Über die Summation von Reihen, in denen die Vorzeichen der Terme alternieren *

Leonhard Euler

Nachdem ich einst ergründet hatte, auf welche Weise aus dem gegebenen Term einer jeden Reihe ihre Summe bestimmt werden kann, bereite der Fall, in welchem die Terme der Reihe mit alternierenden Vorzeichen $+$ und $-$ behaftet sind, nicht geringe Schwierigkeiten, und erst nach langen Um- und Irrwegen ist es mir möglich gewesen, zu hinreichend einfachen Formeln zu gelangen. Nachdem ich also diese Sache genauer betrachtet hatte, habe ich eine Art entdeckt, welche direkt zu diesen Formeln führt; diese habe ich also beschlossen, an dieser Stelle darzustellen, weil es ja passend scheint, diesen Teil der Analysis weiter zu vervollkommnen.

Problem I

Es sei X irgendeine Funktion von x, die, während anstelle von x nacheinander die Werte $x+1$, $x+2$, $x+3$ etc. geschrieben werden, diese Werte X', X'', X''' etc. annimmt, und es sei diese unendliche Reihe vorgelegt $X - X' - X'' - X''' + X''''-$etc. bis ins Unendliche $= S$; ihre Summe S ausfindig zu machen.

*Originaltitel: "De summatione serierum in quibus terminorum signa alternantur", erstmals publiziert in „*Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 2, 1788, pp. 46-69", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 16,1, pp. 47 - 78 ", Eneström-Nummer E617, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

Lösung

§1 Weil also S auch eine gewisse Funktion von x ist, gehe sie in S' über, wenn $x+1$ anstelle von x geschrieben wird, und es ist offenbar, dass gelten wird

$$S' = X' - X'' + X''' - X'''' + X''''' - \text{etc. bis ins Unendliche;}$$

wenn zu dieser Reihe also die vorgelegte hinzuaddiert wird, wird diese Gleichung $S + S' = X$ entspringen, aus welcher der Wert der gesuchten Funktion S ausfindig gemacht werden muss.

§2 Weil ja also die Funktion S' aus der Funktion S entsprießt, während $x+1$ anstelle von x geschrieben wird, wird aus der Natur der Differentiale

$$S' = S + \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial\partial S}{2\partial x^2} + \frac{\partial^3 S}{6\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{24\partial x^4} + \frac{\partial^5 S}{120\partial x^5} + \text{etc.}$$

sein, woher es uns vorgelegt wird, diese Gleichung aufzulösen

$$2S + \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial\partial S}{2\partial x^2} + \frac{\partial^3 S}{6\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{24\partial x^4} + \text{etc.} = X,$$

wo es offensichtlich ist, dass der Wert von S durch eine unendliche Reihe ausgedrückt werden wird, deren erster Term $\frac{1}{2}X$ ist, die Reihe selbst aber eine Form von dieser Art haben wird

$$S = \frac{1}{2}X + \frac{\alpha\partial X}{\partial x} + \frac{\beta\partial\partial X}{\partial x^2} + \frac{\gamma\partial^3 X}{\partial x^3} + \frac{\delta\partial X}{\partial x^4} + \text{etc.}$$

§3 Wir wollen also diese Reihe in unserer Gleichung einsetzen, und für ihre einzelnen Teile wir es sich verhalten wie folgt:

$$\begin{array}{lllllllll}
2S & = X + \dfrac{2\alpha\partial X}{\partial x} & + \dfrac{2\beta\partial\partial X}{\partial x^2} & + \dfrac{2\gamma\partial^3 X}{\partial x^3} & + \dfrac{2\gamma\partial^4 X}{\partial x^4} & + \dfrac{2\varepsilon\partial^5 X}{\partial x^5} & + \dfrac{2\zeta\partial^6 X}{\partial x^6} & + \text{etc.,} \\
\dfrac{\partial S}{\partial x} & = \quad + \dfrac{1}{2} & + \alpha & + \beta & + \gamma & + \delta & + \varepsilon & + \text{etc.,} \\
\dfrac{\partial\partial S}{2\partial x^2} & = & + \dfrac{1}{4} & + \dfrac{1}{2}\alpha & + \dfrac{1}{2}\beta & + \dfrac{1}{2}\gamma & + \dfrac{1}{2}\delta & + \text{etc.,} \\
\dfrac{\partial^3 S}{6\partial x^3} & = & & + \dfrac{1}{12} & + \dfrac{1}{6}\alpha & + \dfrac{1}{6}\beta & + \dfrac{1}{6}\delta & + \text{etc.,} \\
\dfrac{\partial^4 S}{24\partial x^4} & = & & & + \dfrac{1}{48} & + \dfrac{1}{24}\alpha & + \dfrac{1}{24}\beta & + \text{etc.,} \\
\dfrac{\partial^5 S}{120\partial x^5} & = & & & & + \dfrac{1}{240} & + \dfrac{1}{120}\alpha & + \text{etc.,} \\
\dfrac{\partial^6 S}{120\partial x^6} & = & & & & & + \dfrac{1}{1440} & + \text{etc.}
\end{array}$$

$$\text{etc.;}$$

weil die Summe dieser Reihen der Funktion X gleich werden muss, werden daher die folgenden Gleichheiten entspringen:

$$2\alpha + \frac{1}{2} = 0,$$

$$2\beta + \alpha + \frac{1}{4} = 0,$$

$$2\gamma + \beta + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{12} = 0,$$

$$2\delta + \gamma + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{48} = 0,$$

$$2\varepsilon + \delta + \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{6}\beta + \frac{1}{24}\alpha + \frac{1}{240} \quad = 0,$$

$$2\zeta + \varepsilon + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{6}\gamma + \frac{1}{24}\beta + \frac{1}{120}\alpha + \frac{1}{1440} = 0$$

etc.

§4 Obwohl diese Formeln schon ausreichen, um die Werte der Buchstaben α, β, γ, δ etc. zu bestimmen, würde diese Arbeit dennoch wegen der immer mehr zu einem zusammenzufassenden Brüchen zu aufwendig werden, besonders aber, weil ja, wie wir bald sehen werden, alle zweiten dieser Buchstaben von selbst verschwinden; deswegen wird es passend sein einen anderen Weg zu beschreiten, die wahren Werte dieser Buchstaben bequemer zu bestimmen, welcher darin besteht, dass wir die Summation der folgenden Reihe entwickeln:

$$s = \frac{1}{2} + \alpha t + \beta tt + \gamma t^3 + \delta t^4 + \text{etc.}$$

Wenn wir daher nämlich die Summe dieser Reihe s angeben konnten, wird es aus ihr umgekehrt auch möglich sein, die Werte der einzelnen Koeffizienten α, β, γ, δ etc. ausfindig zu machen; dort sei es sittsam angemerkt, dass die Koeffizienten vollkommen mit denen übereinstimmen, die in die vorhergehende Gleichung eingehen.

§5 Nachdem diese Reihe nun festgelegt worden ist, wollen wir aus den zwischen den Buchstaben α, β, γ, δ etc. gefundenen Relationen die folgenden Reihen bilden:

$$\begin{array}{lllllllllll}
2s & = 1 + 2\alpha t & + 2\beta t^2 & + 2\gamma t^3 & + 2\delta\ t^4 & + 2\varepsilon\ \ t^5 & + 2\zeta\ \ \ t^6 & + 2\eta\ \ \ t^7 & + 2\theta\ \ \ t^8 & + \text{etc.}; \\
st & = \ +\frac{1}{2} & +\alpha & +\beta & +\gamma & +\delta & +\varepsilon & +\zeta & +\eta & + \text{etc.}; \\
\frac{1}{2}stt & = & +\frac{1}{4} & +\frac{1}{2}\alpha & +\frac{1}{2}\beta & +\frac{1}{2}\gamma & +\frac{1}{2}\delta & +\frac{1}{2}\varepsilon & +\frac{1}{2}\zeta & + \text{etc.}; \\
\frac{1}{6}st^3 & = & & +\frac{1}{12} & +\frac{1}{6}\alpha & +\frac{1}{6}\beta & +\frac{1}{6}\gamma & +\frac{1}{6}\delta & +\frac{1}{6}\varepsilon & + \text{etc.}; \\
\frac{1}{24}st^4 & = & & & +\frac{1}{48} & +\frac{1}{24}\alpha & +\frac{1}{24}\beta & +\frac{1}{24}\gamma & +\frac{1}{24}\delta & + \text{etc.}; \\
\frac{1}{120}st^5 & = & & & & +\frac{1}{240} & +\frac{1}{120}\alpha & +\frac{1}{120}\beta & +\frac{1}{120}\gamma & + \text{etc.}; \\
\frac{1}{720}st^6 & = & & & & & +\frac{1}{1440} & +\frac{1}{720}\alpha & +\frac{1}{720}\beta & + \text{etc.}; \\
& & & & & \text{etc.} & & & &
\end{array}$$

