Entwicklung der von der Grenze $x = 0$ bis hin zu $x = 1$ erstreckten Integralformel $\int \partial x \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{\log x} \right)$*

Leonhard Euler

§1 Diese Integralformel ist umso bemerkenswerter, weil ich gezeigt habe, dass ihr Wert mit dem zusammenfällt, den dieser Ausdruck liefert:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n,$$

wenn die Zahl n unendlich groß genommen wird, und welchen ich Approximation gefunden habe gleich $0,5772156649015325$ zu sein, deren Wert ich auf noch keine Weise auf schon bekannte transzendente Maße zurückführen konnte; daher wird es nicht unnützlich sein, die Auflösung dieser vorgelegten Formeln auf mehrere Weisen anzugreifen. Und zuerst ist freilich, weil sie ja aus zwei Teilen

$$\int \frac{\partial x}{1-x} \quad \text{und} \quad \int \frac{\partial x}{\log x}$$

besteht, klar, dass der Wert des ersten Teils – $\log(1-x)$ für $x = 1$ gesetzt – $\log 0$ sein wird und daher gleich ∞; dann aber durchschaut man, dass auch

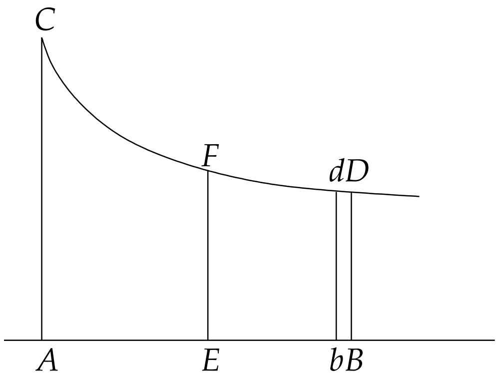
*Originaltitel: „Evolutio formulae integralis $\int dx(1/(1-x) + 1/(lx))$ a termino $x = 0$ ad $x = 1$ extensae", erstmals publiziert in „*Nova Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae* 4, 1789, pp. 3-16", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 18, pp. 318 - 334", Eneström-Nummer E629, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Artur Diener, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz" der Wert des zweiten Teils unendlich ist, aber mit dem gegenteiligen Zeichen versehen, so dass man nicht schwer einsieht, dass das Aggregat dieser Teile einen endlichen Wert hat.

ERSTE GEOMETRISCHE ENTWICKLUNG

§2 Zuerst also wollen wir diese Form durch Quadraturen beschaffen, indem wir die Kurve betrachten, deren Abszisse x der Ordinate

$$y = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{\log x}$$

entspricht; dann aber wird ihre Fläche $\int y\partial x$, die auf der Abszisse x fußt, den gesuchten Wert selbst darstellen; deshalb wollen wir die Form dieser Kurve gründlicher untersuchen. Und zuerst ist freilich klar, dass sich diese Kurve keinesfalls in die Region von negativen Abszissen ausdehnt, sondern von der Grenze $x = 0$ beginnt. Für $x = 0$ gesetzt aber wird natürlich $y = 1$, wegen $\log x = \infty$; aber, während x unendlich klein wird, wird $y = 1 + x + \frac{1}{\log x}$ werden, wo man leicht durchschaut, dass das letzte Glied $\frac{1}{\log x}$ negativ ist und quasi eine Unendlichkeit größer als x ist, so dass $y = 1 - ix$ wird, während i eine sehr große Zahl wird; daher ist klar, wenn wir die Kurve auf die Achse AO beziehen und in dieser die Abszissen x vom Punkte A nehmen, dass in diesem Punkt selbst die Ordinate $AC = 1$ sein wird und die Kurve in C diese Ordinate AC berührt, deshalb weil der Schwund der Ordinate im Unendlichen den Zuwachs der Abszisse übersteigt. Die Kurve also wird den Ursprung von diesem Punkt C aus haben und daher wird sie immer näher an die Achse herangebogen werden, welche sie schließlich in unendlichen Weiten berühren wird. Nachdem nämlich $x = \infty$ gesetzt wurde, wird



$$y = -\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\log \infty}$$

sein, wo man bemerke, dass das erste Glied $\frac{1}{\infty}$ in Bezug auf das andere verschwindet, sodass dieser Wert positiv ist, woher klar ist, dass diese Kurve vom Punkt C aus immer näher an die Achse herangehen wird.

