# Über eine höchst bemerkenswerte Reihe, mit welcher jede Binomialpotenz ausgedrückt werden kann*

Leonhard Euler

**§1** Ich erinnere mich, einst eine völlig einzigartige Reihe für die Binomialpotenz $(1+x)^n$ gesehen zu haben, die für die Fälle abbrach, in denen der Exponent $n$ so eine ganze positive wie eine negative Zahl ist. Weil ich aber ihre Form nicht weiter beachtet habe, werde ich sie auf folgende Weise untersuchen. Weil diese Reihen abbrechen muss, ob $n$ eine positive ganze Zahl war oder eine negative, stelle ich sie in dieser Form dar:

$$\begin{aligned}(1+x)^n = A + nB + n(n-1)C + (n+1)n(n-1)D + (n+1)n(n-1)(n-2)E \\ + (n+2)\cdots(n-2)F + (n+2)\cdots(n-3)G + \text{etc}\end{aligned}$$

**§2** Nachdem diese allgemeine Formel festgesetzt worden ist, wollen wir die Buchstaben $A$, $B$, $C$, $D$, etc so bestimmen, dass sie die Fälle, in denen für $n$ eine ganze Zahl, ob eine positive oder negative, angenommen wird, genügt;

*Originaltitel: „De serie maxime memorabili, qua potestas binomialis quaecunque exprimi potest“, erstmals publiziert in „*Memoires de l'academie des sciences de St.-Petersbourg* 4, 1813, pp. 75-87“, Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 16, pp. 162 - 177“, Eneström-Nummer E743, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Artur Diener, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz“

daher werden die leichteren Fälle die folgenden Gleichungen geben:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Wenn } n = 0 \text{ ist, wird} & 1 = A \text{ sein} \\
\text{Wenn } n = 1 \text{ ist, wird} & 1 + x = A + B \text{ sein} \\
\text{Wenn } n = -1 \text{ ist, wird} & \dfrac{1}{1+x} = A - B + 2C \text{ sein} \\
\text{Wenn } n = 2 \text{ ist, wird} & (1+x)^2 = A + 2B + 2C + 6D \text{ sein} \\
\text{Wenn } n = -2 \text{ ist, wird} & \dfrac{1}{(1+x)^2} = A - 2B + 6C - 6D + 24E \text{ sein} \\
\text{Wenn } n = 3 \text{ ist, wird} & (1+x)^3 = A + 3B + 6C + 24D + 24E \\
& \qquad + 120F \text{ sein} \\
\text{Wenn } n = -3 \text{ ist, wird} & \dfrac{1}{(1+x)^3} = A - 3B + 12C - 24D + 120E \\
& \qquad - 120F + 720G \text{ sein} \\
\text{Wenn } n = 4 \text{ ist, wird} & (1+x)^4 = A + 4B + 12C + 60D + 120E \\
& \qquad + 720F + 720G + 5040H \text{ sein} \\
\text{Wenn } n = -4 \text{ ist, wird} & \dfrac{1}{(1+x)^4} = A - 4B + 20C - 60D + 360E \\
& \qquad - 720F + 5040G - 5040H + 40320I \text{ sein}
\end{array}
$$

**§3** Die Auflösung dieser Gleichungen liefert uns schon für die Buchstaben $A$, $B$, $C$, $D$, etc die folgenden Werte:

$$
\begin{array}{ll}
1.)\ A = 1 & 2.)\ B = x \\
3.)\ 2C = \dfrac{xx}{1+x} & 4.)\ 6D = \dfrac{x^3}{1+x} \\
5.)\ 24E = \dfrac{x^4}{(1+x)^2} & 6.)\ 120F = \dfrac{x^5}{(1+x)^2} \\
7.)\ 720G = \dfrac{x^6}{(1+x)^3} & \text{etc}
\end{array}
$$

