

# EINE UMFASSENDERE DARSTELLUNG JENER MERKWÜRDIGEN REIHEN, DIE AUS DEN KOEFFIZIENTEN DER POTENZEN DES BINOMS GEBILDET WERDEN \*

Leonhard Euler

§1 Zur Summation von diesen Progressionen hat mich besonders eine geeignete Bezeichnungsweise geführt, die ich gebraucht habe, um die Binomialkoeffizienten irgendeines zugehörigen Binoms kurz und knapp darzustellen. Natürlich habe ich die unbestimmte Potenz des Binoms  $(1 + z)^n$  durch die folgende Reihe dargeboten

$$(1 + z)^n = 1 + \binom{n}{1}z + \binom{n}{2}zz + \binom{n}{3}z^3 + \binom{n}{4}z^4 + \text{etc.},$$

so dass der Koeffizient der Potenz  $z^p$  demnach  $\binom{n}{p}$  ist, in welchem in der Form eines Bruches ausgedrückten Charakter die obere Zahl,  $n$ , den Exponenten der Potenz bezeichnet, die untere,  $p$ , hingegen anzeigt, der wie viele dieser Koeffizient vom Anfang aus gezählt ist. Es ist aber aus der Entwicklung dieser Potenz bekannt, dass immer folgendes gilt

---

\*Originaltitel: "Plenior expositio serierum illarum memorabilium, quae ex unciis potestatum binomii formantur", erstmals publiziert in „*Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitinae* 8 1794, pp. 32-68“, Nachdruck in „*Opera Omnia: Series 1, Volume 16,1*, pp. 193 - 234“, Eneström-Nummer E663, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz“

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}, \quad \binom{n}{3} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}$$

und im Allgemeinen

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdots \frac{n-p+1}{p};$$

des Weiteren, weil der letzte Term des entwickelten Binoms  $z^n$  ist, wird gelten

$$\binom{n}{n} = 1;$$

und weil die Koeffizienten, indem von letzten Term aus rückwärts gegangen wird, dieselbe Ordnung beibehalten wie vom Anfang aus, wird sein

$$\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1}, \quad \binom{n}{n-2} = \binom{n}{2} \quad \text{und im Allgemeinen} \quad \binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}.$$

Im Übrigen ist es daher auch offenbar, dass der Wert dieses Charakters  $\binom{n}{p}$  immer ins Nichts übergeht, sooft  $p$  entweder eine negative oder eine positive größere Zahl als  $n$  war.

§2 Nachdem diese Dinge festgelegt worden sind, habe ich eine Reihe betrachtet, deren einzelne Terme Produkte aus je zwei der Reihe nach miteinander verbundenen Binomialkoeffizienten irgendeiner Potenz sind, von welcher Art im Allgemeinen diese Progression ist

$$s = \binom{m}{0} \binom{n}{p} + \binom{m}{1} \binom{n}{p+1} + \binom{m}{2} \binom{n}{p+2} + \binom{m}{3} \binom{n}{p+3} + \text{etc.},$$

bis schließlich zu verschwindenden Termen gelangt wird, so wie auch die Terme, die dem ersten vorausgingen, verschwinden; und ich habe gezeigt, dass die Summe einer solchen Progression immer diese ist

$$\binom{m+n}{m+p} \text{ oder auch } \binom{m+n}{n-p}.$$

Der Beweis dieser Wahrheit scheint freilich so beschaffen, dass er nur für ganzzahlige Exponenten  $m$  und  $n$  gilt; aber dennoch habe ich schon gezeigt, dass dieselbe Summation auch für gebrochene Exponenten Geltung hat, wenn nur der Wert des Charakters  $\binom{m+n}{m+p}$  durch die bekannten Interpolationsmethoden in herkömmlicher Weise definiert wird.

§3 Aber diese Interpolation wird am bequemsten durch logarithmische Integralformeln unternommen. Denn es ist bekannt, wenn der Kürze wegen  $\log \frac{1}{x} = u$  gesetzt wird und die folgenden Integrale ununterbrochen von der Grenze  $x = 0$  bis hin zur Grenze  $x = 1$  erstreckt werden, dass es dann sein wird wie folgt

$$\int u \partial x = 1, \quad \int uu \partial x = 1 \cdot 2, \quad \int u^3 \partial x = 1 \cdot 2 \cdot 3, \quad \int u^4 \partial x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

und im Allgemeinen

$$\int u^p \partial x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots p.$$

Außerdem wird aber gelten

$$\int u^0 \partial x = 1.$$

Wenn aber der Exponent  $p$  irgendeine ganze negative Zahl bezeichnet, wird

der Wert des Integrals  $\int u^p \partial x$  immer unendlich sein. Weil nämlich im Allgemeinen gilt

$$\int u^{p+1} \partial x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (p+1) = (p+1) \int u^p \partial x,$$

wird umgekehrt gelten

$$\int u^p \partial x = \frac{1}{p+1} \int u^{p+1} \partial x.$$

Daher, wenn wir  $p = -1$  nehmen, geht hervor

$$\int \frac{\partial x}{u} = \frac{1}{0} \int u^0 \partial x = \frac{1}{0} = \infty.$$

Des Weiteren wird man nach Nehmen von  $p = -2$  haben

$$\int \frac{\partial x}{u^2} = -\frac{1}{1} \int \frac{\partial x}{u} = -\frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 0} = \infty.$$

Daher tritt es klar zutage, dass alle folgenden Integrale auch unendlich werden. Wann immer aber  $p$  eine gebrochene Zahl bezeichnet, kann eine solche Entwicklung nicht weiter Geltung haben, sondern wir müssen mit der transzendenten Größe zufrieden sein, welche durch die Formel  $\int u^p \partial x$  ausgedrückt wird. So ist schon seit langer Zeit bekannt, wenn  $p = -\frac{1}{2}$  war, dass dann gilt

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{u}} = \sqrt{\pi},$$

während  $\pi$  die Peripherie des Kreises bezeichnet, dessen Durchmesser = 1 ist. Daher wird also durch die zuvor erwähnte Relation sein

$$\int \partial x \sqrt{u} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

und auf die gleiche Weise ist weiter

$$\int u^{\frac{3}{2}} \partial x = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \sqrt{\pi}$$

und weiter

$$\int u^{\frac{5}{2}} \partial x = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2} \sqrt{\pi}$$

und

$$\int u^{\frac{7}{2}} \partial x = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \sqrt{\pi}$$

etc.

Wann immer aber  $p$  ein Bruch solcher Art ist, dessen Nenner größer als 2 ist, dann werden die Werte von Integralformeln dieser Art auf höher transzendente Quadraturen zurückgeführt.

§4 Nachdem diese Dinge dargestellt worden sind, wird die Summation der oben erwähnten Progression durch Integralformeln von dieser Art dargeboten werden können; leicht wird nämlich erkannt, dass gelten wird

$$s = \left( \frac{m+n}{m+p} \right) = \frac{\int u^{m+n} \partial x}{\int u^{m+p} \partial x \cdot \int u^{n-p} \partial x}.$$

Wenn nämlich  $m, n$  und  $p$  ganze positive Zahlen waren, wird selbstredend gelten

$$\int u^{m+n} \partial x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (m+n).$$

Auf die gleiche Weise wird gelten

$$\begin{aligned} \int u^{m+p} \partial x &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (m+p), \\ \int u^{n-p} \partial x &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-p); \end{aligned}$$

daher folgt, dass gelten wird

$$\frac{\int u^{m+n} \partial x}{\int u^{m+p} \partial x} = (m+p+1)(m+p+2) \cdots (m+n),$$

wo die Anzahl der Faktoren  $= n-p$  ist, welche natürlich in rückwärtiger Reihenfolge geschrieben diese sind

$$(m+n)(m+n-1)(m+n-2) \cdots (m+p+1).$$

Aber wenn diese Produkt durch nachstehenden Ausdruck dividiert wird

$$\int u^{n-p} \partial x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-p),$$

wo die Anzahl der Faktoren in gleicher Weise  $n-p$  ist, wird aufgefunden werden, dass gelten wird

$$\frac{\int u^{m+n} \partial x}{\int u^{m+p} \partial x \cdots \int u^{n-p} \partial x} = \frac{m+n}{1} \cdot \frac{m+n-1}{2} \cdot \frac{m+n-2}{3} \cdot \frac{m+n-3}{4} \cdots \frac{m+p+1}{n-p},$$

und diese Form ist offenbar der Wert dieses Charakters  $\left(\frac{m+n}{n-p}\right)$ , welcher in gleicher Weise die gesuchte Summe  $s$  anzeigt. Obwohl aber dieser Beweis auf ganze Zahlen beschränkt zu sein scheint, muss dennoch durch das Kontinuitätsprinzip der durch die Integralformeln dargebotene Ausdruck auch mit der Wahrheit konform bleiben, welche gebrochenen Zahlen auch immer für die Buchstaben  $m$ ,  $n$  und  $p$  angenommen werden.

