall anzuwenden, ist es anzumerken, dass der Kürze wegen festgelegt worden ist

$$p = \frac{xx - 3x + 2}{2}, \quad q = xx - 2x \quad \text{und} \quad r = \frac{xx - x}{2},$$

woher wir haben werden

$$\log \Pi : x =$$

$$\begin{aligned}
&+ p \log A + p \log B + p \log C + \text{etc.} \\
+ \frac{3x - xx}{2} \log A &- q \log B - q \log C - q \log D - \text{etc.} \\
+ \frac{xx - x}{2} \log B &+ r \log C + r \log D + r \log E + \text{etc.} \\
&- \log X' - \log X'' - \log X''' - \text{etc.}
\end{aligned}$$

Wir wollen aber hier weiter der Kürze wegen festlegen

$$\frac{xx - 3x}{2} = m \quad \text{und} \quad \frac{xx - x}{2} = n;$$

und durch Delogarithmieren werden wir diesen Ausdruck haben

$$\Pi : x = \frac{B^n}{A^m} \cdot \frac{A^p C^r}{B^q X'} \cdot \frac{B^p D^r}{C^q X''} \cdot \frac{C^p E^r}{D^q X'''} \cdot \text{etc.}$$

§7 Ich bin mir sicher, auf diese Weise die Lehre über unerklärbare Funktionen, die in *Calculi Differentialis* nicht hinreichend genau und erhellend dargestellt worden ist, fast vollkommen erschöpft zu haben, so dass nichts Weiteres verlangt werden kann; dies schien umso mehr notwendig, weil dieser Gegenstand gänzlich neu und von noch niemandem behandeln worden ist. Aber besonders groß ist sein Nutzen bei der Interpolation von Reihen und daher waren sogar die Beschaffenheiten von gekrümmten Linien, deren Ordinaten durch unerklärbare Funktionen ausgedrückt werden, ausfindig zu machen.