**§4** Das Bildungsgesetz, nach welchem diese Werte der Reihe nach fortschreiten, ist hinreichend klar, wobei ein beliebiger Term hervorgeht, wenn der hervorgehende entweder mit $\frac{x}{1+x}$ oder $x$ multipliziert wird. Nachdem das bemerkt wurde, wird man die gesuchte Reihe durch die folgende Form ausgedrückt finden:

$$\begin{aligned}(1+x)^n = 1 &+ \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{xx}{1+x} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{x^3}{1+x}\\ &+ \frac{(n+1)\cdots(n-2)}{1\cdots 4}\cdot\frac{x^4}{(1+x)^2} + \frac{(n+2)\cdots(n-2)}{1\cdots 5}\cdot\frac{x^5}{(1+x)^2}\\ &+ \frac{(n+2)\cdots(n-3)}{1\cdot 6}\cdot\frac{x^6}{(1+x)^3} + \text{etc;}\end{aligned}$$

damit deren Ordnung besser ins Auge springt, wollen wir

$$\frac{xx}{1+x} = zz$$

setzen und wir wollen die in der Ordnung geraden Terme von den ungeraden unterscheiden, dass wir eine zweifache Reihe erhalten, und es wird

$$(1+x)^n = \begin{cases} 1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}z^2 + \frac{(n+1)\cdots(n-2)}{1\cdots 4}z^4 + \frac{(n+2)\cdots(n-3)}{1\cdots 6}z^6 + \text{etc}\\ +x(n + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}z^2 + \frac{(n+2)\cdots(n-2)}{1\cdots 5}z^4 + \text{etc}\end{cases}$$

sein und aufgrund der besonderen Struktur, nach welcher die Terme jeder der beiden Reihen vorschreiten, lässt sich schon hinreichend sicher schließen, dass sie mit der Wahrheit verträglich sind. Weil aber dieses Bildungsgesetz allein durch Induktion gefolgert worden ist, ist der strenge Beweis noch unvollständig, welchen ich gleich suchen werde.

**§5** Dennoch offenbart sich hier sofort ein bemerkenswerter Fall, durch welchen die Gültigkeit dieser Reihe hervorragend bestätigt wird, wenn natürlich der Exponent $n$ unendlich groß gesetzt wird, zugleich aber $x$ unendlich klein, sodass trotzdem das Produkt $nx$ eine endliche Größe ist, z. B. $u$; dann ist nämlich bekannt, dass

$$\left(1+\frac{u}{n}\right)^n = e^u$$

ist. In diesem Fall wird aber die gefundene Reihe die folgende Form annehmen:

$$e^u = 1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1\cdot 2} + \frac{u^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{u^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc,}$$

welche Reihe, wie jeder weiß, mit der Wahrheit verträglich ist.

**§6** Damit wir aber einen vollständigen Beweis finden, wird, weil wir

$$\frac{xx}{1+x} = zz$$

gesetzt haben,

$$x = \frac{zz + z\sqrt{zz+4}}{2}$$

sein. Um den Bruch aufzuheben, wollen wir $z = 2y$ setzen, dass

$$x = 2yy + 2y\sqrt{yy+1}$$

wird, und daher wird

$$1 + x = 1 + 2yy + 2y\sqrt{yy+1} = (y + \sqrt{1+yy})^2,$$

sodass unsere vorgelegte Potenz

$$(y + \sqrt{1+yy})^{2n}$$

wird. Weil diese Formel $y + \sqrt{1+yy}$ daher sehr häufig auftauchen wird, wollen wir der Kürze wegen

$$y + \sqrt{1+yy} = v$$

setzen, dass die zu entwickelnde Potenz $v^{2n}$ ist.

**§7** Weil daher diese Potenz $v^{2n}$ den beiden oben beschafften Reihen gleich wird, wollen wir für die erste

$$s = 1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}zz + \frac{(n+1)\cdots(n-2)}{1\cdots 4}z^4 + \frac{(n+2)\cdots(n-3)}{1\cdots 6}z^6 + \text{etc}$$

setzen, für die andere wollen wir aber

$$\frac{tx}{z} = nx + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}xz^2 + \frac{(n+2)\cdots(n-2)}{1\cdots 5}xz^4 + \text{etc}$$

setzen, dass

$$t = nz + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}z^3 + \frac{(n+2)\cdots(n-2)}{1\cdots 5}z^5 + \text{etc}$$

wird, welche Reihe der vorhergehenden um Einiges ähnlicher ist. Daher werden wir also

$$v^{2n} = s + \frac{tx}{z}$$

haben.