Diese Reihen werden also zu einer Summe gesammelt wegen der oben in §3 angegebenen Relationen diese Gleichung liefern

$$\left(2 + t + \frac{1}{2}tt + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{120}t^5 + \frac{1}{720}t^6 + \text{etc.}\right) = 1.$$

§6 Weil also, während e die Zahl bezeichnet, deren hyperbolischer Logarithmus $= 1$ ist,

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}tt + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + \text{etc.}$$

ist, ist es ersichtlich, dass die gefundene Form auf diese endliche Gleichung reduziert wird

$$s(1 + e^t) = 1;$$

daher geht die ganze Aufgabe darauf zurück, dass der Wert des Buchstaben

s durch eine Reihe ausgedrückt wird, deren einzelne Terme nach den Potenzen des Buchstabens t fortschreiten; dann ist es nämlich notwendig, dass die Koeffizienten dieser Reihe mit den oben angenommenen α, β, γ, δ etc. übereinstimmen. Deswegen werden wir unsere Anstrengungen darauf zu verwenden haben, zu ergründen, wie wir diese Gleichung $s(1+e^t)=1$ am besten in eine unendliche Reihe umwandeln.

§7 Vor Allem wollen wir daher diese Gleichung von der Exponentialgröße e^t befreien und weil

$$e^t = \frac{1}{s} - 1$$

ist, wird

$$t = \log \frac{1-s}{s}$$

sein und daher durch Differenzieren auch

$$\partial t = \frac{-\partial s}{s(1-s)}.$$

Wir wollen hier festlegen

$$s = \frac{1}{2} + v$$

und diese Gleichung wird werden

$$\partial t = \frac{-\partial v}{(\frac{1}{2}+v)(\frac{1}{2}-v)} = \frac{+\partial v}{xx - \frac{1}{4}}.$$

Nun wird aber v dieser Reihe gleich werden

$$\alpha t + \beta tt + \gamma t^3 + \delta t^4 + \text{etc.},$$

deren Koeffizienten wir suchen.

§8 Wir wollen der gefundenen Gleichung diese Form zuteilen

$$vv - \frac{1}{4} = \frac{\partial v}{\partial t},$$

aus welcher leicht eingesehen wird, weil der erste Term der für v ausfindig zu machenden Reihe αt sein muss, dass die folgenden Terme nur durch die ungeraden Potenzen von t hindurch ansteigen werden; deswegen wollen wir für v die folgende Reihe festlegen

$$v = At + Bt^3 + Ct^5 + Dt^7 + Et^9 + \text{etc.}$$

und es wird daher sein

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A + 3tt + 5Ct^4 + 7Dt^6 + 9Et^8 + 11Ft^{10} + 13Gt^{12} + \text{etc.};$$

für den linken Teil unserer Gleichung wird hingegen sein

$$\begin{array}{lllllll} vv - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + AAtt & + 2ABt^4 & + 2ACt^6 & + 2ADt^8 & + 2AEt^{10} & + 2AFt^{12} & + \text{etc.} \\ & & + \ BB & + 2BC & + 2BD & + 2BE & \\ & & & & + \ CC & + 2CD & \end{array}$$

etc.,

aus der Gleichheit welcher Reihen sofort gefolgert wird, dass gelten wird

$$A = -\frac{1}{4} = \alpha;$$

dann werden hingegen die übrigen Terme diese Relationen liefern

$$\begin{aligned}
3B &= AA,\\
5C &= 2AB,\\
7D &= 2AC + BB,\\
9E &= 2AD + 2BC,\\
11F &= 2AE + 2BD + CC,\\
13G &= 2AF + 2BE + 2CD
\end{aligned}$$

etc.,

woher es klar zu tage tritt, weil der Wert von A negativ $= -\frac{1}{4}$ ist, dass die Werte der übrigen abwechselnd positiv und negativ sein werden.

§9 Nachdem nun diese Reihe mit der zuerst gefundenen verglichen worden ist, wird erschlossen, dass sein wird

$$\alpha = A, \quad \beta = 0, \quad \gamma = B, \quad \delta = 0, \quad \varepsilon = C, \quad \zeta = 0, \quad \eta = D \quad \text{etc.},$$

so dass alle zweiten griechischen Buchstaben von selbst verschwinden, wie wir schon oben angedeutet haben, die Bestimmung der übrigen hingegen durch diese neuen Formeln um Vieles leichter und schneller erledigt wird als durch die anfangs gefundenen Relationen. Zuvor musste nämlich beispielsweise der

Wert ε durch fünf Brüche hindurch berechnet werden, während nun der jenem gleiche Buchstabe C mit einem einzigen Glied ausgedrückt wird. Nachdem also diese neuen Buchstaben A, B, C, D etc. eingeführt worden sind, wird die Summation der vorgelegten Reihe so ausgedrückt werden, dass gilt

$$S = \frac{1}{2}X + \frac{A\partial X}{\partial x} + \frac{B\partial^3 X}{\partial x^3} + \frac{C\partial^5 X}{\partial x^5} + \frac{D\partial^7 X}{\partial x^7} + \text{etc.}$$

§10 Um aber die Untersuchung dieser Buchstaben A, B, C, D einfacher zu machen, weil ja $A = -\frac{1}{4}$ ist und alle folgenden Buchstaben abwechselnd positiv und negativ werden, wollen wir erneut neue Buchstaben in die Rechnung einführen, indem wir festlegen

$$A = -\frac{\mathfrak{A}}{4}, \quad C = +\frac{\mathfrak{B}}{4^2}, \quad C = -\frac{\mathfrak{C}}{4^3}, \quad D = +\frac{\mathfrak{D}}{4^4}, \quad E = -\frac{\mathfrak{E}}{4^5} \quad \text{etc.}$$

und nun werden sich die Bestimmungen dieser neuen Buchstaben auf die folgende Weise verhalten:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= 1, & \mathfrak{E} &= \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{D} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{9}, \\
\mathfrak{B} &= \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{A}}{3}, & \mathfrak{F} &= \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{E} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{D} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}}{11}, \\
\mathfrak{C} &= \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{5}, & \mathfrak{G} &= \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{F} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{E} + 2\mathfrak{C}\mathfrak{D}}{13}, \\
\mathfrak{D} &= \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{B}}{7}, & \mathfrak{H} &= \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{G} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{F} + \mathfrak{C}\mathfrak{E} + \mathfrak{D}\mathfrak{D}}{15}
\end{aligned}$$

$$\text{etc.};$$

und aus diesen Buchstaben wird sich unsere Summation so verhalten:

$$S=\frac{1}{2}X-\frac{\mathfrak{A}\partial X}{4\partial x}+\frac{\mathfrak{B}\partial^3 X}{4^2\partial x^3}-\frac{\mathfrak{C}\partial^5 X}{4^3\partial x^5}+\frac{\mathfrak{D}\partial^7 X}{4^4\partial x^7}-\text{etc.}$$

§11 Die Werte dieser Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. wollen wir also numerisch entwickeln und nach Erledigung der nicht sehr aufwendigen Rechnung werden wir die folgenden Werte auffinden:

$$\mathfrak{A}=1,\quad \mathfrak{B}=\frac{1}{3},\quad \mathfrak{C}=\frac{2}{3\cdot 5},\quad \mathfrak{D}=\frac{17}{3^2\cdot 5\cdot 7},\quad \mathfrak{E}=\frac{62}{3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 9},$$

$$\mathfrak{F}=\frac{1382}{3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11},\quad \mathfrak{G}=\frac{21844}{3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13}\quad \text{etc.}$$

Dort kann einen der Zähler des vorletzten Termes, $1382=2\cdot 691$, darauf bringen, dass diese Zahlen in einem engen Zusammenhang mit den so genannten Bernoulli'schen Zahlen stehen.