§5 Diese Dinge gehen fast drauf zurück, was ich vor nicht allzu langer Zeit über die Summation von Progressionen dieser Art mitgeteilt habe. Nun ist es mit aber vorgelegt, nach denselben Summen mit einer vollkommen verschiedenen Methode, von welcher ich schon einige Beispiele gegeben habe, zu suchen; auf diese Weise wird nicht nur die hier angegebene Summation im höchsten Maße bestätigt werden, sondern es werden auch für die Fälle gebrochener Exponenten algebraische Kurven aufgefunden werden, von deren Quadratur die Summationen abhängen, obwohl zuvor diese Summen durch Quadraturen von transzendenten Kurven ausgedrückt wurden, so dass diese neue Methode einen sehr großen Nutzen für die Analysis mit sich bringen wird; sie ist aber auf die freilich hinreichend bekannte Reduktion von Integralformeln gestützt, welche ich jedoch zu unserem Nutzen in den folgenden Lemmata anwenden werde.

### LEMMA 1

§6 Wenn festgelegt wird

$$V = x^a(1 - x^b)^{\frac{c}{b}},$$

wird gelten

$$\log V = a \log x + \frac{c}{b} \log(1 - x^b)$$

und durch Differenzieren

$$\frac{\partial V}{V} = \frac{a \partial x}{x} - \frac{c x^{b-1} \partial x}{1-x^b};$$

daher werden wir, indem mit  $V$  multipliziert und wiederum integriert wird, zu dieser Reduktion gelangen

$$V = x^a(1-x^b)^{\frac{c}{b}} = a \int x^{a-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}} - c \int x^{a+b-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c-b}{b}}$$

und daher leiten wir die zwei folgenden Reduktionen ab

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \int x^{a-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}} = \frac{1}{a} x^a (1-x^b)^{\frac{c}{b}} + \frac{c}{a} \int x^{a+b-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}-1}, \\ \text{II.} \quad & \int x^{a+b-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = -\frac{1}{c} x^a (1-x^b)^{\frac{c}{b}} + \frac{a}{c} \int x^{a-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}}. \end{aligned}$$

#### KOROLLAR

§7 Wenn daher diese Integrale von der Grenze  $x = 0$  bis hin zur Grenze  $x = 1$  erstreckt werden müssen und alle Exponenten  $a, b$  etc. positiv waren, dann wird in jeder der beiden Reduktionen das algebraische Glied vollkommen aus dem Vergleich beseitigt, was so nach Setzen von  $x = 0$  wie  $x = 1$  verschwindet, und die beiden gefundenen Reduktionen werden sich so verhalten

$$\text{I.} \quad \int x^{a-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}} = \frac{c}{a} \int x^{a+b-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}-1}$$



und

$$\text{II. } \int x^{a+b-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \frac{a}{c} \int x^{a-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}}.$$

Wenn aber die Exponenten  $a$ ,  $b$  und  $c$  nicht positiv waren, kann in diesen Reduktionen das algebraische oder absolute Glied nicht ausgelassen werden, weil es ja entweder im Fall  $x = 0$  oder im Fall  $x = 1$  ins Unendliche wächst. Hier wir aber immer der Exponent  $b$  als positiv angesehen werden können.

## LEMMA 2

§8 Nachdem wie zuvor gesetzt worden ist

$$V = x^a (1-x^b)^{\frac{c}{b}},$$

wenn die beiden Brüche, welche wir für  $\frac{\partial V}{V}$  gefunden haben, auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden, werden wir haben

$$\frac{\partial V}{V} = \frac{a \partial x - (a+c)x^b \partial x}{x(1-x^b)}.$$

Wenn wir daher nun wiederum mit  $V$  multiplizieren und integrieren, werden wir zu dieser Gleichung gelangen

$$V = x^a (1-x^b)^{\frac{c}{b}} = a \int x^{a-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} - (a+c) \int x^{a+b-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}-1},$$

woher diese zwei Gleichungen folgen

$$\text{I. } \int x^{a-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \frac{1}{a} x^a (1-x^b)^{\frac{c}{b}} + \frac{a+c}{a} \int x^{a+b-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}-1}$$

und

$$\text{II. } \int x^{a+b-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \frac{-1}{a+c} x^a (1-x^b)^{\frac{c}{b}} + \frac{a}{a+c} \int x^{a-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}-1}.$$

### KOROLLAR

§9 Wenn daher diese Integrale, so wie wir im Folgenden immer annehmen werden, von der Grenze  $x = 0$  bis hin zur Grenze  $x = 1$  erstreckt werden müssen und die Exponenten  $a$  etc. positive Zahlen waren, wird es möglich sein, die absoluten Glieder auszulassen, so dass dann die folgenden Reduktionen Geltung haben werden

$$\text{I. } \int x^{a-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \frac{a+c}{a} \int x^{a+b-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}-1}$$

und

$$\text{II. } \int x^{a+b-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \frac{a}{a+c} \int x^{a-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}-1}.$$

### LEMMA 3

§10 Nachdem erneut festgelegt worden ist

$$V = x^a (1-x^b)^{\frac{c}{b}},$$

weil wir ja oben gefunden haben

$$\frac{\partial V}{V} = \frac{a\partial x - (a+c)x^b\partial x}{x(1-x^b)},$$

wenn wir hier anstelle des ersten Gliedes  $a\partial x$  entsprechend  $(a+c)\partial x - c\partial x$  schreiben, wird werden

$$\frac{\partial V}{V} = \frac{\partial x(a+c)}{x} - \frac{c\partial x}{x(1-x^b)},$$

welche Gleichung mit  $V$  multipliziert und integriert liefert

$$V = x^a(1-x^b)^{\frac{c}{b}} = (a+c) \int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}} - c \int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1},$$

woher die zwei folgenden Reduktionen erhalten werden

$$\text{I. } \int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}} = \frac{1}{a+c}x^a(1-x^b)^{\frac{c}{b}} + \frac{a}{a+c} \int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1}$$

und

$$\text{II. } \int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = -\frac{1}{c}x^a(1-x^b)^{\frac{c}{b}} + \frac{a+c}{c} \int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}}.$$

#### KOROLLAR

**§11** Wenn daher also die Exponenten  $a$  etc. positiv waren und die Integrale von  $x = 0$  bis zu  $x = 1$  erstreckt werden müssen, werden nach Weglassen des absoluten Gliedes diese Reduktionen entspringen

$$\text{I. } \int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}} = \frac{c}{a+c} \int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1}$$

und

$$\text{II. } \int x^{a-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \frac{a+c}{c} \int x^{a-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}}.$$

## PROBLEM 1

**§12** Wenn, nachdem die Integration von  $x = 0$  bis hin zu  $x = 1$  erstreckt worden ist, die Exponenten  $a$  und  $c$  positiv waren und der Wert nachstehender Integralformel bekannt war

$$\int x^{a-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \Delta,$$

durch denselben alle in dieser allgemeinen Form enthaltenen Integralformeln auszudrücken

$$\int x^{a+ib-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}-1}.$$

## LÖSUNG

Hier wird die zweite im Korollar des zweiten Lemmas angegebene Reduktion zu gebrauchen sein, welche ist

$$\int x^{a+b-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \frac{a}{a+c} \int x^{a-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}-1},$$

wo wir ununterbrochen den Exponenten  $a$  um die Zahl  $b$  vermehren wollen; und weil nach der Annahme gilt

$$\int x^{a-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \Delta,$$

werden die folgenden Reduktionen aufgefunden:

$$\begin{aligned}
 \text{I. } & \int x^{a+b-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \frac{a}{a+c} \cdot \Delta, \\
 \text{II. } & \int x^{a+2b-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \frac{a}{a+c} \cdot \frac{a+b}{a+b+c} \cdot \Delta, \\
 \text{III. } & \int x^{a+3b-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \frac{a}{a+c} \cdot \frac{a+b}{a+b+c} \cdot \frac{a+2b}{a+2b+c} \cdot \Delta, \\
 \text{IV. } & \int x^{a+4b-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \frac{a}{a+c} \cdot \frac{a+b}{a+b+c} \cdot \frac{a+2b}{a+2b+c} \cdot \frac{a+3b}{a+3b+c} \cdot \Delta \\
 & \text{etc.,}
 \end{aligned}$$

deren Fortschrittgsgesetz offenbar ins Auge fällt.

#### KOROLLAR 1

§13 Wenn daher  $a + c = b$  und deshalb  $c = b - a$  war, wird gelten

$$\Delta = \int \frac{x^{a-1} \partial x}{(1-x^b)^{\frac{a}{b}}},$$

wo freilich festzuhalten ist, dass der Exponent  $a$  nicht nur eine positive Größe, sondern auch kleiner als  $b$  sein muss, weil auch  $c$  positiv sein muss. Aber diese Formel kann angenehm auf die Quadratur des Kreises zurückgeführt werden, um was zu zeigen, festgelegt werde

$$\frac{x}{\sqrt[b]{1-x^b}} = y,$$

dass nach Setzen von  $x = 0$  auch  $y = 0$  wird; aber nach Setzen von  $x = 1$  wird  $y = \infty$  werden; dann wird aber sein

$$\Delta = \int \frac{y^a \partial x}{x}$$

und nach Potenzieren mit  $b$  wird sein

$$y^b = \frac{x^b}{1 - x^b},$$

woher aufgefunden wird

$$x^b = \frac{y^b}{1 + y^b},$$

und daher wird durch Logarithmieren gelten

$$b \log x = b \log y - \log(1 + y^b),$$

woher durch Differenzieren erschlossen wird

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial y}{y} - \frac{y^{b-1} \partial y}{1 + y^b} = \frac{\partial y}{y(1 + y^b)},$$

nach Einsetzen welches Wertes gelten wird

$$\Delta = \int \frac{y^{b-1} \partial y}{1 + y^b};$$

weil dieses Integral von  $y = 0$  bis  $y = \infty$  erstreckt werden muss, so bemerke ich, dass ich bei anderer Gelegenheit gezeigt habe, dass sein Wert dieser ist

$$= \frac{\pi}{b \sin \frac{a\pi}{b}}.$$

## KOROLLAR 2

§14 Deswegen, wenn wir im Allgemeinen  $c = b - 1$  setzen, so dass gilt

$$\Delta = \frac{\pi}{b \sin \frac{a\pi}{b}},$$

werden sich die einzelnen im Problem gefundenen Reduktionen so verhalten :