§3 Wir wollen nun die Abszisse $AB = 1$ betrachten, wo für $x = 1$ genommen $y = \frac{1}{0} + \frac{1}{0}$ wird, woher sich natürlich nichts schließen ließe; deswegen wollen wir $x = 1 - \omega$ setzen, sodass $y = \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\log(1-\omega)}$ wird. Indem man $\log(1-\omega)$ in eine Reihe entwickelt, wird

$$y = \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega + \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{3}\omega^3 + \text{etc.}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\omega}{1 + \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{3}\omega^2}$$

werden. Es werde nun $\omega = 0$ und es ist klar, dass die Ordinate im Punkt B gleich $BD = \frac{1}{2}$ sein wird, weil $AC = 1$ und $AB = 1$ ist. Daher ist zugleich klar, dass für sehr klein genommenes ω, natürlich $Bb = \omega$, die Ordinate in diesem Punkt

$$bd = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\omega}{1 + \frac{1}{2}\omega} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\omega$$

sein wird und der Anfang der Kurve Dd unter einem Winkel zur Achse geneigt ist, dessen Tangens $\frac{1}{12}$ ist, der fast $4^\circ\,46'$ ist.

§4 Wir wollen nun die Abszisse $AE = \frac{1}{2}$ nehmen und dieser wird fast die Ordinate $EF = 2 - \frac{1}{\log 2} = 0,557$ entsprechen und daher lässt sich schon näherungsweise die Fläche $ABCD$ berechnen. Und wenn nämlich CF eine gerade Linie wäre, würde die Fläche $ACFE = 0,389$ sein; weil sie aber zur Achse hingebogen ist, wird diese Fläche etwas kleiner sein. Für den anderen Teil, weil FD weniger eingebogen ist, wird die Fläche $BDFE$ ein ganz kleines bisschen kleiner als ungefähr $\frac{1}{2}BE(BD + EF) = 0,264$ sein, woher die ganze Fläche $ACDB$ gewiss kleiner sein wird als $0,653$; das stimmt schon genügend mit der Wahrheit überein, weil ja diese Fläche $0,577$ sein muss. Aber wenn wir die Abszisse $AB = 1$ in mehrere Teile teilen und die Flächen, die den einzelnen Teilen entsprechen, untersuchen wollten, würde deren Summe umso näher an den bekannten Wert herangehen, je mehr festgesetzte Teile es gab. Weil wir aber über den wahren Wert dieser Formel schon gewiss sind, würde man eine solche Arbeit vergeblich auf sich nehmen, aber es soll hier genügen, die Form dieser völlig einzigartigen Kurve, die ja im Punkt C plötzlich beginnt, abgewogen zu haben.

ZWEITE ENTWICKLUNG

§5 Wir wollen nun $\log x$ in eine Reihe entwickeln, und weil $x = 1 - (1-x)$ ist, wird

$$\log x = -(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2 - \frac{1}{3}(1-x)^3 - \frac{1}{4}(1-x)^4 - \text{etc.}$$

sein; und weil

$$y = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{\log x} = \frac{\log x + 1 - x}{(1-x)\log x}$$

ist, wollen wir diese Reihe nur im Zähler anstelle von x schreiben und es wird

$$y = \frac{-\frac{1}{2}(1-x)^2 - \frac{1}{3}(1-x)^3 - \frac{1}{4}(1-x)^4 - \text{etc.}}{(1-x)\log x}$$

hervorgehen und daher

$$y = \frac{-\frac{1}{2}(1-x) - \frac{1}{3}(1-x)^2 - \frac{1}{4}(1-x)^3 - \text{etc.}}{\log x};$$

daher wird, indem man termweise integriert, der gesuchte Wert

$$\int y\partial x = -\frac{1}{2}\int \frac{(1-x)\partial x}{\log x} - \frac{1}{3}\int \frac{(1-x)^2\partial x}{\log x} - \frac{1}{4}\int \frac{(1-x)^3\partial x}{\log x} - \text{etc.}$$

sein, welche einzelnen Formeln leicht auf jene allgemeine Formel zugeführt werden, mit der ich gezeigt habe, dass