§12 Wir wollen also diese Bernoulli'schen Zahlen mit den Buchstaben a, b, c, d etc. anzeigen, so dass ist

$$a=1,\quad b=\frac{1}{3},\quad c=\frac{1}{3},\quad d=\frac{3}{5},\quad e=\frac{5}{3},\quad f=\frac{691}{105},\quad g=\frac{35}{1},\quad h=\frac{3617}{15}\quad \text{etc.},$$

so wie ich diese Zahlen in meiner *Introductio in Analysin infinitorum* auf Seite 131 dargeboten habe; und nach einer kurzen Untersuchung werden die Werte unserer Buchstaben auf die folgende Weise ausgedrückt werden können:

$$\mathfrak{A} = \frac{2^1(2^2-1)}{2\cdot 3}\cdot a, \qquad \mathfrak{F} = \frac{2^{11}(2^{12}-1)}{2\cdot 3\cdots 13}\cdot f,$$
$$\mathfrak{B} = \frac{2^3(2^4-1)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot b, \qquad \mathfrak{G} = \frac{2^{13}(2^{14}-1)}{2\cdot 3\cdots 15}\cdot g,$$
$$\mathfrak{C} = \frac{2^5(2^6-1)}{2\cdot 3\cdots 7}\cdot c, \qquad \mathfrak{H} = \frac{2^{15}(2^{16}-1)}{2\cdot 3\cdots 17}\cdot h,$$
$$\mathfrak{D} = \frac{2^7(2^8-1)}{2\cdot 3\cdots 9}\cdot d, \qquad \mathfrak{I} = \frac{2^{17}(2^{18}-1)}{2\cdot 3\cdots 19}\cdot i,$$
$$\mathfrak{E} = \frac{2^9(2^{10}-1)}{2\cdot 3\cdots 11}\cdot e, \qquad \mathfrak{K} = \frac{2^{19}(2^{20}-1)}{2\cdot 3\cdots 21}\cdot k$$

etc.

§13 Für die, denen es nicht gefällt, diese Bernoulli'schen Zahlen aus meiner *Introductio* zu entnehmen, möchte ich sie hier, so weit wie ich sie freilich errechnet habe, beifügen.

$$a = 1, \qquad i = \frac{43867}{21},$$
$$b = \frac{1}{3}, \qquad k = \frac{1222277}{55},$$
$$c = \frac{1}{3}, \qquad l = \frac{854513}{3},$$
$$d = \frac{3}{5}, \qquad m = \frac{1181820455}{273},$$
$$e = \frac{5}{3}, \qquad n = \frac{76977927}{1},$$
$$f = \frac{691}{105}, \qquad o = \frac{23749461029}{15},$$

$$g = \frac{35}{1}, \qquad p = \frac{8615841276005}{231},$$
$$h = \frac{3617}{15}, \qquad q = \frac{84802531453387}{85},$$
$$r = \frac{90219075042845}{3}.$$

§14 Nachdem also diese BERNOULLI'schen Zahlen zur Hilfe genommen worden sind, wird die Summe unserer vorgelegten Reihe

$$S = X - X' + X'' - X''' + X'''' - \text{etc. bis ins Unendliche}$$

auf die folgende Weise ausgedrückt werden

$$S = \frac{1}{2}X - \frac{(2^2-1)}{2 \cdot 3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{(2^4-1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{\partial^3 X}{\partial x^3} - \frac{(2^6-1)}{2 \cdot 3 \cdots 7} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{\partial^5 X}{\partial x^5}$$

$$+ \frac{(2^8-1)}{2 \cdot 3 \cdots 9} \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{\partial^7 X}{\partial x^7} + \frac{(2^{10}-1)}{2 \cdot 3 \cdots 11} \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{\partial^9 X}{\partial x^9} - \frac{(2^{12}-1)}{2 \cdot 3 \cdots 13} \cdot \frac{f}{2} \cdot \frac{\partial^{11} X}{\partial x^{11}} - \text{etc.}$$

und so haben wir unserem Problem vollkommen Genüge geleistet.

EINE ANDERE LÖSUNG DES VORGELEGTEN PROBLEMS

§15 Weil die gesuchte Summe S eine Funktion von x ist, gehe sie in T über, wenn $x + \frac{1}{2}$ anstelle von x geschrieben wird; und umgekehrt wird aus dieser Funktion T die Summe S erhalten werden, wenn $x - \frac{1}{2}$ anstelle von x geschrieben wird, so dass, wann immer wir den Wert des Buchstaben T gefunden haben, aus ihm auch die gesuchte Summe S selbst bekannt wird. Dann ist es aber offenbar, wenn in dieser Funktion T $x + \frac{1}{2}$ anstelle von x geschrieben wird, dass dann der Wert des Buchstaben S' hervorgehen wird. Daher werden wir also aus der Natur der Differentiale haben

$$\begin{aligned} S &= T - \frac{\partial T}{2\cdot\partial x} + \frac{\partial\partial T}{4\cdot 2\cdot\partial x^2} - \frac{\partial^3 T}{8\cdot 6\cdot\partial x^3} + \frac{\partial^4 T}{16\cdot 24\cdot\partial x^4} - \text{etc.},\\ S' &= T + \frac{\partial T}{2\cdot\partial x} + \frac{\partial\partial T}{4\cdot 2\cdot\partial x^2} + \frac{\partial^3 T}{8\cdot 6\cdot\partial x^3} + \frac{\partial^4 T}{16\cdot 24\cdot\partial x^4} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Daher, weil die Lösung des vorhergehenden Problems in dieser Gleichung $S + S' = X$ enthalten ist, wird nach Einsetzen dieser Werte diese Gleichung ans Licht treten:

$$T + \frac{\partial\partial T}{4\cdot 2\cdot\partial x^2} + \frac{\partial^4 T}{16\cdot 24\cdot\partial x^4} + \frac{\partial^6 T}{64\cdot 720\cdot\partial x^6} + \text{etc.} = \frac{1}{2}X.$$

§16 Daher ist es offenbar, dass der für T anzunehmenden Reihe diese Form zugeteilt werden muss

$$T = \frac{1}{2}X + \frac{\alpha\partial\partial X}{\partial x^2} + \frac{\beta\partial^4 X}{\partial x^4} + \frac{\gamma\partial^6 X}{\partial x^6} + \text{etc.};$$

nachdem also dieser Wert in unsere Gleichung eingeführt worden ist, werden wir haben

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}X + \alpha\frac{\partial\partial X}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^4 X}{\partial x^4} + \gamma\frac{\partial^6 X}{\partial x^6} + \delta\frac{\partial^8 X}{\partial x^8} + \varepsilon\frac{\partial^{10} X}{\partial x^{10}} + \zeta\frac{\partial^{12} X}{\partial x^{12}} + \text{etc.}\\ \frac{\partial\partial T}{4\cdot 2\partial x^2} &= \quad \frac{1}{2\cdot 4\cdot 2} \quad + \frac{\alpha}{4\cdot 2} + \frac{\beta}{4\cdot 2} + \frac{\gamma}{4\cdot 2} + \frac{\delta}{4\cdot 2} + \frac{\varepsilon}{4\cdot 2} + \text{etc.} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^4 T}{16\cdot 24\partial x^4} = +\frac{1}{2\cdot 16\cdot 24}+\frac{\alpha}{16\cdot 24}+\frac{\beta}{16\cdot 24}+\frac{\gamma}{16\cdot 24}+\frac{\delta}{16\cdot 24}+\text{etc.}$$

$$\frac{\partial^6 T}{64\cdot 720\partial x^6} = +\frac{1}{2\cdot 16\cdot 720}+\frac{\alpha}{64\cdot 720}+\frac{\beta}{64\cdot 720}+\frac{\gamma}{64\cdot 720}+\text{etc.}$$

etc.