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \frac{a}{b} \cdot \Delta, \\ \text{II.} \quad & \int \frac{x^{a+2b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a+b}{2b} \cdot \Delta, \\ \text{III.} \quad & \int \frac{x^{a+2b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a+b}{3b} \cdot \frac{a+2b}{3b} \cdot \Delta, \\ \text{IV.} \quad & \int \frac{x^{a+2b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a+b}{4b} \cdot \frac{a+2b}{3b} \cdot \frac{a+3b}{4b} \cdot \Delta \\ & \text{etc.,} \end{aligned}$$

wo es ersichtlich ist, dass die Koeffizienten von  $\Delta$  vollkommen mit den Binomialkoeffizienten des Ausdruckes  $(1-x^b)^{-\frac{a}{b}}$  übereinstimmen, welcher natürlich durch eine Entwicklung liefert

$$1 + \frac{a}{b}x^b + \frac{a}{b} \cdot \frac{a+b}{2b}x^{2b} + \frac{a}{b} \cdot \frac{a+b}{2b} \cdot \frac{a+2b}{3b}x^{3b} + \text{etc.}$$

## PROBLEM 2

Wenn wir daher der Kürze wegen festlegen

$$(1 - x^b)^{-\frac{a}{b}} = 1 + Ax^b + Bx^{2b} + Cx^{3b} + \text{etc.},$$

so dass gilt

$$A = \frac{a}{b}, \quad B = \frac{a}{b} \cdot \frac{a+b}{2b}, \quad C = \frac{a}{b} \cdot \frac{a+b}{2b} \cdot \frac{a+2b}{3b} \quad \text{etc.},$$

die Summe dieser Reihe ausfindig zu machen

$$S = 1 + A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + \text{etc.}$$

## LÖSUNG

Weil also gilt

$$(1 - x^b)^{-\frac{a}{b}} = 1 + Ax^b + Bx^{2b} + Cx^{3b} + \text{etc.},$$

wollen wir auf beiden Seiten mit nachstehendem Ausdruck multiplizieren

$$\frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}}$$

und durch Integrieren werden wir haben

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{2a}}} &= \int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} + A \int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} + \int \frac{x^{a+2b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} \\ &+ C \int \frac{x^{a+3b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} + \text{etc.} \end{aligned}$$



Aber wir haben gelehrt, all diese Integralformeln durch die Größe  $\Delta$  auszudrücken, wenn welche Werte eingesetzt werden, werden wir zur folgenden Reihe gelangen:

$$\int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{2a}}} = \Delta + A \cdot \frac{a}{b} \cdot \Delta + B \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a+b}{2b} \cdot \Delta + C \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a+b}{2b} \cdot \frac{a+2b}{3b} \cdot \Delta + \text{etc.},$$

welche Reihe natürlich auf diese reduziert wird

$$\Delta(1 + A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + \text{etc.}),$$

woher die gesuchte Summe unserer vorgelegten Reihe diese sein wird

$$S = \frac{1}{\Delta} \int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{2a}}},$$

wobei gilt

$$\Delta = \frac{\pi}{b \sin \frac{a\pi}{b}}.$$

#### KOROLLAR 1

**§16** Wir wollen hier zuerst den Fall betrachten, in welchem  $b = 2$  ist, und weil  $a < b$  genommen werden muss, sei  $a = 1$ , woher  $\Delta = \frac{\pi}{2}$  wird; dann werden wir aber für die Reihe selbst haben

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}, \quad c = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}, \quad D = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \quad \text{etc.},$$

und die Summe der Reihe

$$1 + A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + \text{etc.}$$

wird sein

$$S = \frac{2}{\pi} \int \frac{\partial x}{1 - xx}.$$

Es ist aber

$$\int \frac{\partial x}{1 - xx} = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x},$$

welcher Wert nach Setzen von  $x = 1$  ins Unendliche übergeht. Natürlich ist die Summe dieser Reihe

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2 + \text{etc.}$$

in der Tat unendlich, wie ich bei anderer Begebenheit gezeigt habe.

#### KOROLLAR 2

**§17** Wir wollen auch den Fall  $b = 3$  betrachten und wollen  $a = 1$  nehmen, dass der Exponent  $\frac{2a}{b} = \frac{2}{3}$  immer noch kleiner als die Einheit ist. In diesem Fall werden wir also für die Reihe selbst haben

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6}, \quad C = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9}, \quad D = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12},$$

$$E = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{13}{15} \quad \text{etc.,}$$

und wegen

$$\Delta = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

wird die Summe der Reihe

$$1 + A^2 + B^2 + C^2 + \text{etc.}$$

sein

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}},$$

welche sich also nun durch die Quadratur einer algebraischen Kurve ausdrücken lässt, deren Abszisse  $x$  dieser Ordinate entspricht

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}},$$

für welchen Fall die zuerst angegebene Methode eine Quadratur einer transzendenten Kurve liefert.

#### BEMERKUNG

§18 Dieser Ausdruck für die Summe der Reihe

$$1 + A^2 + B^2 + C^2 + \text{etc.}$$

kann nur Geltung haben, wenn der Exponent  $a$  eine positive Zahl war, in welchem Fall also die Potenz des Binoms  $1 - x^b$  negativ ist und daher die Reihe  $1 + A^2 + B^2 + C^2 + \text{etc.}$  ins Unendliche läuft. Daher kann also für die Binomialkoeffizienten des entsprechenden zu einer positiven Potenz erhobenen Binoms nichts geschlossen werden, obwohl sich dennoch dieser Fall mit der

ersten Methode von selbst gezeigt hat. Des Weiteren, weil die Summe dieser Reihe gefunden worden ist als

$$S = \frac{1}{\Delta} \int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{2a}}}$$

während gilt

$$\Delta = \int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}}$$

ist es ersichtlich, wenn  $a = b$  wäre, in welchem Fall  $A = 1, B = 1, C = 1$  etc. wäre, dass dann die Summe der Quadrate offenbar unendlich sein wird, was um Vieles mehr geschähe, wenn  $a > b$  wäre. Ja wir haben sogar, wenn  $2a = b$  oder  $a = \frac{1}{2}b$  wäre, im ersten Korollar gesehen, dass auch diese Summe unendlich ist. Deswegen wird die hier gefundene Summation auf die engen Grenzen 1°.  $a > 0$  und 2°.  $a < \frac{1}{2}b$  beschränkt. Wie aber daher auch die Summen bestimmt werden können, wann immer  $a$  eine negative Zahl ist, werden wir im später Folgenden sehen.

### PROBLEM 3

§19 Wenn wie zuvor bleibt

$$(1 - x^b)^{-\frac{a}{b}} = 1 + Ax^b + Bx^{2b} + Cx^{3b} + \text{etc.}$$

und darüber hinaus festgelegt wird

$$(1 - x^b)^{-\frac{a}{b}} = 1 + \mathfrak{A}x^b + \mathfrak{B}x^{2b} + \mathfrak{C}x^{3b} + \text{etc.},$$

so dass gilt

$$\mathfrak{A} = \frac{\alpha}{b}, \quad \mathfrak{B} = \frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\alpha + b}{2b}, \quad \mathfrak{C} = \frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\alpha + b}{2b} \cdot \frac{\alpha + 2b}{3b} \quad \text{etc.},$$

Die Summe der aus diesen zwei Reihen von Koeffizienten zusammengesetzten Reihe zu finden

$$S = 1 + \mathfrak{A}A + \mathfrak{B}B + \mathfrak{C}C + \mathfrak{D}D + \text{etc.}$$

### LÖSUNG

Nachdem wie im vorhergehenden Problem festgelegt worden ist

$$\int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \Delta,$$

so dass gilt

$$\Delta = \frac{\pi}{b \sin \frac{a\pi}{b}},$$

wenn freilich  $a > 0$  war, werden die dort verwendeten Reduktionen geben

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} &= A\Delta, \\ \int \frac{x^{a+2b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} &= B\Delta, \\ \int \frac{x^{a+3b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} &= C\Delta, \\ \int \frac{x^{a+4b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} &= D\Delta \end{aligned}$$

etc.