$$\int \frac{x^m - x^n}{\log x}\partial x = \log\left(\frac{m+1}{n+1}\right)$$

ist. Daher wird nämlich sofort

$$\int \frac{1-x}{\log x}\partial x = \log\frac{1}{2}$$

sein und weil $(1-x)^2 = 1 - x - (x - xx)$ ist, wird

$$\int \frac{(1-x)^2\partial x}{\log x} = \log\frac{1}{2} - \log\frac{2}{3} = \log\frac{1\cdot 3}{2^2}$$

sein. Auf ähnliche Weise wird leicht klar sein, dass

$$\int \frac{(1-x)^3 \partial x}{\log x} = \log\left(\frac{1\cdot 3^3}{2^3\cdot 4}\right)$$
$$\int \frac{(1-x)^4 \partial x}{\log x} = \log\left(\frac{1\cdot 3^6\cdot 5}{2^4\cdot 4^4}\right)$$
$$\int \frac{(1-x)^5 \partial x}{\log x} = \log\left(\frac{1\cdot 3^{10}\cdot 5^5}{2^5\cdot 4^{10}\cdot 6}\right)$$
$$\int \frac{(1-x)^6 \partial x}{\log x} = \log\left(\frac{1\cdot 3^{15}\cdot 5^{15}\cdot 7}{2^6\cdot 4^{20}\cdot 6^6}\right)$$

sein wird.

§6 Aus diesen also wird der Wert unserer Formel $\int y\partial x$ durch eine völlig einzigartige logarithmische Reihe auf folgende Weise ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}\int y\partial x =& \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{3}\log\left(\frac{2^2}{1-3}\right) + \frac{1}{4}\log\left(\frac{2^3\cdot 4}{1\cdot 3^3}\right) + \frac{1}{5}\log\left(\frac{2^4\cdot 4^4}{1\cdot 3^6\cdot 5}\right)\\ &+ \frac{1}{6}\log\left(\frac{2^5\cdot 4^{10}\cdot 6}{1\cdot 3^{10}\cdot 5^5}\right) + \frac{1}{7}\log\left(\frac{2^6\cdot 4^{20}\cdot 6^6}{1\cdot 3^{15}\cdot 5^{15}\cdot 7}\right) + \text{etc.}\end{aligned}$$

Dort ist natürlich zu bemerken, dass alle Logarithmen als hyperbolische genommen werden müssen; man sieht aber leicht ein, dass immer kleinere Terme dieser Reihe hervorgehen, diese Reihe aber dennoch nicht so sehr konvergiert, dass aus ihr der gesuchte Wert angenehm berechnet werden kann.

DRITTE ENTWICKLUNG

§7 Wir wollen dieselbe Auflösung des Logarithmus von x in eine unendliche Reihe benutzen und der Kürze wegen $1-x=t$ setzen, sodass

$$\log x = -t - \frac{1}{2}tt - \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 - \text{etc.}$$

ist, und es wird

$$\frac{1}{\log x} = \frac{-1}{t(1+\frac{1}{2}t+\frac{1}{3}tt+\frac{1}{4}t^3+\frac{1}{5}t^4+\text{etc.})}$$

sein. Wir wollen gleich den Bruch $\frac{1}{1+\frac{1}{2}t+\frac{1}{3}tt+\text{etc.}}$ auf gewohnte Weise in eine rekurrente Reihe verwandeln, welche

$$1+\alpha t+\beta tt+\gamma t^3+\delta t^4+\varepsilon t^5+\zeta t^6+\text{etc.}$$

sei, wo die Koeffizienten α, β, γ, δ, etc. so beschaffen sein werden, dass

$$\begin{aligned} \alpha+\tfrac{1}{2}&=0 \quad \text{und daher} & \alpha&=-\tfrac{1}{2}\\ \beta+\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{3}&=0 & \beta&=-\tfrac{1}{12}\\ \gamma+\tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{1}{3}\alpha+\tfrac{1}{4}&=0 & \gamma&=-\tfrac{1}{24}\\ \delta+\tfrac{1}{2}\gamma+\tfrac{1}{3}\beta+\tfrac{1}{4}\alpha+\tfrac{1}{5}&=0 & \delta&=-\tfrac{19}{720}\\ \text{etc.}& \end{aligned}$$

sein werden, woher sich diese Reihe als bekannt betrachten lässt.