Weil also die Summe dieser Reihen $\frac{1}{2}X$ gleich werden muss, werden daher die folgenden Bestimmungen entsprießen:

$$\alpha+\frac{1}{2\cdot 4\cdot 2}=0,$$

$$\beta+\frac{\alpha}{4\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 16\cdot 24}=0,$$

$$\gamma+\frac{\beta}{4\cdot 2}+\frac{\alpha}{16\cdot 24}+\frac{1}{2\cdot 64\cdot 720}=0,$$

$$\delta+\frac{\gamma}{2^2\cdot 1\cdot 2}+\frac{\beta}{2^4\cdot 1\cdots 4}+\frac{1}{2^6\cdot 1\cdots 6}+\frac{1}{2\cdot 256\cdot 40320}=0,$$

$$\varepsilon+\frac{\delta}{2^2\cdot 1\cdot 2}+\frac{\gamma}{2^4\cdot 1\cdots 4}+\frac{\alpha}{2^6\cdot 1\cdots 6}+\frac{\alpha}{2^8\cdot 1\cdots 6}+\frac{1}{2\cdot 2^{10}\cdot 1\cdots 10}=0$$

etc.

§17 Obwohl es nicht schwer wäre, daraus die Werte α, β, γ, δ etc. zu finden, weil ja hervorginge

$$\alpha=-\frac{1}{16} \quad \text{und} \quad \beta=\frac{5}{768} \quad \text{etc.,}$$

wollen wir dennoch auf die gleiche Weise wie wir es oben getan haben nach einem anderen Gesetz suchen, nach welchem diese Werte fortschreiten. Für dieses Ziel wollen wir festlegen

$$s = \frac{1}{2} + \alpha tt + \beta t^4 + \gamma t^6 + \delta t^8 + \varepsilon t^{10} + \text{etc.},$$

woher wir die folgenden Reihen bilden:

$$\begin{array}{llllllllll}
s = \frac{1}{2} & + \alpha tt & + \beta t^4 & + \gamma t^6 & + \delta t^8 & + \varepsilon t^{10} & + \zeta t^{12} & + \eta t^{14} & + \ldots, \\
\frac{stt}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} = & \frac{1}{2 \cdot 2^2 \cdot 1 \cdot 2} & + \frac{\alpha}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} & + \frac{\beta}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} & + \frac{\gamma}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} & + \frac{\delta}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} & + \frac{\varepsilon}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} & + \frac{\zeta}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} & + \ldots, \\
\frac{st^4}{2^4 \cdot 1 \cdots 4} = & & + \frac{1}{2 \cdot 2^4 \cdot 1 \cdots 4} & + \frac{\alpha}{2^4 \cdot 1 \cdots 4} & + \frac{\beta}{2^4 \cdot 1 \cdots 4} & + \frac{\gamma}{2^4 \cdot 1 \cdots 4} & + \frac{\delta}{2^4 \cdot 1 \cdots 4} & + \frac{\varepsilon}{2^4 \cdot 1 \cdots 4} & + \ldots, \\
\frac{st^6}{2^6 \cdot 1 \cdots 6} = & & & + \frac{1}{2^6 \cdot 1 \cdots 6} & + \frac{\alpha}{2^6 \cdot 1 \cdots 6} & + \frac{\beta}{2^6 \cdot 1 \cdots 6} & + \frac{\gamma}{2^6 \cdot 1 \cdots 6} & + \frac{\delta}{2^6 \cdot 1 \cdots 6} & + \ldots,
\end{array}$$

etc.

Diese Reihen werden uns also zu einer Summe gesammelt wegen der oberen Bestimmungen der Buchstaben α, β, γ etc. diese Gleichung an die Hand geben:

$$s\left(1 + \frac{tt}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} + \frac{t^4}{2^4 \cdot 1 \cdots 4} + \frac{t^6}{2^6 \cdot 1 \cdots 6} + \right) = \frac{1}{2}.$$

Und so ist die ganze Aufgabe darauf reduziert worden, dass der Wert des Buchstaben s durch eine geeignete nach Potenzen von t fortschreitende Reihe ausgedrückt wird. So sei es nur angemerkt, dass für t gesetzt $s = \frac{1}{2}$ werden muss.

§18 Weil nun, während e die Zahl bezeichnet, deren hyperbolischer Logarithmus $= 1$ ist, gilt

$$e^{\frac{1}{2}t} = 1 + \frac{t}{2^1 \cdot 1} + \frac{tt}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} + \frac{t^3}{2^3 \cdot 1 \cdots 4} + \frac{t^5}{2^5 \cdot 1 \cdots 5} + \text{etc.}$$

und

$$e^{-\frac{1}{2}t} = 1 - \frac{t}{2^1 \cdot 1} + \frac{tt}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} - \frac{t^3}{2^3 \cdot 1 \cdots 4} - \frac{t^5}{2^5 \cdot 1 \cdots 5} + \text{etc.},$$

wird uns die Hälfte der Summe dieser zwei Reihen liefern

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}t} + e^{-\frac{1}{2}t}\right) = 1 + \frac{tt}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} + \frac{t^4}{2^4 \cdot 1 \cdots 4} + \frac{t^6}{2^6 \cdot 1 \cdots 6} + \text{etc.};$$

daher tritt es klar zu tage, dass unsere Gleichung diese sein wird

$$s\left(e^{\frac{1}{2}t} + e^{-\frac{1}{2}t}\right) = 1,$$

woher der Wert von s durch eine Reihe entwickelt werden muss.

§19 Aus dieser Gleichung leiten wir also sofort diese ab

$$e^{\frac{1}{2}t} + e^{-\frac{1}{2}t} = \frac{1}{s},$$

welche differenziert und zweimal genommen liefert

$$e^{\frac{1}{2}t} - e^{-\frac{1}{2}t} = -\frac{2\partial s}{ss\partial t},$$

die Summe welcher Gleichheiten gibt

$$2e^{\frac{1}{2}t} = \frac{1}{s} - \frac{2\partial s}{ss\partial t},$$

die Differenz gibt hingegen

$$e^{-\frac{1}{2}t} = \frac{1}{s} + \frac{2\partial s}{ss\partial t};$$

aber das Produkt von diesen gibt

$$4 = \frac{1}{ss} - \frac{4\partial s^2}{s^4\partial t^2}$$

oder

$$\frac{4\partial s^2}{\partial t^2} = ss - 4s^4.$$

Diese Gleichung werde nun erneut für konstantes ∂t differenziert und wir werden haben

$$\frac{4\partial\partial s}{\partial t^2} = s - 8s^3$$

oder

$$\frac{4\partial\partial s}{\partial t^2} + 8s^3 - s = 0.$$

§20 Für das Auflösen dieser Gleichung wollen wir, wie wir oben angenommen haben, festlegen als

$$s = \frac{1}{2} + \alpha tt + \beta t^4 + \gamma t^6 + \delta t^8 + \text{etc.},$$

woher wird

$$\frac{\partial\partial s}{\partial t^2} = 1\cdot 2\alpha + 3\cdot 4\beta tt + 5\cdot 6\gamma t^4 + 7\cdot 8\delta t^6 + 9\cdot 10\varepsilon t^8 + \text{etc.}$$

Des Weiteren wird wegen

$$2s = 1 + 2\alpha tt + 2\beta t^4 + 2\gamma t^6 + 2\delta t^8 + \text{etc.}$$

durch Nehmen des Kubus sein

$$\begin{aligned} 8s^3 = 1 + 6\alpha tt + 6\beta t^4 &+ 6\gamma t^6 + 6\delta t^8 + 6\varepsilon t^{10} + 6\zeta t^{12} + \text{etc.} \\ &+ 12\alpha^2 + 24\alpha\beta + 24\alpha\gamma + 24\alpha\delta + 24\alpha\varepsilon \\ &\qquad + 8\alpha^3 + 12\beta\beta + 24\beta\gamma + 24\beta\delta \\ &\qquad\qquad + 24\alpha\alpha\beta + 24\alpha\alpha\gamma + 12\gamma\gamma \\ &\qquad\qquad\qquad + 24\alpha\beta\beta + 24\alpha\alpha\delta \\ &\qquad\qquad\qquad + 48\alpha\beta\gamma \\ &\qquad\qquad\qquad + 48\alpha\beta\gamma \\ &\qquad\qquad\qquad + 8\beta^3 \end{aligned}$$

welche Reihe $s - \frac{4\partial\partial s}{\partial t^2}$ gleich sein muss.