Weil also gilt

$$(1 - x^b)^{-\frac{\alpha}{b}} = 1 + \mathfrak{A}x^b + \mathfrak{B}x^{2b} + \mathfrak{C}x^{3b} + \text{etc.},$$

wenn wir auf beiden Seiten mit nachstehendem Ausdruck multiplizieren

$$\frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}}$$

und von der Grenze  $x = 0$  bis zu  $x = 1$  integrieren, werden wir zu folgenden Reihe gelangen:

$$\int \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}} = \Delta + \mathfrak{A}A\Delta + \mathfrak{B}B\Delta + \mathfrak{C}C\Delta + \text{etc.},$$

welches die gesuchte Reihe mit  $\Delta$  multipliziert selbst ist, und daher ist ihre Summe  $= \Delta S$ . Daher schließen wir also umgekehrt, dass gelten wird

$$S = 1 + \mathfrak{A}A + \mathfrak{B}B + \mathfrak{C}C + \text{etc.} = \frac{1}{\Delta} \int \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}}.$$

Diese Summation kann aber in gleicher Weise nur Geltung haben, wenn  $a > 0$  ist. Aber in der Tat wird uns hier bezüglich des Exponenten  $\alpha$  nichts vorgeschrieben; daher werden sich für ihn so positive wie negative Zahlen annehmen lassen. Hier taucht nur das zu Bemerkende auf: Wenn nicht  $\alpha + a < b$  war, dann ist die Summe der vorgelegten Reihe immer unendlich groß.

#### KOROLLAR 1

§20 Weil ja  $a$  immer der Grenzen 0 und  $b$  enthalten sein muss, wollen wir  $b = 2$  annehmen und es muss  $a = 1$  genommen werden, woher wird

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \quad C = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \quad D = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \quad \text{etc.};$$

außerdem werden wir aber haben

$$\Delta = \int \frac{\partial x}{\sqrt{1 - xx}} = \frac{\pi}{2}.$$

Daher wird also, welcher Wert auch immer  $\alpha$  zugeteilt wird, die Summe der gesuchten Reihe

$$A = 1 + \frac{1}{2}\mathfrak{A} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\mathfrak{B} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\mathfrak{C} + \text{etc.}$$

sein

$$S = \frac{2}{\pi} \int \frac{\partial x}{\sqrt{(1 - xx)^{1+\alpha}}}.$$

Daher tritt es klar zu tage, solange  $1 + \alpha < 2$  und daher  $\alpha < 1$  war, dass die Summe immer endlich sein wird.

#### KOROLLAR 2

§21 Während also  $a = 1$  und  $b = 2$  bleibt, weil  $\alpha < 1$  sein muss, wollen wir gewisse Fälle entwickeln.

I. Es sei  $\alpha = 0$ .

Daher wird werden

$$\mathfrak{A} = 0, \quad \mathfrak{B} = 0, \quad \mathfrak{C} = 0 \quad \text{etc.}$$

und so wird die zu summierende Reihe  $S = 1$  sein, unsere Formel liefert aber

$$S = \frac{2}{\pi} \int \frac{\partial x}{\sqrt{1-xx}}.$$

Es ist aber für die Grenzen der vorgeschriebenen Summation

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{\pi}{2},$$

woher  $S = 1$  wird, was überaus passend ist.

II. Es sei  $\alpha = -1$ .

In diesem Fall wird werden

$$\mathfrak{A} = -\frac{1}{2}, \quad \mathfrak{B} = -\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}, \quad \mathfrak{C} = -\frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \quad \text{etc.},$$

woher die zu summierende Reihe sein wird

$$S = 1 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} - \text{etc.}$$

Aber unsere Formel liefert in der Tat

$$S = \frac{2}{\pi} \int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-xx)^0}} = \frac{2}{\pi},$$



welche Summe außerordentlich mit der übereinstimmt, die wir aus den logarithmischen Integralen gefunden haben

III. Es sei  $\alpha = -2$ .

Es wird hier werden

$$\mathfrak{A} = -1, \quad \mathfrak{B} = 0, \quad \mathfrak{C} = 0 \quad \text{etc.}$$

Die zu summierende Reihe wird also sein

$$S = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2},$$

unsere Integralformel liefert hingegen

$$S = \frac{2}{\pi} \int \partial x \sqrt{1 - xx}.$$

Nun haben wir aber aus dem Korollar des dritten Lemmas diese Reduktion

$$\int x^{a-1} \partial x (1 - x^b)^{\frac{c}{b}} = \frac{c}{a+c} \int x^{a-1} \partial x (1 - x^b)^{\frac{c}{b}-1},$$

welche auf unseren Fall durch Setzen von  $a = 1, b = 2, c = 1$  gibt

$$\int \partial x \sqrt{1 - xx} = \frac{1}{2} \int \frac{\partial x}{\sqrt{1 - xx}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4};$$

daher wird also  $S = \frac{1}{2}$ .

IV. Es sei  $\alpha = -3$ .

In diesem Fall wird werden

$$\mathfrak{A} = -\frac{3}{2}, \quad \mathfrak{B} = +\frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 4}, \quad \mathfrak{C} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \quad \mathfrak{D} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}, \quad \mathfrak{E} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \quad \text{etc.},$$

woher die zu summierende Reihe sein wird

$$S = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{3 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \text{etc.};$$

aber unsere Integralformel liefert hingegen

$$S = \frac{2}{\pi} \int \partial x (1 - xx).$$

Es ist aber für die festgelegten Integrationsgrenzen

$$\int \partial x (1 - xx) = \frac{2}{3},$$

weswegen die gesuchte Summe sein wird

$$S = \frac{4}{3\pi}.$$

V. Es sei  $\alpha = -4$ .

In diesem Fall wird werden

$$\mathfrak{A} = -2, \quad \mathfrak{B} = 1, \quad \mathfrak{C} = 0, \quad \mathfrak{D} = 0 \quad \text{etc.},$$

woher die zu summierende Reihe sein wird

$$S = 1 - 1 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8};$$

aber die Integralformel hingegen liefert

$$S = \frac{2}{\pi} \int \partial x \sqrt{(1 - xx)^3} = \frac{2}{\pi} \int \partial x (1 - xx)^{\frac{3}{2}}.$$

Nun werden wir aber durch die in Fall III. verwendete Reduktion, nachdem  $a = 1$ ,  $b = 2$  und  $c = 3$  genommen werden ist, haben

$$\int \partial x (1 - xx)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4} \int \partial x \sqrt{1 - xx}.$$

Wir haben aber gesehen, dass gilt

$$\int \partial x \sqrt{1 - xx} = \frac{\pi}{4},$$

woher sein wird

$$\int \partial x (1 - xx)^{\frac{3}{2}} = \frac{3\pi}{16},$$

woher die gesuchte Summe als  $S = \frac{3}{8}$  erschlossen wird, was vollkommen übereinstimmt.

## PROBLEM 4

§22 Nachdem so die lateinischen Buchstaben  $A, B, C, D$  etc. wie die germanischen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$  etc. und dieselben Werte beibehalten worden sind, die wir selbigen im vorhergehenden Problem zugeschrieben haben, die Summen der folgenden aus jenen zusammengesetzten Reihen ausfindig zu machen:

$$S' = A + \mathfrak{A}B + \mathfrak{B}C + \mathfrak{C}D + \mathfrak{D}E + \text{etc.},$$

$$S'' = B + \mathfrak{A}C + \mathfrak{B}D + \mathfrak{C}E + \mathfrak{D}F + \text{etc.},$$

$$S''' = C + \mathfrak{A}D + \mathfrak{B}E + \mathfrak{C}F + \mathfrak{D}G + \text{etc.}$$

etc.

## LÖSUNG

Nachdem wiederum

$$\Delta = \int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}}$$

gesetzt worden ist, haben wir im vorhergehenden Problem gesehen, dass gilt

$$\int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = A \Delta,$$

$$\int \frac{x^{a+2b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = B \Delta,$$

$$\int \frac{x^{a+3b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = C \Delta$$

etc.

Weil wir nun festgelegt haben

$$(1 - x^b)^{-\frac{\alpha}{b}} = 1 + \mathfrak{A}x^b + \mathfrak{B}x^{2b} + \mathfrak{C}x^{3b} + \text{etc.},$$

wollen auf beiden Seiten mit nachstehendem Ausdruck multiplizieren

$$\frac{x^{a+b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}}$$

und durch Integrieren werden wir die folgende Form erlangen:

$$\int \frac{x^{a+b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = A\Delta + \mathfrak{A}B\Delta + \mathfrak{B}C\Delta + \mathfrak{C}D\Delta + \mathfrak{D}E\Delta + \text{etc.},$$

welche Reihe offenbar  $= \Delta S'$  ist. Daher schließen wir also, dass gelten wird

$$S' = \frac{1}{\Delta} \int \frac{x^{a+b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}},$$

wo wie bisher gilt

$$\Delta = \int \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \frac{\pi}{b \sin \frac{a\pi}{b}}.$$

Für die zweite zu findende Reihe werde jene Form

$$(1 - x^b)^{-\frac{\alpha}{b}} = 1 + \mathfrak{A}x^b + \mathfrak{B}x^{2b} + \mathfrak{C}x^{3b} + \text{etc.},$$

mit dieser Formel multipliziert

$$\frac{x^{a+2b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}}$$

und nach Integrieren der einzelnen Terme werden wir zur folgenden Form geführt werden:

$$\int \frac{x^{a+2b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}} = B\Delta + \mathfrak{A}C\Delta + \mathfrak{B}E\Delta + \mathfrak{C}F\Delta + \mathfrak{D}G\Delta + \text{etc.},$$

welches die zweite vorgelegte Reihe, mit  $\Delta$  multipliziert und daher  $\Delta S''$  ist, woher wir schließen, dass sein wird

$$S'' = \frac{1}{\Delta} \int \frac{x^{a+2b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}}.$$

Aus diesen Dingen wird schon zur Genüge erkannt, auf welche Weise die Summen aller folgenden vorgelegten Reihen angegeben werden können; es wird nämlich aufgefunden wie folgt

$$\begin{aligned} S''' &= \frac{1}{\Delta} \int \frac{x^{a+3b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}} \\ S^{IV} &= \frac{1}{\Delta} \int \frac{x^{a+4b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}} \\ S^V &= \frac{1}{\Delta} \int \frac{x^{a+5b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

und daher wird weiter im Allgemeinen gefolgert, dass gelten wird

$$S^{(n)} = \frac{1}{\Delta} \int \frac{x^{a+nb-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}}$$

Aber hier hat noch die oben vorgeschriebene Bedingung Geltung, nach welcher der Wert des Exponenten  $a$  zwischen den Grenzen 0 und  $b$  enthalten sein muss. Des Weiteren muss aber über diesen Exponenten  $a$  in gleicher Weise angemerkt werden, dass diese Summen nur endlich sein können, wenn  $a + a < b$  ist. Deswegen wollen wir nun betrachten, wie diese Summen auch an andere Werte des Exponenten  $a$  angepasst werden müssen.