§8 Nach Einsetzen dieses Wertes also wird

$$\frac{1}{\log x}=-\frac{1}{t}-\alpha-\beta t-\gamma tt-\delta t^3-\varepsilon t^4-\text{etc.}$$

sein; daher wird, weil $\frac{1}{1-x}=\frac{1}{t}$ ist,

$$y=-\alpha-\beta t-\gamma tt-\delta t^3-\varepsilon t^4-\text{etc.}$$

oder

$$y=-\alpha-\beta(1-x)-\gamma(1-x)^2-\delta(1-x)^3-\text{etc.}$$

sein. Weil nun im Allgemeinen

$$\int \partial x(1-x)^n=C-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{n+1}-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$$

für $x=1$ gesetzt ist, so wie wir angenommen haben, wird

$$\int \partial x(1-x)^n=\frac{1}{n+1}$$

sein. Daher wird man also, nachdem die einzelnen Integrale genommen worden sind,

$$\int y\partial x=-\frac{\alpha}{1}-\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{3}-\frac{\delta}{4}-\frac{\varepsilon}{5}-\text{etc.}$$

finden, woher durch die vorher entwickelten Werte

$$\int y\partial x=\frac{1}{2}+\frac{1}{24}+\frac{1}{72}+\frac{19}{2880}+\text{etc.}$$

werden wird, welche Reihe natürlich zu wenig konvergent ist.

VIERTE ENTWICKLUNG

§9 Weil wir $y = \frac{\log(x)+1-x}{(1-x)\log x}$ haben, so wie wir zuvor den Teil $\log x$ in eine unendliche Reihe aufgelöst haben, so wollen wir nun umgekehrt die Größe selbst in eine durch Logarithmen von x fortschreitende Reihe entwickeln. Weil nämlich $x = \mathrm{e}^{\log x}$ ist, wird

$$x = 1 + \log x + \frac{1}{2}(\log x)^2 + \frac{1}{6}(\log x)^3 + \frac{1}{24}(\log x)^4 + \text{etc.}$$

sein, wo wir anstelle von $\log x$ zur Kürze also u schreiben wollen, und wir wollen diese Reihe nun in den Zähler einführen, dass

$$y = \frac{-\frac{1}{2}uu - \frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{24}u^4 - \frac{1}{120}u^5 - \text{etc.}}{u(1-x)}$$

wird oder

$$y = \frac{-\frac{1}{2}u - \frac{1}{6}uu - \frac{1}{24}u^3 - \frac{1}{120}u^4 - \text{etc.}}{1-x}$$

und daher

$$\int y\partial x = -\frac{1}{2}\int \frac{\partial x \log x}{1-x} - \frac{1}{6}\int \frac{\partial x(\log x)^2}{1-x} - \frac{1}{24}\int \frac{\partial x(\log x)^3}{1-x} - \frac{1}{120}\int \frac{\partial x(\log x)^4}{1-x} - \text{etc.}$$

§10 Weil nun im Allgemeinen, nachdem natürlich die Integrale von $x = 0$ bis $x = 1$ genommen wurden,

$$\int \partial x(\log x)^n = \pm 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots n$$

ist, wo das Zeichen „+“ gilt, wann immer n eine gerade Zahl ist, das Zeichen „−“ aber andernfalls, wird

$$\int x^{n-1}\partial x(\log x)^\lambda = \pm\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots \lambda}{n^{\lambda+1}}$$

sein, wo das Zeichen „+“ gilt, wenn λ eine gerade Zahl war, das untere aber, wenn eine ungerade. Daher wollen wir unsere einzelnen Formeln durch Reihen integrieren, während wir anstelle von $\frac{1}{1-x}$ die Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \text{etc.}$$

schreiben, und daher werden wir zuerst

$$\int \frac{\partial x \log x}{1-x} = -1\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\text{etc.}\right)$$

$$\int \frac{\partial x (\log x)^2}{1-x} = 1\cdot 2\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{6^3}+\text{etc.}\right)$$

$$\int \frac{\partial x (\log x)^3}{1-x} = -1\cdot 2\cdot 3\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\text{etc.}\right)$$

$$\int \frac{\partial x (\log x)^4}{1-x} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\left(1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{6^5}+\text{etc.}\right)$$

etc.

erhalten. Nachdem also diese Reihen eingesetzt worden sind, werden wir

$$\begin{aligned}\int y\partial x = &\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\text{etc.}\right)\\ &-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\text{etc.}\right)\\ &+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\text{etc.}\right)\\ &-\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{5^5}+\text{etc.}\right)\end{aligned}$$

finden, den Wert welches Ausdruckes ich schon neulich gezeigt habe jene bemerkenswerte Zahl $0{,}5772156649015325$ zu sein.