§21 Diese Reihe muss also dieser gleich gesetzt werden

$$s - \frac{4\partial\partial s}{\partial t^2} =$$

$$\begin{aligned} &+\frac{1}{2} + \alpha tt + \beta t^4 + \gamma t^6 + \delta t^8 + \varepsilon t^{10} + \text{etc.} \\ &- 8\alpha - 4\cdot 3\cdot 4\beta - 4\cdot 5\cdot 6\gamma - 4\cdot 7\cdot 8\delta - 4\cdot 9\cdot 10\varepsilon - 4\cdot 11\cdot 12\zeta - \text{etc.} \end{aligned}$$

woher die folgenden Bestimmungen abgeleitet werden:

$$\begin{aligned}
&4\cdot 1\cdot \quad 2\alpha + \frac{1}{2} = 0,\\
&4\cdot 3\cdot \quad 4\beta + 5\alpha = 0,\\
&4\cdot 5\cdot \quad 6\gamma + 5\beta + 12\alpha^2 = 0,\\
&4\cdot 7\cdot \quad 8\delta + 5\gamma + 24\alpha\beta + 8\alpha^3 = 0,\\
&4\cdot 9\cdot 10\varepsilon + 5\delta + 24\alpha\gamma + 12\beta\beta + 24\alpha\alpha\beta = 0
\end{aligned}$$

etc.

§22 Weil ja aber diese Relationen um Vieles komplizierter sind als die, zu welchen wir zuerst geführt worden sind, wollen wir uns eher an diese halten und und wollen deren Entwicklung auf die folgende Weise erleichtern. Wir wollen natürlich festlegen

$$\alpha = -\frac{A}{2^3}, \quad \beta = +\frac{B}{2^5}, \quad \gamma = -\frac{C}{2^7}, \quad \delta = +\frac{D}{2^9}, \quad \varepsilon = -\frac{E}{2^{11}} \quad \text{etc.},$$

woher unsere Summation diese Form annehmen wird

$$T = \frac{1}{2}X - \frac{A}{2^3}\cdot\frac{\partial\partial X}{\partial x^2} + \frac{B}{2^5}\cdot\frac{\partial^4 X}{\partial x^4} - \frac{C}{2^7}\cdot\frac{\partial^6 X}{\partial x^6} + \frac{D}{2^9}\cdot\frac{\partial^8 X}{\partial x^8} - \text{etc.},$$

und die Relationen für diese neuen Buchstaben werden sich auf die folgende Weise verhalten:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{1\cdot 2},\\
B &= \frac{A}{1\cdot 2} - \frac{1}{1\cdot 2\cdots 4},\\
C &= \frac{B}{1\cdot 2} - \frac{A}{1\cdot 2\cdots 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdots 6},\\
D &= \frac{C}{1\cdot 2} - \frac{B}{1\cdot 2\cdots 4} + \frac{A}{1\cdot 2\cdots 6} - \frac{1}{1\cdot 2\cdots 8},\\
E &= \frac{D}{1\cdot 2} - \frac{C}{1\cdot 2\cdots 4} + \frac{B}{1\cdot 2\cdots 6} - \frac{A}{1\cdot 2\cdots 8} + \frac{1}{1\cdot 2\cdots 10}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

§23 Um die Berechnung dieser Buchstaben etwas mehr zusammenzufassen und die ganze Aufgabe sogar auf ganze Zahlen zurückzuführen, wollen wir weiter festlegen

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{a}{1\cdot 2},\\
B &= \frac{b}{1\cdot 2\cdots 4},\\
C &= \frac{c}{1\cdot 2\cdots 6}\\
&\text{etc.},
\end{aligned}
$$

dass unsere Summation wird

$$
T = \frac{1}{2}X - \frac{a}{2^3\cdot 1\cdot 2}\frac{\partial\partial X}{\partial x^2} + \frac{b}{2^5\cdot 1\cdots 4}\frac{\partial^4 X}{\partial x^4} - \frac{c}{2^7\cdot 1\cdots 6}\frac{\partial^6 X}{\partial x^6} + \text{etc.},
$$

und nun werden diese neuen Buchstaben sehr angenehm durch die folgenden

Formeln bestimmt werden:

$$a = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2}$$

oder $a = 1$;

$$b = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} a - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

oder $b = 6 \cdot a - 1 = 5$;

$$c = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} b - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a + \frac{6 \cdot 5 \cdots 1}{1 \cdot 2 \cdots 6}$$

oder $c = 15 \cdot b - 15 \cdot a + 1 = 61$;

$$d = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} c - \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a + \frac{8 \cdot 7 \cdots 3}{1 \cdot 2 \cdots 6} a - \frac{8 \cdot 7 \cdots 1}{1 \cdot 2 \cdots 8}$$

oder $d = 28 \cdot c - 70 \cdot b + 28 \cdot a - 1 = 1385$;

$$e = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} d - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} c + \frac{10 \cdot 9 \cdots 5}{1 \cdot 2 \cdots 6} b - \frac{10 \cdot 9 \cdots 3}{1 \cdot 2 \cdots 8} a + \frac{10 \cdot 9 \cdots 1}{1 \cdot 2 \cdots 10}$$

oder $e = 45 \cdot d - 210 \cdot c + 210 \cdot b - 45 \cdot a + 1 = 50521$;

$$f = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} e - \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d + \frac{12 \cdot 11 \cdots 7}{1 \cdot 2 \cdots 8} c - \frac{12 \cdot 11 \cdots 5}{1 \cdot 2 \cdots 8} b + \frac{12 \cdot 11 \cdots 3}{1 \cdot 2 \cdots 10} a - \frac{12 \cdot 11 \cdots 1}{1 \cdot 2 \cdots 12}$$

oder $f = 66 \cdot e - 495 \cdot d + 924 \cdot c - 495 \cdot b + 66 \cdot a - 1$;

etc.

Es ist aber offenbar, dass die Koeffizienten dieser Formeln mit denen übereinstimmen, die in den Potenzen des Binoms auftauchen, wenn nur alle zweiten weggelassen werden.

§24 Nachdem also die Werte dieser Buchstaben a, b, c, d etc. gefunden worden sind, wird die zuvor erwähnte Reihe den Wert des Buchstaben T geben, welcher in jeden Fall eine gewisse Funktion von x sein wird, aus welcher, wenn $x - \frac{1}{2}$ anstelle von x geschrieben wird, die Summe der vorgelegten Reihen S entspringen wird. Wie wenn beispielsweise $X = x^4$ war und diese zu summierende Reihe vorgelegt wird

$$S = x^4 - (x+1)^4 + (x+2)^4 - (x+3)^4 + (x+4)^4 - \text{etc.},$$

wird wegen

$$\frac{\partial \partial X}{\partial x^2} = 4 \cdot 3xx \quad \text{und} \quad \frac{\partial^4 X}{\partial x^4} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

und der anderen hingegen verschwindenden Differentiale sein

$$T = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{4}xx + \frac{5}{32}$$

und daher

$$S = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^4 - \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{32}.$$

Daher wird also nach Nehmen von $x = 1$, dass diese Reihe zu summieren ist

$$S = 1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + \text{etc.},$$

$S = 0$ aufgefunden werden, wie anderswoher bekannt ist. Andere Beispiele wollen wir nicht hinzufügen, weil sie schon einst umfassend behandelt worden sind.

PROBLEM II

Wenn X wie zuvor irgendeine Funktion von x war, aus welcher, während anstelle von x der Reihe nach die Werte $x+1$, $x+2$, $x+3$ etc. geschrieben werden, die Funktionen X', X'', X''' etc. entsprießen, die Summe dieser ins Unendliche laufenden Reihe zu finden

$$n^x X - n^{x+1}X' + n^{x+2}X'' - n^{x+3}X''' + n^{x+4}X'''' - \text{etc.}$$

LÖSUNG

§25 Die gesuchte Summe dieser Reihe werde $n^x S$ gesetzt, dass ist

$$S = X - nX' + n^2X'' - n^3X''' + n^4X'''' - \text{etc.}$$

Hier werde $x+1$ anstelle von x geschrieben und es wird aufgefunden werden

$$S' = X' - nX'' + n^2X''' - n^3X'''' + \text{etc.},$$

welche Reihe mit n multipliziert und zur ersten addiert liefert

$$S + nS' = X.$$

Daher, weil gilt

$$S' = S + \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial\partial S}{1 \cdot 2\partial x^2} + \frac{\partial^3 S}{1 \cdot 2 \cdot 3\partial x^3} + \text{etc.},$$

wird man diese Gleichung haben

$$(1+n)S + \frac{n\partial S}{\partial x} + \frac{n\partial\partial S}{2\partial x^2} + \frac{n\partial^3 S}{6\partial x^3} + \frac{n\partial^4 S}{24\partial x^4} + \text{etc.} = X,$$

aus welcher der Wert von S gefunden werden muss.