§8 Weil wir nun

$$z = 2y$$

gesetzt haben und daher

$$x = 2yy + 2y\sqrt{1+yy} = 2yv$$

wird, werden wir

$$\frac{x}{z} = v$$

haben und unsere Gleichung wird schon

$$v^{2n} = s + tv$$

sein. Um diese Gleichung nun durch Differentiation zu behandeln, bemerke man, dass

$$\partial v = \partial y + \frac{y\partial y}{\sqrt{1+yy}} = \frac{v\partial y}{\sqrt{1+yy}}$$

ist. Andererseits aber wird $y$ durch $v$ so ausgedrückt, dass

$$y = \frac{vv-1}{2v}$$

ist und daher weiter

$$\sqrt{1+yy} = \frac{vv+1}{2v}.$$

Dann wird in der Tat durch Differentieren

$$\partial y = \frac{\partial v(vv+1)}{2vv}$$

sein, welcher Wert hervorragend mit dem übereinstimmt, welchen die vorgehende Differentialformel liefern würde, woher

$$\partial y = \frac{\partial v}{v}\sqrt{1+yy} = \frac{\partial v(vv+1)}{2vv}$$

wird.

**§9** Weil unsere Potenz $v^{2n}$ nun zwei Reihen gleich wird, von welchen wir die eine durch $s$ und die andere durch $tv$ bezeichnet haben, wird es hier förderlich sein bemerkt zu haben, dass die erste Reihe, $s$, rationale Terme umfasst, die andere aber nur irrationale Terme enthält. Nachdem dies bemerkt wurde, wollen wir zuerst die Logarithmen der gefundenen Gleichung nehmen, dass wir

$$2n \ln v = \ln (s + tv)$$

haben, und es wird, nachdem die Differentiale genommen wurden,

$$\frac{2n\partial v}{v} = \frac{\partial s + v\partial t + t\partial v}{s + tv}$$

sein. Weil aber

$$v = y + \sqrt{1+yy}$$

ist und

$$\partial v = \frac{v\partial y}{\sqrt{1+yy}},$$

wird nach Ausführung der Substitution diese Gleichung entstehen:

$$\frac{2n\partial y}{\sqrt{1+yy}} = \frac{\partial s\sqrt{1+yy} + y\partial t\sqrt{1+yy} + \partial t(1+yy) + ty\partial y + t\partial y\sqrt{1+yy}}{(s+ty+t\sqrt{1+yy})\sqrt{1+yy}},$$

welche nach Wegschaffen der Brüche diese Form annehmen wird:

$$\begin{aligned}&2ns\partial y + 2nty\partial y + 2nt\partial y\sqrt{1+yy}\\ =&2s\sqrt{1+yy} + y\partial t\sqrt{1+yy} + \partial t(1+yy) + ty\partial y + t\partial y\sqrt{1+yy},\end{aligned}$$

woher, indem man getrennt die rationalen und irrationalen Anteile gleichsetzt, diese zwei Gleichungen entstehen:

$$\begin{aligned}\text{I.}\;\; & 2ns\partial y + (2n-1)ty\partial y = \partial t + yy\partial t\\ \text{II.}\;\; & (2n-1)t\partial y = \partial s + y\partial t\end{aligned}$$

**§10** Um die erste dieser Gleichungen zu vereinfachen, ziehe man von ihr die zweite mit $y$ multiplizierte ab, und es wird an Stelle ihrer diese hervorgehen:

$$2ns\partial y = \partial t - y\partial s.$$

Durch Kombinieren der anderen Gleichung mit dieser wird

$$(2n-1)t\partial y = \partial s + y\partial t$$

sein. Wir wollen nun sehen, ob wir aus diesen zwei Gleichungen für die Buchstaben $s$ und $t$ dieselben Reihen berechnen können, welche wir oben durch Induktion gefunden haben. Weil ja aber jene Reihen nach den Potenzen des Buchstaben $z = 2y$ fortschritten, wollen wir hier $\frac{1}{2}z$ anstelle von $y$ schreiben, und so werden unsere beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} (2n-1)t\partial z &= 2\partial s + z\partial t \\ 2ns\partial z &= 2\partial t - z\partial s \end{aligned}$$

sein.

**§11** Wir könnten nun aus diesen zwei Gleichungen die Größe $t$ entfernen, wodurch eine Differentialgleichung zweiten Grades zwischen $s$ und $z$ hervorginge, woher sich nicht schwer eine Reihe, die den Wert von $s$ ausdrückt, ableiten ließe. Nachdem darauf auf ähnliche Weise der Buchstaben $s$ entfernt wurde, würde eine solche Gleichung zwischen $t$ und $z$ hervorgehen, aus welcher auf dieselbe Weise eine Reihe für $t$ berechnet werden könnte; aber diese beiden Reihen können um Vieles leichter sofort aus den beiden gefundenen Gleichungen gefunden werden. Für jeden der beiden Buchstaben wollen wir natürlich sofort die folgenden unbestimmten Reihen ansetzen:

$$\begin{aligned} s &= 1 + Az^2 + Bz^4 + Cz^6 + Dz^8 + Ez^{10} + \text{etc} \\ t &= \alpha z + \beta z^3 + \gamma z^5 + \delta z^7 + \varepsilon z^9 + \text{etc} \end{aligned}$$