FÜNFTE ENTWICKLUNG

§11 Wir wollen hier dieselbe Auflösung in eine Reihe der Zahl x benutzen, aber diese auf andere Art anwenden. Weil natürlich für $\log x = u$ gesetzt

$$x = 1 + u + \tfrac{1}{2}uu + \tfrac{1}{6}u^3 + \tfrac{1}{24}u^4 + \tfrac{1}{120}u^5 + \text{etc.}$$

ist, wird der erste Teil selbst unsere Formel

$$\frac{1}{1-x} = \frac{-1}{u+\frac{1}{2}uu+\frac{1}{6}u^3+\frac{1}{24}u^4+\frac{1}{120}u^5+\text{etc.}} = -\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}u+\frac{1}{6}uu+\frac{1}{24}u^3+\text{etc.}}$$

sein. Diesen Bruch

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}u+\frac{1}{6}uu+\frac{1}{24}u^3+\text{etc.}}$$

wollen wir auf gewohnte Weise in eine rekurrente Reihe umwandeln, welche

$$1 - Au + Buu - Cu^3 + Du^4 - Eu^5 + \text{etc.}$$

sei und es wird nach Anstellung eines Vergleiches

$$\begin{array}{lcl}
A = \frac{1}{2} & \text{also} & A = \frac{1}{2} \\
B = \frac{1}{2}A - \frac{1}{6} & & B = \frac{1}{12} \\
C = \frac{1}{2}B - \frac{1}{6}A + \frac{1}{24} & & C = 0 \\
D = \frac{1}{2}C - \frac{1}{6}B + \frac{1}{24}A - \frac{1}{120} & & D = -\frac{1}{720} \\
E = \frac{1}{2}D - \frac{1}{6}C + \frac{1}{24}B - \frac{1}{120}A + \frac{1}{720} & & E = 0 \\
\text{etc.} & &
\end{array}$$

sein.

§12 Nachdem also diese Reihe eingeführt wurde und anstelle von u wieder der Wert $\log x$ eingesetzt wurde, wird unsere Formel $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{\log x} = y$ die folgende Form annehmen:

$$y = -\frac{1}{u} + A - Bu + Cuu - Du^3 + \text{etc.} + \frac{1}{u}$$

oder

$$y = A - B \log x + C(\log x)^2 - D(\log x)^3 + E(\log x)^4 - \text{etc},$$

woher, weil im Allgemeinen

$$\int \partial x (\log x)^n = \pm 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$$

ist, nachdem natürlich nach der Ausführung der Integration $x = 1$ gesetzt worden war, wo das obere Zeichen gilt, wann immer n eine gerade Zahl ist, das untere aber, wenn n eine ungerade, wir, nachdem das bemerkt worden ist, den gesuchten Wert $\int y \partial x$ auf folgende Weise ausgedrückt erhalten:

$$\int y \partial x = A + 1 \cdot B + 1 \cdot 2 \cdot C + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot D + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot E + 1 \cdot 2 \cdots 5 \cdot F + \text{etc},$$

welche Reihe natürlich wegen der Koeffizienten der Buchstaben A, B, C, D, etc. zu wenig konvergent ist; aber es ist auch zu erwägen, dass die Werte selbst dieser Buchstaben immer mehr schrumpfen, weil ja sicher ist, dass der Wert der Reihe $0,5772156649015325$ sein muss; daher wird es der Mühe Wert sein, die Reihe dieser Buchstaben gründlicher zu entwickeln.