## PROBLEM 5

§23 Wenn der Exponent  $a$  eine negative Zahl war, dennoch kleiner als  $b$ , so dass  $a + b > 0$  ist, die Summe dieser Reihe zu finden

$$S = 1 + \mathfrak{A}A + \mathfrak{B}B + \mathfrak{C}C + \mathfrak{D}D + \text{etc.},$$

wo die Großbuchstaben dieselben Werte beibehalten wie bisher, natürlich

$$\begin{aligned} (1 - x^b)^{-\frac{a}{b}} &= 1 + Ax^b + Bx^{2b} + Cx^{3b} + Dx^{4b} + \text{etc.}, \\ (1 - x^b)^{-\frac{a}{b}} &= 1 + \mathfrak{A}x^b + \mathfrak{B}x^{2b} + \mathfrak{C}x^{3b} + \mathfrak{D}x^{4b} + \text{etc.} \end{aligned}$$

## LÖSUNG

Weil der Exponent  $a + b$  positiv ist, wollen wir die oben in §14 dargebotenen Reduktionen von der zweiten aus beginnen und wollen nun setzen

$$\int \frac{x^{a+b-1} dx}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \Delta',$$

woher die oben dargebotenen Reduktionen auf die folgenden zurückgeführt

werden werden:

$$\int \frac{x^{a+2b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \frac{a+b}{2b} \Delta' = \frac{b}{a} B \Delta'$$

$$\int \frac{x^{a+3b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \frac{a+b}{2b} \cdot \frac{a+2b}{3b} \Delta' = \frac{b}{a} C \Delta'$$

$$\int \frac{x^{a+4b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \frac{a+b}{2b} \cdot \frac{a+2b}{3b} \cdot \frac{a+3b}{4b} \Delta' = \frac{b}{a} D \Delta'$$

$$\int \frac{x^{a+5b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \frac{a+b}{2b} \cdot \frac{a+2b}{3b} \cdot \frac{a+3b}{4b} \cdot \frac{a+4b}{5b} \Delta' = \frac{b}{a} E \Delta'$$

etc.

Nachdem diese Dinge im Voraus bemerkt worden sind, wollen wir diese Gleichung betrachten

$$(1-x^b)^{-\frac{a}{b}} = 1 + \mathfrak{A}x^b + \mathfrak{B}x^{2b} + \mathfrak{C}x^{3b} + \mathfrak{D}x^{4b} + \text{etc.},$$

die wir mit

$$\frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}}$$

multiplizieren und integrieren wollen, und wir werden die folgende Gleichung erhalten:

$$\int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+a}}} - \int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}}$$

$$= \mathfrak{A} \Delta' + \frac{b}{a} \mathfrak{B} B \Delta' + \frac{b}{a} \mathfrak{C} C \Delta' + \frac{b}{a} \mathfrak{D} D \Delta' + \text{etc.},$$



wo wir anstelle des ersten Termes  $\mathfrak{A}\Delta'$  den Ausdruck  $\frac{b}{a}\mathfrak{A}\Delta'$  schreiben wollen, dass die Reihe in diese Form gebracht wird

$$\frac{b}{a}\Delta'(\mathfrak{A}A + \mathfrak{B}B + \mathfrak{C}C + \mathfrak{D}D + \text{etc.}) = \frac{b}{a}\Delta'(S - 1).$$

Weil ja aber der Exponent  $a$  negativ angenommen wird, woher die beiden Integralformeln unendlich werden würden, wollen wir die im Lemma I angegebene Reduktion gebrauchen

$$\int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}} = \frac{1}{a}x^a(1-x^b)^{\frac{c}{b}} + \frac{c}{b}\int x^{a+b-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1}$$

und nach der Anwendung auf die erste Integralformel, indem  $c = -a - \alpha$  genommen wird, wird sein

$$\int \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}} = \frac{1}{a}x^a(1-x^b)^{\frac{-a-\alpha}{b}} - \frac{a+\alpha}{a}\int x^{a+b-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{-a-\alpha-b}{b}}.$$

Für unsere andere Integralformel muss aber  $c = -a$  genommen werden und es wird werden

$$\int \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \frac{1}{a}x^a(1-x^b)^{\frac{-a}{b}} - \int x^{a+b-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{-a-b}{b}}.$$

Weil nun der Exponent  $a + b$  positiv ist, werden wir durch die Reduktion im Korollar des Lemmas III, welche war

$$\int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \frac{a+c}{c}\int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}},$$

für den zweiten Fall der Formel haben

$$\int x^{a+b-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{-a-b}{b}} = -\frac{b}{a} \int x^{a+b-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{-a}{b}} = -\frac{b}{a} \Delta'$$

und so wird unsere zweite Integralformel so ausgedrückt werden, dass gilt

$$\int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \frac{1}{a} x^a (1-x^b)^{\frac{-a}{b}} + \frac{b}{a} \Delta',$$

welcher Wert von der ersten Integralformel subtrahiert für die linke Seite diesen Ausdruck zurücklässt

$$\frac{1}{a} x^a (1-x^b)^{\frac{-a-\alpha}{b}} - \frac{a+\alpha}{a} \int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+b}}} - \frac{1}{a} x^a (1-x^b)^{\frac{-a}{b}} - \frac{b}{a} \Delta'.$$

Hier geht freilich, weil ja  $a$  negativ angenommen wird, jedes der beiden absoluten Glieder nach Setzen von  $x = 0$  ins Unendliche über; aber man stelle die zwei zusammengenommen so dar

$$\frac{1}{a} x^a (1-x^b)^{\frac{-a}{b}} \left( (1-x^b)^{\frac{-\alpha}{b}} - 1 \right),$$

welche Form für ein unendlich klein genommenes  $x$  wegen

$$(1-x^b)^{\frac{-\alpha}{b}} = 1 + \frac{\alpha}{b} x^b + \text{etc.}$$

in diese verwandelt wird

$$\frac{\alpha}{ab} x^{a+b} (1-x^b)^{\frac{-a}{b}},$$

welche Form wegen  $a + b > 0$  nach Setzen von  $x = 0$  natürlich verschwindet, wie es die Integrationsbedingung erfordert. Nachdem aber  $x = 0$  gesetzt worden ist, verschwindet auch das ganze absolute Glied; deswegen werden wir für die rechte Seite unserer Gleichung haben

$$-\frac{b}{a}\Delta' - \frac{a + \alpha}{a} \int \frac{x^{a+b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+b}}};$$

wenn diesem die linke Seite  $\frac{b}{a}\Delta'(S-1)$  gleich gesetzt wird, werden wir diesen Wert erlangen

$$S = -\frac{a + \alpha}{b\Delta'} \int \frac{x^{a+b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+b}}},$$

welcher Ausdruck schon für alle Fälle gilt, in denen  $a + b$  eine positive Zahl ist.

#### KOROLLAR 1

§24 Weil wir je im vorhergehenden Paragraphen gefunden haben

$$\int \frac{x^{a+b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+b}}} = -\frac{b}{a}\Delta',$$

ist es bekannt, dass der Wert dieser Integralformel von  $x = 0$  bis hin zu  $x = 1$  erstreckt auf diese Form reduziert wird

$$\frac{\pi}{b \sin \frac{(a+b)}{b} \pi},$$

woher es die im Charakter  $\Delta'$  enthaltene Größe bekannt wird, die natürlich sein wird

$$\Delta' = -\frac{-\pi a}{bb \sin \frac{(a+b)}{b} \pi},$$

welcher Wert so reduziert wird

$$\Delta' = \frac{\pi a}{bb \sin \frac{a\pi}{b}}.$$

## KOROLLAR 2

§25 Wir wollen aber wieder anstelle von  $\Delta'$  die Integralformel selbst einsetzen, woher es hervorging, und die gefundene Summe  $S$  wird auf diese Weise durch zwei Integralformeln ausgedrückt werden

$$S = -\frac{a + \alpha}{b} \int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+b}}} : \int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}},$$

welche auch auf diese Weise ausgedrückt werden kann

$$S = \frac{a + \alpha}{a} \int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+b}}} : \int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+b}}},$$

welcher Ausdruck also gilt, wann immer  $a + b > 0$  ist, auch wenn  $a$  unter Umständen negativ ist; aber wir haben in der Tat für die Fälle, in denen der Exponent  $a$  selbst positiv ist, für dieselbe Reihe [§19] diese Summe gefunden

$$S = \int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}} : \int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}}.$$

### KOROLLAR 3

§26 Wenn wir daher diese zwei Formel noch einmal genauer anschauen, werden wir schnell entdecken, dass die hier gefundene Form aus der vorhergehenden leicht mit Hilfe der im Korollar des ersten Lemmas bewiesenen Reduktion deriviert werden kann, wo war

$$\int x^{a-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}} = \frac{c}{a} \int x^{a+b-1} \partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}-1}.$$

Wenn wir daher nämlich diese Reduktion auf die oben für  $S$  gefundene Form anwenden, wird für den Zähler  $c = -a - \alpha$  sein, woher der Zähler selbst auf diese Weise transformiert wird

$$\int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}} = -\frac{a+\alpha}{a} \int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+b}}}.$$

Des Weiteren wird hingegen für den Nenner  $c = -a$  und daher der Nenner selbst sein

$$\int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = - \int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+b}}};$$

dort ist es ersichtlich, wenn der Zähler durch den Nenner dividiert wird, dass dann der Wert selbst resultiert, welchem wir in diesem Problem erlangt haben.