§26 Wir wollen also für S diese Reihe festlegen

$$S = \alpha X + \frac{\beta\partial X}{\partial x} + \frac{\gamma\partial\partial X}{\partial x^2} + \frac{\delta\partial^3 X}{\partial x^3} + \text{etc.}$$

und nach den einzelnen Substitutionen werden erhalten

$$\begin{array}{llllllll}
(1+n)S & = (1+n)\alpha X & + (1+n)\dfrac{\beta\partial X}{\partial x} & + (1+n)\dfrac{\gamma\partial\partial X}{\partial x^2} & + (1+n)\dfrac{\delta\partial^3 X}{\partial x^3} & + (1+n)\dfrac{\varepsilon\partial^4 X}{\partial x^4} & + \text{etc.,} \\
\dfrac{n\partial S}{\partial x} & = & + n\alpha & + n\beta & + n\gamma & + n\delta & + \text{etc.,} \\
\dfrac{n\partial\partial S}{2\partial x^2} & = & & + \dfrac{1}{2}n\alpha & + \dfrac{1}{2}n\beta & + \dfrac{1}{2}\gamma & + \text{etc.,} \\
\dfrac{n\partial^3 S}{6\partial x^3} & = & & & + \dfrac{1}{6}n\alpha & + \dfrac{1}{6}\beta & + \text{etc.,} \\
\dfrac{n\partial^4 S}{24\partial x^4} & = & & & & + \dfrac{1}{24}\alpha & + \text{etc.}
\end{array}$$

etc.;

weil die Summe dieser Reihen X gleich sein muss, werden daher die folgenden Bestimmungen resultieren:

$$\begin{aligned}
(n+1)\alpha &= 1,\\
(n+1)\beta + n\alpha &= 0,\\
(n+1)\gamma + n\beta + \frac{1}{2}n\alpha &= 0,\\
(n+1)\delta + n\gamma + \frac{1}{2}n\beta + \frac{1}{6}n\alpha &= 0,\\
(n+1)\varepsilon + n\delta + \frac{1}{2}n\gamma + \frac{1}{6}n\beta + \frac{1}{24}n\alpha &= 0
\end{aligned}$$

etc.

§27 Die Auflösung dieser Gleichheiten wird uns die folgenden Werte an die Hand geben:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{n+1},\\
\beta &= -\frac{n}{(n+1)^2},\\
\gamma &= \frac{n(n-1)}{2(n+1)^3},\\
\delta &= -\frac{n(nn-4n+1)}{6(n+1)^4}
\end{aligned}$$

etc.

Es wäre aber allzu aufwändig, die Entwicklung dieser Formeln weiter zu verfolgen; deswegen wird es zuträglich sein, anstelle dieser Koeffizienten andere in die Rechnung einzuführen, welche seien

$$\alpha = \frac{A}{n+1}, \quad \beta = -\frac{B}{(n+1)^2} \quad \gamma = +\frac{C}{(n+1)^3}, \quad \delta = -\frac{D}{(n+1)^4} \quad \text{etc.},$$

so dass unsere für S gefundene Reihe diese Form annimmt

$$S = \frac{A}{(n+1)}X - \frac{B}{(n+1)^2}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{C}{(n+1)}\frac{\partial\partial X}{\partial x^2} - \frac{D}{(n+1)^4}\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} + \text{etc.}$$

§28 Nun werden also diese neuen Buchstaben A, B, C, D etc. durch die folgenden Formeln bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
A &= 1, \\
B &= nA, \\
C &= nB - \frac{1}{2}n(n+1)A, \\
D &= nC - \frac{1}{2}n(n+1)B + \frac{1}{6}n(n+1)^2A, \\
E &= nD - \frac{1}{2}n(n+1)C + \frac{1}{6}n(n+1)^2B - \frac{1}{24}n(n+1)^3A \\
&\qquad \text{etc.},
\end{aligned}$$

woher nun leichter die folgenden Werte erschlossen werden werden:

$$\begin{aligned}
A &= 1, \\
B &= n, \\
C &= \frac{1}{2}n(n-1),
\end{aligned}$$

$$D = \frac{1}{6}n(nn - 4n + 1),$$
$$E = \frac{1}{24}n(n^3 - 11nn + 11n - 1)$$
etc.

§29 Um die Gestalt dieser Zahlen A, B, C, D etc. vollständiger zu untersuchen, wollen wir diese dieselben Buchstaben involvierende Reihe betrachten

$$s = A + Bt + Ctt + Dt^3 + \text{etc.},$$

aus welcher wir nach den zuvor gefundenen Relationen die folgenden Reihen bilden wollen:

$$\begin{array}{llllllll}
+s & = A & + Bt & + Ctt & + Dt^3 & + Et^4 & + Ft^5 & + \text{etc.}, \\
-nst & = & -nA & -nB & -nC & -nD & -nE & - \text{etc.}, \\
+\frac{1}{2}n\ (n+1)stt & = & & \frac{1}{2}n(n+1)A & + \frac{1}{2}n(n+1)B & + \frac{1}{2}n(n+1)C & + \frac{1}{2}n(n+1)D & + \text{etc.} \\
-\frac{1}{6}n\ (n+1)^2st^3 & = & & & -\frac{1}{6}n(n+1)^2A & - \frac{1}{6}n(n+1)^2B & - \frac{1}{6}n(n+1)^2C & - \text{etc.} \\
+\frac{1}{24}n(n+1)^3st^4 & = & & & & + \frac{1}{24}n(n+1)^3A & + \frac{1}{24}n(n+1)^3B & + \text{etc.}
\end{array}$$
etc.

Nachdem also die Reihen zu einer Summe gesammelt worden sind, werden wir diese Gleichung erlangen

$$s\left(1 - nt + \frac{1}{2}n(n+1)tt - \frac{1}{6}n(n+1)^2t^3 + \frac{1}{24}n(n+1)^3t^4 - \text{etc.}\right) = 1.$$

§30 Um nun diese Gleichung auf eine endliche Form zu reduzieren, wollen wir diese Progression zur Hilfe nehmen

$$e^{-(n+1)t} = 1 - (n+1)t + \frac{1}{2}(n+1)^2tt - \frac{1}{6}(n+1)^3t^3 + \frac{1}{24}(n+1)^4t^4 - \text{etc.},$$

woher wird

$$\frac{e^{-(n+1)t}-1}{n+1} = -t + \frac{1}{2}(n+1)tt - \frac{1}{6}(n+1)^2t^3 + \frac{1}{24}(n+1)^3t^4 - \text{etc.},$$

als logische Konsequenz ist dann

$$\frac{n}{n+1}(e^{-(n+1)t}-1) = -nt + \frac{1}{2}n(n+1)t^2 - \frac{1}{6}n(n+1)^2t^3 + \frac{1}{24}n(n+1)^3t^4 - \text{etc.}$$

Daher werden wir also die folgende endliche Gleichung erlangen:

$$s\left(1 + \frac{n}{n+1}(e^{-(n+1)t}-1)\right) = s\left(\frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}e^{-(n+1)t}\right) = 1.$$

Aber aus dieser Gleichung, wenn der Wert von s durch eine Reihe gefunden wird, muss die angenommene Reihe hervorgehen, aus welcher deshalb unsere Buchstaben a, b, c, d etc. bekannt werden werden. Daher wird also sein

$$e^{-(n+1)t} = \frac{1+n-s}{ns}$$

und daher

$$-(n+1)t = \log(1+n-s) - \log ns$$

und durch Differenzieren

$$-(n+1)\partial t = -\frac{\partial s}{1+n-s} - \frac{\partial s}{s} = -\frac{(1+n)\partial s}{s(1+n-s)};$$

aus dieser Gleichung wird erschlossen

$$s(1+n-s) = \frac{\partial s}{\partial t}.$$

§31 Es werde nun festgelegt

$$s = \frac{1}{2}(n+1) + v,$$

dass wird

$$v = -\frac{1}{2}(n+1) + A + Bt + Ctt + Dt^3 + \text{etc.},$$

und unsere Gleichung wird diese sein

$$\frac{1}{4}(n+1)^2 - vv = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Um also die Rechnung zu verkürzen, wollen wir festlegen

$$\frac{1}{2}(n+1) = m$$

und es sei

$$A-\frac{1}{2}(n+1)=\Delta,$$

dass unsere Reihe diese ist

$$v=\Delta+Bt+Ctt+Dt^3+Et^4+Ft^5+Gt^6+Ht^7+\text{etc.};$$

dann werden wir aber haben

$$\frac{\partial v}{\partial t}=mm-vv$$

oder

$$\frac{\partial v}{\partial t}+vv=mm.$$

In dieser Gleichung wollen wir also anstelle von v die angenommene Reihe einsetzen und es wird sein