Transformation des Bruches $\frac{1}{1+\frac{1}{2}u+\frac{1}{6}uu+\frac{1}{24}u^3+\frac{1}{120}u^4+\text{etc.}}$ in die Reihe $1-Au+Buu-Cu^3+Du^4-Eu^5+\text{etc.}$

§13 Es bezeichne der Buchstabe s die Summe dieser Reihe und es wird $s=\frac{u}{e^u-1}$ sein, woher $e^u=\frac{u+s}{s}$ wird und daher $u=\log(u+s)-\log s$, also wird durch Differentation

$$\partial u=\frac{\partial u+\partial s}{u+s}-\frac{\partial s}{s}=\frac{s\partial u-u\partial s}{s(u+s)}$$

sein; oder man setze sofort $s=pu$, sodass $u=\log\frac{1+p}{p}$ ist, woher $\partial u=-\frac{2p}{p(p+1)}$ wird; damit dieser Ausdruck eine gefälligere Reihe liefert, wollen wir $p=(q-\frac{1}{2})u$ setzen, dass schon $s=\left(q-\frac{1}{2}\right)u$ ist; dann aber wird $\partial u=\frac{-\partial q}{qq-\frac{1}{4}}$ sein, woher man diese Gleichung berechnet:

$$qq-\frac{1}{4}+\frac{\partial q}{\partial u}=0$$

§14 Aus dieser Gleichung also muss die Reihe gefunden werden, die den Wert von q beschafft, wo vor allem der Anfang dieser Reihe daher festgesetzt werden muss, weil für $u=0$ gesetzt $s=1$ werden muss und $q=\frac{1}{u}+\frac{1}{2}$; daher ist klar, dass der erste Term der für q zu findenden Reihe $\frac{1}{u}$ sein muss; dann aber durchschaut man leicht, dass in dieser Reihe nur die ungeraden Potenzen von u angesetzt werden müssen. Man setze deshalb diese Reihe an

$$q=\frac{1}{u}+au+bu^3+cu^5+du^7+eu^9+\text{etc.}$$

und es wird

$$\begin{aligned}
qq = \quad & \frac{1}{uu}+2a+2bu^2+2cu^4\quad+2du^6+2eu^8\quad+2fu^{10}+\text{etc.}\\
& \qquad\qquad +aau^2+2abu^4+2acu^6+2cda^8+2aeu^{10}+\text{etc.}\\
& \qquad\qquad\qquad\qquad +bbu^6+2bcu^8+2bdu^{10}+\text{etc.}\\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +ccu^{10}+\text{etc.}\\
\frac{\partial q}{\partial u} = & -\frac{1}{uu}+a\ \ +3bu^2+5cu^4\quad+7du^6+9eu^8\ +11fu^{10}+\text{etc.}
\end{aligned}$$

die Summe dieser Reihe also muss $\frac{1}{u}$ sein, woher man die folgenden Bestimmungen folgert

$$
\begin{aligned}
3a &= \frac{1}{4} & \text{also} \quad a &= \frac{1}{12}\\
5b + aa &= 0 & b &= -\frac{aa}{5}\\
7c + 2ab &= 0 & c &= -\frac{2ab}{7}\\
9d + 2ac + bb &= 0 & d &= -\frac{2ac+bb}{9}\\
11e + 2ad + 2bc &= 0 & e &= -\frac{2ad+2bc}{11}\\
13f + 2ae + 2bd + cc &= 0 & f &= -\frac{2ae+2bd+cc}{13}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

aus welchen Formeln die numerischen Werte der Buchstaben a, b, c, d, etc. berechnet werden können.

§15 Nachdem aber die Buchstaben a, b, c, d, etc. bestimmt worden sind, wird die für s gesuchte Reihe

$$s = 1 - \tfrac{1}{2}u + auu + bu^4 + cu^6 + du^8 + eu^{10} + fu^{12} + gu^{14} + \text{etc.}$$

sein; daher wird man, weil wir oben

$$s = 1 - Au + Buu - Cu^3 + Du^4 - Eu^5 + Fu^6 - Gu^7 + Hu^8 - \text{etc.}$$

gesetzt haben, die Werte dieser Kleinbuchstaben durch die großen auf die folgende Weise bestimmen

$$A = \tfrac{1}{2},\ B = a,\ C = 0,\ D = b,\ E = 0,\ F = C,\ G = 0,\ H = d,\ \text{etc.}$$

und so verschwinden die Koeffizienten der ungeraden Potenzen per se. Es ist aber klar, dass mithilfe der hier gefundenen Formeln die Werte der Buchstaben um Vieles leichter und schneller angegeben werden können als durch die oben erwähnten Relationen, es wird natürlich

$$A = \tfrac{1}{2},\ B = a = \tfrac{1}{12},\ C = 0,\ D = -\tfrac{1}{720},\ E = 0,\ F = \tfrac{1}{30240},\ \text{etc.}$$

sein.