### BEMERKUNG

§27 Obwohl also der oben für die Summation der nachstehenden Reihe gefundene Ausdruck

$$S = 1 + \mathfrak{A}A + \mathfrak{B}B + \mathfrak{C}C + \text{etc.},$$

der sich so verhält

$$S = \int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+a}}} : \int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}}$$

nur für die Fälle gilt, in denen  $a > 0$  ist, hätte aus ihm dennoch leicht unmittelbar der hier für  $S$  gefundene Ausdruck abgeleitet werden können, der auch gilt, solange  $a + b > 0$  war, den wir hier nicht ohne weite Umwege erhalten haben; aber hier wird hingegen unschwer der Grund erkannt, weswegen es möglich ist, eine solche Reduktion zu gebrauchen, weil ja die in §7 angegebene Reduktion nur bestehen kann, wenn der Exponent  $a$  positiv war, deshalb weil der absolute Anteil vernachlässigt worden ist, woher natürlich die Reduktion so des Zähler wie des Nenners einzeln betrachtet falsch wäre; aber die beiden Fehler, so der im Zähler wie der im Nenner begangene, haben einander auf glückliche Weise kompensiert: Deswegen werden wir diese neue Methode sicher gebrauchen können, wann immer dem Exponenten  $a$  noch größere negative Werte zugeteilt werden.

## PROBLEM 6

§28 Die Großbuchstaben mögen, so die lateinischen wie die germanischen, dieselben Werte beibehalten, die wir selbigen bisher zugeschrieben haben; die Summe der Reihe zu bestimmen

$$S = 1 + \mathfrak{A}A + \mathfrak{B}B + \mathfrak{C}C + \mathfrak{D}D + \text{etc.},$$

wann immer der Exponent  $a$  wie große negative Werte auch immer annimmt.

## LÖSUNG

Für die Fälle, in denen der Exponent  $a$  positiv ist, wird die Summe dieser Reihe so ausgedrückt, dass gilt

$$S = \int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+a}}} : \int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}}$$

Des Weiteren haben wir aber für negative Werte von  $a$ , wenn nur  $a + b > 0$

war, durch die Reduktion aus §7 gerade gefunden

$$S = \frac{a + \alpha}{a} \int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+b}}} : \int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+b}}}.$$

Wenn aber erst die Formel  $a + 2b$  positiv wird, wollen wir die erläuterte Reduktion auf die unmittelbar folgende Form anwenden, und es wird  $a = a + b$  und  $c = -a - \alpha - b$  für den Zähler, aber hingegen für den Nenner  $c = -a - b$  genommen werden müssen; daher wird aufgefunden

$$\int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+b}}} = -\frac{a + \alpha + b}{a + b} \int \frac{x^{a+2b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+2b}}}$$

und

$$\int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+b}}} = -\int \frac{x^{a+2b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+2b}}},$$

nach Einsetzen welcher Werte im letzten Ausdruck für  $S$  wir für den Fall  $a + 2b > 0$  auffinden werden

$$S = \frac{a + \alpha}{a} \cdot \frac{a + \alpha + b}{a + b} \int \frac{x^{a+2b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+2b}}} : \int \frac{x^{a+2b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+2b}}}.$$

Wenn aber erst  $a + 3b$  einen positiven Wert erhält, wird die gleiche Reduktion zum folgenden Ausdruck führen

$$S = \frac{a + \alpha}{a} \cdot \frac{a + \alpha + b}{a + b} \cdot \frac{a + \alpha + 2b}{a + 2b} \int \frac{x^{a+3b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+3b}}} : \int \frac{x^{a+3b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+3b}}}.$$

Auf die gleiche Weise, wenn erst die Formel  $a + 4b$  einen positiven Wert annimmt, wird die gesuchte Summe aufgefunden werden als

$$S = \frac{a+\alpha}{a} \cdot \frac{a+\alpha+b}{a+b} \cdot \frac{a+\alpha+2b}{a+2b} \cdot \frac{a+\alpha+3b}{a+3b} \int \frac{x^{a+4b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+4b}}} : \int \frac{x^{a+4b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+4b}}}.$$

In all diesen Formeln lassen sich die Nenner auf einen Kreisbogen reduzieren. Weil nämlich die allgemeine Form der Nenner diese ist

$$\int \frac{x^{a+bn-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+nb}}}$$

tritt durch das, was oben gezeigt worden ist, klar zutage, dass ihr Wert dieser ist

$$\frac{\pi}{b \sin\left(\frac{a+nb}{b}\pi\right)};$$

dort, weil gilt

$$\sin\left(\frac{a+nb}{b}\pi\right) = \sin\left(n\pi + \frac{a}{b}\pi\right),$$

ist es ersichtlich, dass in den Fällen, in denen  $n$  eine gerade Zahl ist, der Nenner dieser sein wird

$$= \frac{\pi}{b \sin\frac{a\pi}{b}};$$

aber in den Fällen, in denen  $n$  eine ungerade Zahl ist, wird der Nenner dieser sein

$$= \frac{-\pi}{b \sin\frac{a\pi}{b}}.$$



Im Übrigen sind all diese Formeln vollkommen miteinander übereinzustimmen anzusehen, weil sie ja alle aus der ersten durch die oben angegebenen Reduktionen abgeleitet worden sind, wenn nur die absoluten Anteile missachtet werden. Denn die Tragweite dieser Formeln ist so groß, dass, auch wenn diese Reduktionen so für den Zähler wie für den Nenner einzeln genommen falsch wären, sich dennoch diese zwei Fehler wiederum gegenseitig aufheben.

#### BEISPIEL

§29 Wir wollen  $b = 2$  nehmen und es sei  $a = -5$  und  $\alpha = -4$ , woher diese Reihen entspringen

$$(1 - xx)^{\frac{5}{2}} = 1 - \frac{5}{2}xx + \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^8 - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}x^{10} - \text{etc.}$$

und

$$(1 - xx)^2 = 1 - 2xx + x^4,$$

woher die zu summierende Reihe sein wird

$$S = 1 + 5 + \frac{15}{8} = \frac{63}{8}.$$

Weil ja nun erst  $a + 3b$  eine positive Größe wird, es ist nämlich  $a + 3b = 1$ , wird die zweite Form zu gebrauchen sein, woher erschlossen wird

$$S = \frac{9 \cdot 7 \cdot 5}{5 \cdot 3 \cdot 1} \int \frac{\partial x}{\sqrt{(1 - xx)^{-3}}} : \int \frac{\partial x}{\sqrt{1 - xx}},$$

wo der Nenner ist

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{\pi}{2};$$

der Zähler ist hingegen

$$\int \partial x \sqrt{(1-xx)^3},$$

welche Formel durch die erste Reduktion aus §10, nach Setzen von  $a = 1$  und  $b = 2$ , liefert

$$\int \partial x (1-xx)^{\frac{c}{2}} = \frac{c}{1+c} \int \partial x (1-xx)^{\frac{c}{2}-1},$$

woher wegen  $c = 3$  werden wird

$$\int \partial x (1-xx)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4} \int \partial x (1-xx)^{\frac{1}{2}}.$$

Weiter wird aber, weil hier  $c = 1$  ist, sein

$$\int \partial x (1-xx)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{\partial x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{\pi}{4},$$

woher wir für den Zähler haben werden

$$\int \partial x (1-xx)^{\frac{3}{2}} = \frac{3\pi}{16},$$

nach Einsetzen welcher Werte die gesuchte Summe hervorgeht als

$$S = \frac{9 \cdot 7 \cdot 5}{5 \cdot 3 \cdot 1} \cdot \frac{3\pi}{16} : \frac{\pi}{2} = \frac{63}{8},$$

was hervorragend mit der wahren Summe übereinstimmt.