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} &= B \quad +2C \quad t+2D \quad tt+4E \quad t^3+5F \quad t^4+6G \quad t^5+\text{etc.},\\
vv &= \Delta\Delta+2\Delta B \quad +2\Delta C \quad +2\Delta D \quad +2\Delta E \quad +2\Delta F \quad +\text{etc.},\\
&\qquad\qquad\qquad +BB \quad +2BC \quad +2BD \quad +2BE\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +CC \quad +2CD\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.},
\end{aligned}$$

die Summe welcher Reihen also $=mm$ sein muss, woher die folgenden Bestimmungen abgeleitet werden:

$$\begin{aligned}
B + \quad \Delta\Delta &= mm, \\
2C + 2\Delta B &= 0, \\
3D + 2\Delta C + BB &= 0, \\
4E + 2\Delta D + 2BC &= 0, \\
5F + 2\Delta E + 2BD + CC &= 0
\end{aligned}$$

etc.,

daher

$$\begin{aligned}
B &= \quad mm - \Delta\Delta, \\
2C &= -2\Delta B, \\
3D &= -2\Delta C - BB, \\
4E &= -2\Delta D - 2BC, \\
5F &= -2\Delta E - 2BD - CC
\end{aligned}$$

etc.

§32 Weil wir ja nun festgelegt haben

$$\Delta = A - \frac{1}{2}(n+1) = A - m,$$

wird wegen $A = 1$ sein

$$\Delta = 1 - m = \frac{1-n}{2}.$$

Wir wollen aber den Buchstaben m in der Rechnung beibehalten, während

$m = \frac{1}{2}(n+1)$ ist, und wir werden $B = n$ auffinden; und weil $-2\Delta = n-1$ ist, werden unsere Formeln diese werden

$$\begin{aligned}
2C &= (n-1)B, \\
3D &= (n-1)C - BB, \\
4E &= (n-1)D - 2BC, \\
5F &= (n-1)E - 2BD - CC, \\
6G &= (n-1)F - 2BE - 2CD
\end{aligned}$$

etc.

und diese Formeln scheinen für die Rechnung geeigneter als die oberen in § 28, weil hier eine kleinere Anzahl an Termen auftaucht und auch die Faktoren einfacher sind. Aus diesen wollen weiter also die oben begonnenen Werte weiter verfolgen:

$$\begin{aligned}
A &= 1, \\
B &= n, \\
C &= \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \\
D &= \frac{n(nn-4n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \\
E &= \frac{n(n^3-11nn+11n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \\
F &= \frac{n(n^4-26n^3+66n^2-26n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, \\
G &= \frac{n(n^5-57n^4+302n^3-302n+57n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}
\end{aligned}$$

etc.

§33 Diese Ausdrücke sind umso bemerkenswerter, weil die Koeffizienten auf allgemeine Formeln zurückgeführt werden können; denn die Koeffizienten der zweiten Terme, die 0, 0, 1, 4, 11, 26, 57, 120 etc. sind, entsprießen aus der allgemeinen Form $2^{z-1} - z$; die Koeffizienten der dritten Terme, die 0, 0, 0, 11, 66, 302 etc. sind, entspringen hingegen aus dieser allgemeinen Formel

$$3^{z-1} - 2^{z-1}z + \frac{z(z-1)}{1 \cdot 2};$$

auf die gleiche Weise ist der allgemeine Term der vierten Terme, welche 0, 0, 0, 0, 1, 26, 302 etc., dieser

$$4^{z-1} - 3^{z-1} \cdot z + 2^{z-1} \cdot \frac{z(z-1)}{1 \cdot 2} - \frac{z(z-1)(z-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

die Koeffizienten der fünften Terme, die 0, 0, 0, 0, 0, 1, 57 etc. sind, entspringen hingegen aus dieser allgemeinen Form

$$5^{z-1} - 4^{z-1} \cdot z + 3^{z-1} \cdot \frac{z(z-1)}{1 \cdot 2} - 2^{z-1} \cdot \frac{z(z-1)(z-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

woher schon hinreichend klar ist, auf welche Weise die allgemeinen Formeln für die folgenden Terme festgelegt werden müssen.

§34 Nachdem also nach diesen Regeln die Werte der Buchstaben A, B, C, D etc. gefunden worden sind, wird die Summe der vorgelegten unendlichen Reihe

$$n^x X - n^{x+1} X' + n^{x+2} X'' - n^{x+3} X''' + \text{etc.}$$

sein

$$n^x\left(\frac{A}{n+1}X-\frac{B}{(n+1)^2}\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{C}{(n+1)^3}\frac{\partial\partial X}{\partial x^2}-\frac{D}{(n+1)^4}\frac{\partial^3 X}{\partial x^3}\right)$$

So, wenn $X=1$ war und diese Reihe zu summieren ist

$$n^x-n^{x+1}+n^{x+2}-n^{x+3}+n^{x+4}-\text{etc.},$$

wird wegen

$$\frac{\partial X}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\partial X}{\partial x^2}=0\quad \text{etc.},$$

wird die gesuchte Summe diese sein

$$=n^x\frac{A}{n+1}=\frac{n^x}{n+1}.$$

Aber wenn $X=x$ genommen wird, dass die zu summierende Reihe diese ist

$$n^x\cdot x-n^{x+1}(x+1)+n^{x+2}(x+2)-n^{x+3}(x+3)+\text{etc.},$$

wird die gesuchte Summe wegen $\frac{\partial X}{\partial x}=1$, wohingegen aber die folgenden Differentiale $=0$ sind, sein

$$=n^x\left(\frac{Ax}{n+1}-\frac{B}{(n+1)^2}\right)=n^x\left(\frac{x}{n+1}-\frac{n}{(n+1)^2}\right).$$

Daher, wenn $x=1$ genommen wird, wird die Summe dieser Reihe

$$n-2n^2+3n^3-4n^4+5n^5-6n^6+\text{etc.}$$

sein

$$= \frac{n}{(n+1)^2},$$

die Entwicklung welches Bruches offenbar diese Reihe hervorbringt. Es überflüssig, mehrere Beispiele hinzuzufügen, weil dieser Gegenstand bereits ein anderes Mal gründlicher behandelt worden ist.

PROBLEM III

Wenn wie zuvor X irgendeine Funktion von x bezeichnet, die, indem anstelle von x nacheinander $x+1$, $x+2$, $x+3$ etc. geschrieben wird, in X', X'', X''' etc. übergehe, und die folgende mit der hypergeometrischen vermischte unendliche Progression vorgelegt wird

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots xX - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (x+1)X' + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (x+2)X'' - \text{etc.},$$

ihre Summe ausfindig zu machen.

§35 Diese gesuchte Summe werde $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots xS$ gesetzt, so dass nur die Funktion S ausfindig gemacht werden muss, und es wird sein

$$S = X - (x+1)X' + (x+1)(x+2)X'' - (x+1)(x+2)(x+3)X''' + \text{etc.}$$

Daher wird also, wenn wir anstelle von x überall $x+1$ schreiben, werden

$$S' = X' - (x+2)X'' + (x+2)(x+3)X''' - (x+2)(x+3)(x+4)X'''' + \text{etc.},$$

welche letzte Reihe mit $x+1$ multipliziert und zur ersten addiert diese diese Gleichung hervorbringen wird

$$S+(x+1)S'=X,$$

aus welcher also der Wert von S definiert werden muss.