§16 Weil ja auf diese Weise die Berechnung dieser Buchstaben bald auf riesig große Zahlen führen würde, wollen wir anstelle der Buchstaben a, b, c, d, etc. andere $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. nehmen, deren Zeichen alternieren mögen und deren Werte man auf diese in folgender Weise beziehe

$$a = \frac{\mathfrak{A}}{12},\ b = -\frac{\mathfrak{B}}{12^2},\ c = \frac{\mathfrak{C}}{12^3},\ d = -\frac{\mathfrak{D}}{12^4},\ e = \frac{\mathfrak{E}}{12^5},\ \text{etc},$$

so dass unsere Reihe gleich

$$s = 1 - \frac{1}{2}u - \frac{\mathfrak{A}uu}{12} - \frac{\mathfrak{B}u^4}{12^2} + \frac{\mathfrak{C}u^6}{12^3} - \frac{\mathfrak{D}u^8}{12^4} + \text{etc.}$$

ist; und diese neuen Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. werden auf folgende Weise bestimmt werden

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} = 1,\ \mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{A}}{5},\ \mathfrak{C} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{7},\ \mathfrak{D} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{B}}{9}, \\ \mathfrak{E} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{D} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{E}}{11},\ \mathfrak{F} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{E} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{D} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}}{13},\ \text{etc.} \end{aligned}$$

welche Werte man nun nicht schwer in Zahlen entwickeln wird und man wird finden:

$$\mathfrak{A} = 1,\ \mathfrak{B} = \frac{1}{5},\ \mathfrak{C} = \frac{2}{35},\ \mathfrak{D} = \frac{3}{175},\ \mathfrak{E} = \frac{2}{385},\ \mathfrak{F} = \frac{1382}{875875},\ \text{etc.}$$

§17 Wir wollen also diese neuen Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. in die für $\int y\partial x$ in §12 gefundene Reihe einsetzen und es wird

$$\int y\partial x = \frac{1}{2} + \frac{1\cdot\mathfrak{A}}{12} - \frac{1\cdot2\cdot3\cdot\mathfrak{B}}{12^2} + \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\mathfrak{C}}{12^3} - \frac{1\cdot2\cdot3\cdots7\cdot\mathfrak{D}}{12^4} + \text{etc.}$$

sein; dass diese Reihe aber nicht hinreichend konvergiert, haben wir schon oben beobachtet.

Transformation des Bruches $\frac{1}{1+\frac{1}{2}t+\frac{1}{3}tt+\frac{1}{4}t^3+\frac{1}{5}t^4+\text{etc.}}$ in eine Reihe $1+\alpha t+\beta tt+\gamma t^3+\delta t^4+\varepsilon t^5+\zeta t^6+\text{etc.}$

Auf diese Transformation sind wir schon oben in §7 geführt worden, wo die Entwicklung der Buchstaben α, β, γ, δ, etc. bald zu beschwerlich wurde. Wir wollen es nun also auf ähnliche Weise machen wie vorher und es wird, nachdem diese Reihe, die wir suchen, gleich s gesetzt wurde,

$$s=\frac{-t}{\log(1-t)}=tv \quad \text{und daher} \quad \log(1-t)=-\frac{1}{v}$$

sein, also durch Differenzieren

$$-\frac{\partial t}{1-t}=\frac{\partial v}{vv} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial v}{vv}+\frac{\partial t}{1-t}=0,$$

welcher wir diese Form zuteilen wollen

$$vv+\frac{\partial v}{\partial t}(1-t)=0,$$

aus welcher Gleichung eine geeignete Reihe für v gefunden werden muss.