### EINE ANDERE METHODE, DIE SUMMEN DERSELBEN REIHEN ZU FINDEN

§30 Die vorausgehenden Summen haben wir aus der natürlichen Beschaffenheit der Reihen selbst gefunden, nach welcher die Terme Produkte aus je zwei Binomialkoeffizienten von zwei verschiedenen Binomen sind. Weil ich aber vor nicht allzu langer Zeit bewiesen habe, wenn die Reihe so gebildet wird, dass gilt

$$= 1 + \binom{m}{1} \binom{n}{1} + \binom{m}{2} \binom{n}{2} + \binom{m}{3} \binom{n}{3} + \binom{m}{4} \binom{n}{4} + \text{etc.},$$

dass dann sein wird

$$S = \binom{m+n}{m} \quad \text{oder auch} \quad \binom{m+n}{n},$$

dessen Wert auf die gewohnte Weise entwickelt liefert

$$S = \frac{m+n}{1} \cdot \frac{m+n-1}{2} \cdot \frac{m+n-2}{3} \cdot \frac{m+n-3}{4} \cdots \frac{m+1}{n},$$

welcher Wert also, sooft  $m$  und  $n$  ganze Zahlen sind, immer leicht angegeben werden kann, wann immer für diese Zahlen Brüche angenommen werden, habe ich den Wert dieses Ausdruckes auf die folgende Weise durch Integralformeln dargeboten, dass gilt

$$S = \frac{\int u^{m+n} \partial x}{\int u^m \partial x \cdot \int u^n \partial x},$$

während  $u = \log \frac{1}{x}$  ist, nachdem dann aber die Integrale von  $x = 0$  bis hin zu  $x = 1$  erstreckt worden sind.

§31 Aber dieser Ausdruck scheint für unser Unterfangen nicht hinreichend geeignet, deshalb weil er Quadraturen von transzendenten Kurven involviert; aber in der Tat habe ich nach genauerem Betrachten der Sache herausgefunden, dass der Wert derselben Formel  $\left(\frac{m+n}{n}\right)$  auch auf Quadraturen von algebraischen Kurven zurückgeführt werden kann, die sogar als einfacher hervorgegangen sind als jene, welche ich mit der vorhergehenden Methode erlangt habe, und auch nicht diesem Umstand unterworfen sind, dass sie für die verschiedenen Exponenten mal die einen mal die anderen Reduktionen erfordern. Ich werde also diese neue Methode hier klarer darstellen.

§32 Diese Methode ist aber aus den oben in §12 erwähnten Reduktionen abgeleitet worden, wo wir festgelegt haben

$$\Delta = \int x^{a-1} \partial x (1 - x^b)^{\frac{c}{b}-1}.$$

Hier wollen wir aber sofort  $b = 1$  und  $a = 1$  nehmen, so dass gilt

$$\Delta = \int \partial x (1 - x)^{c-1} = \frac{1}{c};$$

dann werden sich aber die in §12 aufgeführten Reduktionen auf die folgende Weise verhalten

$$\begin{aligned}
\int x \partial x (1-x)^{c-1} &= \frac{1}{c+1} \Delta, \\
\int x x \partial x (1-x)^{c-1} &= \frac{1}{c+1} \cdot \frac{2}{c+2} \Delta, \\
\int x^3 \partial x (1-x)^{c-1} &= \frac{1}{c+1} \cdot \frac{2}{c+2} \cdot \frac{3}{c+3} \Delta, \\
\int x^4 \partial x (1-x)^{c-1} &= \frac{1}{c+1} \cdot \frac{2}{c+2} \cdot \frac{3}{c+3} \cdot \frac{4}{c+4} \Delta \\
&\text{etc.},
\end{aligned}$$

woher geschlossen wird, dass im Allgemeinen sein wird

$$\int x^\lambda \partial x (1-x)^{c-1} = \frac{1}{c+1} \cdot \frac{2}{c+2} \cdot \frac{3}{c+3} \cdots \frac{\lambda}{c+\lambda} \Delta.$$

§33 Wenn daher nun die letzte Formel invertiert wird, wird aufgefunden werden

$$\frac{\Delta}{\int x^\lambda \partial x (1-x)^{c-1}} = \frac{c+1}{1} \cdot \frac{c+2}{2} \cdot \frac{c+3}{3} \cdot \frac{c+4}{4} \cdots \frac{c+\lambda}{\lambda};$$

aber dieses Produkt, wenn die Zähler in umgekehrter Reihenfolge geschrieben werden, wird diese Form annehmen

$$\frac{c+\lambda}{1} \cdot \frac{c+\lambda-1}{2} \cdot \frac{c+\lambda-2}{3} \cdot \frac{c+\lambda-3}{4} \cdots \frac{c+1}{\lambda},$$

weswegen, weil die gesuchte Summe  $s = \binom{m+n}{n}$  entwickelt gegeben hat

$$S = \frac{m+n}{1} \cdot \frac{m+n-1}{2} \cdot \frac{m+n-2}{3} \cdots \frac{m+1}{1},$$

jene Form offenbar in diese verwandelt wird, indem  $c = m$ ,  $\lambda = n$  genommen wird, aus welchen  $\Delta = \frac{1}{m}$  wird, und die gesuchte Summe selbst wird auf diese Weise ausgedrückt werden

$$S = \frac{1}{m \int x^n \partial x (1-x)^{m-1}}$$

und weil sich die beiden Zahlen  $m$  und  $n$  miteinander vertauschen lassen, wird auch gelten

$$S = \frac{1}{n \int x^m \partial x (1-x)^{n-1}}$$

§34 Dieser Ausdruck, sooft  $m$  und  $n$  ganze Zahlen sind, gibt offenbar die wahre Summe an die Hand. Es sei eines Beispiels wegen  $m = 4$  und  $n = 3$ , und weil gilt

$$(1+z)^4 = 1 + 4z + 6zz + 4z^3 + z^4$$

und

$$(1+z)^3 = 1 + 3z + 3zz + z^3,$$

wird die zu summierende Reihe diese sein

$$S = 1 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 4 = 35.$$

Aber durch die erste Integralformel haben wir hingegen

$$S = \frac{1}{4 \int x^3 dx (1-x)^3},$$

durch die zweite Formel wird aber sein

$$S = \frac{1}{3 \int x^4 dx (1-x)^2}.$$

Es ist aber für die erste

$$\int x^3 dx (1-x)^3 = \frac{1}{140},$$

für die andere ist hingegen

$$\int x^4 dx (1-x)^2 = \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} = \frac{1}{105},$$

so dass aus jeder der beiden Formeln  $S = 35$  hervorgeht.

**§35** In den Reduktionen, woher wir diese Ausdrücke geschöpft haben, haben wir die Integrale freilich angenommen so genommen zu werden, dass sie von der Grenze  $x = 0$  bis hin zu  $x = 1$  erstreckt werden. Aber hier kommt einem angenehmerweise derselbe Umstand zu nutze, welchen wir in der vorhergehenden Lösung bemerkt haben, dass die hier gefundene Formel auch Geltung behält, auch wenn die Exponenten negativ waren, in welchen Fällen sich natürlich die Regel nicht beobachten lässt; denn hier heben sich auch die zwei Fehler gegenseitig auf. So, wenn  $m = -4$  und  $n = 3$  war, wird werden

$$(1+z)^{-4} = 1 - 4z + 10z^2 - 20z^3 + 35z^4 - 56z^5 + \text{etc.}$$

und

$$(1+z)^3 = 1 + 3z + 3zz + z^3,$$

und so wird die zu summierende Reihe sein

$$S = 1 - 3 \cdot 4 + 3 \cdot 10 - 1 \cdot 20 = -1.$$

Aber die zweite Integralformel gibt hingegen

$$S = \frac{1}{3 \int \frac{\partial x}{x^4} (1-x)^2}.$$

Es ist aber

$$\int \frac{\partial x}{x^4} (1-x)^2 = \frac{-1}{3x^3} + \frac{2}{2xx} - \frac{1}{x},$$

welcher Ausdruck nach Setzen von  $x = \infty$  verschwindet, hingegen für  $x = 1$  gesetzt  $-\frac{1}{3}$  gibt. Wenn aber die beiden Zahlen  $m$  und  $n$  negativ genommen werden würden, würde die Summe der Reihe offenbar negativ werden.

**§36** Weil aber die Fälle, in denen  $m$  und  $n$  ganze Zahlen sind, keine Schwierigkeiten bereiten, wird der wesentliche Nutzen unserer Formel dann auftreten, wann immer die Zahlen  $m$  und  $n$  gebrochen sind. So, wenn  $m = \frac{1}{2}$  und  $n = \frac{1}{2}$  war, wird wegen

$$(1+z)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}zz + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}z^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}z^4 + \text{etc.}$$

und

$$(1+z)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}zz - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}z^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}z^4 - \text{etc.}$$



die zu summierende Reihe sein

$$S = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} - \text{etc.}$$

Aber die erste Integralformel gibt uns hingegen

$$S = \frac{2}{\int \frac{\partial x}{\sqrt{x(1-x)}}}.$$

Nun wird aber nach Setzen von  $x = yy$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{x(1-x)}} = 2 \int \frac{\partial y}{\sqrt{1-yy}} = \pi,$$

so dass daher  $S = \frac{2}{\pi}$  wird, welche Summe wir schon oben [§21] für denselben Fall gefunden haben.