§36 Hier ist es aber nicht wie oben möglich, für S eine solche nach den Differentialen von X fortschreitende Reihe anzusetzen, deshalb weil die Funktion

$$S'=S+\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{\partial\partial S}{1\cdot 2\partial x^2}+\frac{\partial^3 S}{1\cdot 2\cdot 3\partial x^3}+\text{etc.}$$

mit dem variablen Faktor $x+1$ multipliziert worden ist; deswegen wollen wir für S diese allgemeine Reihe annehmen

$$p+q+r+s+t+\text{etc.},$$

welche so beschaffen sei, dass das Differential eines jeden Teils auf die folgende Stelle fällt. Weil unsere Gleichung also diese ist

$$(x+2)S+(x+1)\frac{\partial S}{\partial x}+(x+1)\frac{\partial\partial S}{2\partial x^2}+(x+1)\frac{\partial^3 S}{6\partial x^3}+\text{etc.}=X,$$

werde hier anstelle von S und seinen Differentialen nach dem vorgeschriebenen Gesetz die angenommene Reihe eingesetzt

$$
\begin{aligned}
X = (x+2)p + (x+2)q &\quad + (x+2)r \quad + (x+2)s \quad + (x+2)t \quad + (x+2)u \quad + \text{etc.}\\
+ (x+1)\frac{\partial p}{\partial x} + (x+1)\frac{\partial q}{\partial x} &\quad + (x+1)\frac{\partial r}{\partial x} + (x+1)\frac{\partial s}{\partial x} + (x+1)\frac{\partial t}{\partial x} + \text{etc.}\\
+ (x+1)\frac{\partial\partial p}{2\partial x^2} &+ (x+1)\frac{\partial\partial q}{2\partial x^2} + (x+1)\frac{\partial\partial r}{2\partial x^2} + (x+1)\frac{\partial\partial s}{2\partial x^2} + \text{etc.}\\
&+ (x+1)\frac{\partial^3 p}{6\partial x^3} + (x+1)\frac{\partial^3 q}{6\partial x^3} + (x+1)\frac{\partial^3 r}{6\partial x^3} + \text{etc.}\\
&+ \text{etc.};
\end{aligned}
$$

und hier werde zuerst festgelegt

$$X = (x+2)p,$$

so dass ist

$$p = \frac{X}{x+2};$$

dann wird man aber für die übrigen die folgenden Gleichungen haben

$$
\begin{aligned}
&(x+2)q + (x+1)\frac{\partial p}{\partial x} = 0,\\
&(x+2)r + (x+1)\frac{\partial q}{\partial x} + (x+1)\frac{\partial\partial p}{2\partial x^2} = 0,\\
&(x+2)s + (x+1)\frac{\partial r}{\partial x} + (x+1)\frac{\partial\partial q}{2\partial x^2} + (x+1)\frac{\partial^3 p}{6\partial x^3} = 0,\\
&(x+2)t + (x+1)\frac{\partial s}{\partial x} + (x+1)\frac{\partial\partial r}{2\partial x^2} + (x+1)\frac{\partial^3 q}{6\partial x^3} + (x+1)\frac{\partial^4 p}{24\partial x^4} = 0\\
&\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

§37 Es wird also nicht schwer sein, aus diesen Gleichungen die Werte der einzelnen Buchstaben p, r, s, t etc, durch die schon gefundenen vorhergehenden zu bestimmen. Im Allgemeinen würde die Entwicklung bald zu allzu komplizierten Formeln führen; denn, weil $p = \frac{X}{x+2}$ ist, wird sein

$$\partial p = \frac{\partial X}{x+2} - \frac{X\partial x}{(x+2)^2},$$

woher erschlossen wird

$$(x+2)q + \frac{x+1}{x+2}\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{(x+1)X}{(x+2)^2} = 0$$

und daher

$$q = -\frac{x+1}{(x+2)^2}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{(x+1)X}{(x+2)^3};$$

von dieser müssten also nicht nur erneut die Differentiale genommen werden, sondern auch das Differenzen-Differential von p, dass daher der Wert von r deriviert wird. Dennoch werden diese Werte im Allgemeinen vorteilhafter auf die folgende Weise ausgedrückt:

$$q = -\frac{x+1}{(x+2)\partial x} \cdot p,$$

$$r = -\frac{x+1}{(x+2)\partial x} \cdot \left(q + \frac{\partial p}{2\partial x}\right),$$

$$s = -\frac{x+1}{(x+2)\partial x} \cdot \left(r + \frac{\partial q}{2\partial x} + \frac{\partial\partial p}{6\partial x^2} \right),$$

$$t = -\frac{x+1}{(x+2)\partial x} \cdot \left(s + \frac{\partial r}{2\partial x} + \frac{\partial\partial q}{6\partial x^2} + \frac{\partial^3 p}{24\partial x^3} \right)$$

etc.

§38 Es ist aber nicht notwendig, diese Formeln zu entwickeln, weil die Entwicklung in jedem vorgelegten Fall nicht schwer durchgeführt werden können wird, was ausreichen wird, es an einem einzigen Fall gezeigt zu haben.

Es werde also $X = 1$ genommen und es werden auch alle daher derivierten Werte X', X'' der Einheit gleich sein. Und zuerst wird man in diesem Fall haben

$$p = \frac{1}{x+2},$$

dessen Differentiale also diese sein werden

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{(x+2)^2}, \quad \frac{\partial\partial p}{\partial x^2} = \frac{2}{(x+2)^3}, \quad \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} = -\frac{6}{(x+2)^4} \quad \text{etc.};$$

daher erschließen wir also zuerst

$$q = +\frac{x+1}{(x+2)^3},$$

welcher Wert in diese Teile aufgelöst werde

$$q = \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+2)^3},$$

woher werden wird

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{2}{(x+2)^3} + \frac{3}{(x+2)^4}$$

und

$$\frac{\partial \partial q}{\partial x^2} = \frac{6}{(x+2)^4} - \frac{12}{(x+2)^5}$$

etc.

Aus diesen wird also weiter

$$r = -\frac{x+1}{x+2}\left(-\frac{1}{(x+2)^3} + \frac{3}{(x+2)^4}\right).$$

Weil also nun gilt

$$-\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = -1 + \frac{1}{x+2},$$

wird werden

$$r = +\frac{1}{(x+2)^3} - \frac{4}{(x+2)^4} + \frac{3}{(x+2)^5},$$

woher wird

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{3}{(x+2)^4} + \frac{16}{(x+2)^5} - \frac{15}{(x+2)^6};$$

aus diesem Wert wird erschlossen

$$s=-\frac{x+1}{x+2}\left(-\frac{1}{(x+2)^4}+\frac{10}{(x+2)^5}-\frac{15}{(x+2)^6}\right).$$

Nachdem also diese Werte gefunden worden sind, wird die Summe der unendlichen Reihe

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots x-1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots (x+1)+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots (x+2)-1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots (x+3)+\text{etc.}$$

sein

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots x(p+q+r+s+\text{etc.}).$$

§39 Wir wollen hier für den für einen sehr speziellen Fall $x=0$ nehmen, dass diese zu summierende hypergeometrische Reihe vorgelegt wird

$$1-1+2-6+24-120+\text{etc.},$$

für welchen Fall also $1\cdots x=1$ sein wird; dann wird aber aufgefunden werden

$$p=\frac{1}{2},\quad q=\frac{1}{8},\quad r=-\frac{1}{32},s=-\frac{1}{128}\quad \text{etc.}$$

Nachdem also diese Rechnung bis hierhin fortgeführt worden ist, geht die verlangte Summen hervor als

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-\frac{1}{32}-\frac{1}{128}=\frac{75}{128}=0,5859,$$

welche nicht viel von der abweicht, welche ich einst mit größter Mühe gefunden habe.

§40 Wir wollen nun $x = 1$ nehmen, dass diese Reihe zu summieren ist

$$1 - 2 + 6 - 24 + 120 - \text{etc.},$$

und es wird $1 \cdots x = x$ sein, dann aber

$$p = \frac{1}{3}, \quad q = \frac{2}{27}, \quad r = 0, \quad s = -\frac{4}{729} \quad \text{etc.}$$

Daher wird unsere Summe also sein

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{27} - \frac{4}{729} = \frac{293}{729} = 0,40192,$$

welche Summe mit der vorhergehenden hinreichend genau übereinstimmt, weil ja daher die beiden Reihen zusammen genommen als $0,9878$ hervorgehen: Denn es müsste die Einheit hervorgehen; daher tritt es klar tage, wenn wir die Reihe p, q, r, s etc. weiter fortgesetzt hätten, dass wir dann auch noch um Vieles näher an die Wahrheit herangekommen wären.