§18 Weil also für $t=0$ gesetzt $s=1$ wird, wird in diesem Fall $v=\frac{1}{t}$ werden müssen, deshalb wollen wir diese Reihe ansetzen

$$v=\frac{1}{t}+a+bt+ctt+dt^3+et^4+\text{etc.}$$

welchen Wert man auf folgende Weise einsetze:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{tt}+0 \quad +b+2ct \quad +3dtt+4et^3 \quad +5ft^4+6gt^5 \quad +\text{etc.}\\
-\frac{\partial v}{\partial t} &= \qquad +\frac{1}{t} \quad -0-bt \quad -2ctt-3dt^3 \quad -4et^4-5ft^5 \quad -\text{etc.}\\
vv &= \frac{1}{tt}+\frac{2a}{t}+2b+2ct \quad +2dtt+2et^3 \quad +2ft^4+2gt^5 \quad +\text{etc.}\\
&\qquad aa+2abt+2actt+2adt^3+2aet^4+2aft^5+\text{etc.}\\
&\qquad bbtt+2bct^3+2bdt^4+2bet^5+\text{etc.}\\
&\qquad +cct^4+2cdt^5+\text{etc.}
\end{aligned}$$

Daher also entstehen die folgenden Bestimmungen

$$\begin{aligned}
1+2a&=0\\
3b+aa&=0\\
4c+2ab-b&=0\\
5d+2ac-2c+bb&=0\\
6e+2ad+2bc-3d&=0\\
7f+2ae+2bd-4e+cc&=0\\
&\text{etc,}
\end{aligned}$$

welche Formeln wegen $a=-\frac{1}{2}$ in die folgenden zusammengezogen werden

$$\begin{array}{lcl}
3b=-\dfrac{1}{4} & \text{also} & a=-\dfrac{1}{2}\\
4c=2b & & b=-\dfrac{1}{12}\\
5d=3c-bb & & c=-\dfrac{1}{24}\\
6e=4d-2bc & & d=-\dfrac{19}{720}\\
7f=5e-2bd-cc & & e=-\dfrac{3}{160}\\
8g=6f-2be-2ad & & f=-\dfrac{863}{32\cdot 270\cdot 7}
\end{array}$$

§19 Daher also wird die gesuchte Reihe

$$s=1+at+btt+ct^3+dt^4+\text{etc.}$$

sein, welche oben [§7]

$$s=1+\alpha t+\beta tt+\gamma t^3+\delta t^4+\text{etc.}$$

gesetzt worden war; also stimmen die lateinischen und griechischen Buchstaben völlig überein und es wird daher

$$\int y\partial x=-\frac{a}{1}-\frac{b}{2}-\frac{c}{3}-\frac{d}{4}-\frac{e}{5}-\text{etc.}$$

sein und nach Einsetzen der gerade gefundenen Werte

$$\int y\partial x=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 12}+\frac{1}{3\cdot 24}+\frac{19}{4\cdot 720}+\frac{3}{5\cdot 160}+\text{etc.}$$

§20 Damit aber die Berechnung dieser Buchstaben leichter gemacht wird, wollen wir

$$a = -\frac{A}{2}, \quad b = -\frac{B}{4}, \quad c = -\frac{C}{8}, \quad d = -\frac{D}{16}, \quad e = -\frac{E}{32}, \quad \text{etc.}$$

setzen, dass

$$\int y\partial x = \frac{A}{1\cdot 2} + \frac{B}{2\cdot 4} + \frac{C}{3\cdot 8} + \frac{D}{4\cdot 16} + \frac{E}{5\cdot 32} + \text{etc.}$$

ist; für diese Buchstaben aber werden wir die folgenden Bestimmungen haben

$$\begin{aligned} &A = 1, \quad B = \tfrac{1}{3}, \quad C = \tfrac{4B}{4}, \quad D = \tfrac{6C+BB}{5}, \quad E = \tfrac{8D+2BC}{6} \\ &F = \tfrac{10E+2BD+CC}{7}, \quad G = \tfrac{12F+2BE+2CD}{8}, \end{aligned}$$

woher man

$$A = 1, \quad B = \frac{1}{3}, \quad C = \frac{1}{3}, \quad D = \frac{19}{45}, \quad E = \frac{3}{5}, \quad \text{etc.}$$

berechnet. Diese genügen also um die oberen Rechnungen erleichtern zu können.