§37 Für andere Fälle wird es aber förderlich sein, die oben dargestellten Reduktionen heranzuziehen; damit dies leichter geschehen kann, wollen wir diese allgemeine Formel betrachten

$$\int x^q \partial x (1-x)^r;$$

und jene sechs oben in den Korollaren der Lemmata aufgeführten Reduktionen werden die folgenden liefern:

$$\begin{aligned}
\text{I.} \quad & \int x^q \partial x (1-x)^r = \frac{r}{q+1} \int x^{q+1} \partial x (1-x)^{r-1}, \\
\text{II.} \quad & \int x^q \partial x (1-x)^r = \frac{q}{r+1} \int x^{q-1} \partial x (1-x)^{r+1}, \\
\text{III.} \quad & \int x^q \partial x (1-x)^r = \frac{q+r+2}{q+1} \int x^{q+1} \partial x (1-x)^r, \\
\text{IV.} \quad & \int x^q \partial x (1-x)^r = \frac{q}{q+r+1} \int x^{q-1} \partial x (1-x)^r, \\
\text{V.} \quad & \int x^q \partial x (1-x)^r = \frac{r}{q+r+1} \int x^q \partial x (1-x)^{r-1}, \\
\text{VI.} \quad & \int x^q \partial x (1-x)^r = \frac{q+r+2}{r+1} \int x^q \partial x (1-x)^{r+1}.
\end{aligned}$$

§38 Mit Hilfe dieser Reduktionen wird der erste für die Summe gefundene Ausdruck [§33]

$$S = \frac{1}{m \int x^n \partial x (1-x)^{m-1}},$$

wo  $q = n$  und  $r = m - 1$  ist, in die sechs folgenden Formen überführt werden können:

$$\begin{aligned}
\text{I.} \quad S &= \frac{n+1}{m(m-1) \int x^{n+1} \partial x (1-x)^{m-2}}, \\
\text{II.} \quad S &= \frac{1}{n \int x^{n-1} \partial x (1-x)^m}, \\
\text{III.} \quad S &= \frac{n+1}{m(m+n+1) \int x^{n+1} \partial x (1-x)^{m-1}}, \\
\text{IV.} \quad S &= \frac{m+n}{mn \int x^{n-1} \partial x (1-x)^{m-1}}, \\
\text{V.} \quad S &= \frac{m+n}{m(m-1) \int x^n \partial x (1-x)^{m-2}}, \\
\text{VI.} \quad S &= \frac{1}{(m+n+1) \int x^n \partial x (1-x)^m},
\end{aligned}$$

welche selben Formen auch aus der zweiten folgen.

§39 Aber diese Reduktionen können immer so zum Nutzen herangezogen werden, dass in der Integralformel die beiden Exponenten von  $x$  und  $1-x$  zwischen die Schranken 0 und  $-1$  gebracht werden, die natürlich vornehm betrachtet zu werden pflegen. So wenn  $m = \frac{7}{2}$  und  $n = 4$  war, wird daher werden

$$(1+z)^{\frac{7}{2}} = 1 + Az + Bzz + Cz^3 + \text{etc.}$$

und

$$(1+z)^4 = 1 + 4z + 6zz + 4z^3 + z^4,$$

so dass die zu summierende Reihe diese ist

$$S = 1 + 4A + 6B + 4C + D;$$

aber es wird in der Tat sein

$$S = \frac{2}{7 \int x^4 \partial x (1-x)^{\frac{5}{2}}},$$

wo  $q = 4$  und  $r = \frac{5}{2}$  ist. Zuerst werden wir also den Exponenten  $q$  bis hin zu Null herabsenken können, was mit Hilfe der Reduktion IV geschieht; daher wird nämlich sein

$$\int x^4 \partial x (1-x)^{\frac{5}{2}} = \frac{8}{15} \int x^3 \partial x (1-x)^{\frac{5}{2}},$$

weiter aber

$$\int x^3 \partial x (1-x)^{\frac{5}{2}} = \frac{6}{13} \int x x \partial x (1-x)^{\frac{5}{2}},$$

darauf

$$\int x x \partial x (1-x)^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{11} \int x \partial x (1-x)^{\frac{5}{2}},$$

schließlich

$$\int x \partial x (1-x)^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{9} \int \partial x (1-x)^{\frac{5}{2}};$$

und so werden wir nun haben

$$S = \frac{2 \cdot 15 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 9}{7 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \int \partial x (1-x)^{\frac{5}{2}}}.$$

**§40** Weil weiter  $r = \frac{5}{2}$  ist, wird dieser Exponent durch die Reduktion V herabgesenkt werden, woher wegen  $q = 0$  und  $r = \frac{5}{2}$  wird

$$\int \partial x (1-x)^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{7} \int \partial x (1-x)^{\frac{3}{2}};$$

auf dieselbe Weise wird sein

$$\int \partial x (1-x)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{5} \int \partial x (1-x)^{\frac{1}{2}},$$

und schließlich

$$\int \partial x (1-x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x}},$$

aus welchen gefolgert wird

$$S = \frac{2 \cdot 15 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3}{7 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} \int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x}}.$$

Es ist aber

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x}} = 2 - 2\sqrt{1-x},$$

und so wird ihr Wert = 2 sein, und nach Durchführen der Rechnung wird  $S = \frac{6435}{128}$  aufgefunden werden.

**§41** Weil nun  $m = \frac{7}{2}$  war, wird sein

$$A = \frac{7}{2}, \quad B = \frac{7 \cdot 5}{2 \cdot 4}, \quad C = \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \quad D = \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}$$

so dass unsere zu summierende Reihe diese ist

$$S = 1 + 14 + \frac{105}{4} + \frac{35}{4} + \frac{35}{128} = \frac{6435}{128},$$

was überaus mit der zuvor gefundenen Summe übereinstimmt.

§42 Was weiter die Reihen betrifft, welche wir durch den allgemeinen Term  $\binom{m}{x} \binom{n}{p+x}$  angezeigt haben, wo anstelle von  $x$  der Reihe nach die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 etc. zu schreiben sind, so dass gilt

$$S = \int \binom{m}{x} \binom{n}{p+x},$$

so habe ich gezeigt, dass gelten wird

$$S = \binom{m+n}{m+p} \quad \text{oder auch} \quad S = \binom{m+n}{n-p};$$

daher tritt es klar zu tage, dass die Summe dieselbe sein wird, wie wenn die vorgelegte Reihe  $\int \binom{m+p}{x} \binom{n-p}{x}$  wäre. Deswegen werden unsere oben gegebenen Formeln auf diese Summe angewendet werden, wenn in ihnen anstelle der Buchstaben  $m$  und  $n$  diese Werte  $m+p$  und  $n-p$  geschrieben werden, und so wird aus der ersten Formel diese Summe sein

$$S = \frac{1}{(m+p) \int x^{n-p} dx (1-x)^{m+p-1}},$$

aus der zweiten wird aber sein

$$S = \frac{1}{(n-p) \int x^{m+p} dx (1-x)^{n-p-1}},$$

und so ist dieses ganze Argument zum Ziel geführt worden zu sein anzusehen.

§43 Hier wird es der Mühe wert sein, nur diesen einen einzigen Fall hinzugefügt zu haben, in dem  $m + n = 1$  und daher  $m = 1 - n$  ist; und die Summe der Reihe wird aus der Formel IV, §38, sein

$$S = \frac{1}{n(1-n) \int \frac{x^{n-1} dx}{(1-x)^n}}$$

welches Integral angenehm durch einen Kreisbogen ausgedrückt werden können wird; es wird nämlich sein

$$\int \frac{x^{n-1} dx}{(1-x)^n} = \frac{\pi}{\sin n\pi}$$

so dass die Summe der vorgelegten Reihe ist

$$S = \frac{\sin n\pi}{mn\pi}$$

Daher, wenn  $m = \frac{1}{2}$  und  $n = \frac{1}{2}$  war, wird  $S = \frac{4}{\pi}$  sein, welches die Summe dieser Reihe ist

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2 + \text{etc.},$$

wie wir schon oben angemerkt haben. Wenn wir darauf  $m = \frac{1}{3}$  und  $n = \frac{2}{3}$  nehmen, wird wegen

$$(1+z)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}z - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6}z^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9}z^3 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} + \text{etc.}$$

und

$$(1+z)^{\frac{2}{3}} = 1 + \frac{2}{3}z - \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 6}z^2 + \frac{2 \cdot 1 \cdot 4}{3 \cdot 6 \cdot 9}z^3 - \frac{2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} + \text{etc.}$$

die zu summierende Reihe sein

$$S = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6} \cdot \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} \cdot \frac{2 \cdot 1 \cdot 4}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} \cdot \frac{2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} + \text{etc.},$$

deren Summe also wegen

$$\sin \frac{1}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

durch die Quadratur des Kreises ausgedrückt werden können wird, und es wird sein

$$S = \frac{9\sqrt{3}}{4\pi}.$$

Wenn wir auf dieselbe Weise nehmen

$$m = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad n = \frac{3}{4},$$

wird die summierende Reihe diese sein

$$S = 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 8} \cdot \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 7}{4 \cdot 8 \cdot 12} \cdot \frac{3 \cdot 1 \cdot 5}{4 \cdot 8 \cdot 12} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} \cdot \frac{3 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 9}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} + \text{etc.},$$

deren Summe wegen



$$\sin \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

sein wird

$$S = \frac{8\sqrt{2}}{3\pi};$$

aber diese Reihe kann so in kurzer Form dargeboten werden

$$S = 1 + \frac{3}{4^2} \left( 1 + \frac{1 \cdot 3}{8^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{8^2 \cdot 12^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{8^2 \cdot 12^2 \cdot 16^2} + \text{etc.} \right).$$