**§12** Nun wollen wir diese Reihen zuerst in die erste Gleichung einsetzen

$$(2n-1)t - \frac{z\partial t}{\partial z} - \frac{2\partial s}{\partial z} = 0$$

und zwar auf folgende Weise:

$$\begin{array}{rcccccccccc} (2n-1)t = & (2n-1)\alpha z & + & (2n-1)\beta z^3 & + & (2n-1)\gamma z^5 & + & (2n-1)\delta z^7 & + & \text{etc} \\ -\dfrac{z\partial t}{\partial z} = & -\alpha & - & 3\beta & - & 5\gamma & - & 7\delta & - & \text{etc} \\ -\dfrac{2\partial s}{\partial z} = & -4A & - & 8B & - & 12C & - & 16D & - & \text{etc} \end{array}$$

Nachdem hier schon diese Teile getrennt 0 gesetzt wurden, erhalten wir die folgenden Bestimmungen:

$$\begin{aligned} A &= \frac{n-1}{2}\alpha, \quad B = \frac{n-2}{4}\beta, \quad C = \frac{n-3}{6}\gamma \\ D &= \frac{n-4}{8}\delta, \quad E = \frac{n-5}{10}\varepsilon, \quad F = \frac{n-6}{12}\zeta \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc} \end{aligned}$$

**§13** Auf dieselbe Weise behandelt man die andere Gleichung

$$2ns + \frac{z\partial s}{\partial z} - \frac{2\partial t}{\partial z} = 0$$

und nach Einsetzen der angesetzten und oben gegebenen Reihen wird

$$\begin{array}{rllllll} 2ns = & 2n & + 2nAz^2 & + 2nBz^4 & + 2nCz^6 & + 2nDz^8 & + \text{etc} \\ +\dfrac{z\partial s}{\partial z} = & & + \ 2A & + \ 4B & + \ 6C & + \ 8D & + \text{etc} \\ -\dfrac{2\partial t}{\partial z} = & -2\alpha & - \ 6\beta & - 10\gamma & - \ 14\delta & - \ 18\varepsilon & - \text{etc} \end{array}$$

werden. Daher entstehen also die folgenden Bestimmungen

$$\begin{aligned} \alpha &= n, \quad \beta = \frac{n+1}{3}A, \quad \gamma = \frac{n+2}{5}B \\ \delta &= \frac{n+3}{7}C, \quad \varepsilon = \frac{n+4}{9}D, \quad \zeta = \frac{n+5}{11}E \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc} \end{aligned}$$

**§14** Weil nun der erste der griechischen Buchstaben $\alpha = n$ bekannt ist, wird man, indem man abwechselnd die beiden oberen Bestimmungen benutzt, die folgenden Werte finden:

$$\begin{array}{ll} \alpha = n & A = \dfrac{n(n-1)}{2} \\ \beta = \dfrac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} & B = \dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\ \gamma = \dfrac{(n+2)\cdots(n-2)}{1 \cdots 5} & C = \dfrac{(n+2)\cdots(n-3)}{1 \cdots 6} \\ \delta = \dfrac{(n+3)\cdots(n-3)}{1 \cdots 7} & D = \dfrac{(n+3)\cdots(n-4)}{1 \cdots 8} \\ \text{etc} & \text{etc} \end{array}$$

Es ist nun also das Bildungsgesetz der Progression gezeigt worden, welches wir oben quasi durch Raten angegeben haben, vollkommen mit der Wahrheit übereinzustimmen.

**§15** Weil also, nachdem diese Reihen gefunden worden sind,

$$(1+x)^n = v^{2n} = s + \frac{tx}{z}$$

ist, ergibt sich hier eine der ganzen Aufmerksamkeit würdige Frage, welche Werte denn hervorgehen werden, nachdem jede der beiden Buchstaben $s$ und $t$ getrennt genommen worden sind, welche Untersuchung ich im folgenden Problem unternehmen werde.

## PROBLEM

Nachdem diese beiden Reihen vorgelegt worden sind:

$$\begin{aligned} s &= 1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}z^2 + \frac{(n+1)\cdots(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}z^4 + \text{etc} \\ t &= \frac{n}{1}z + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}z^3 + \frac{(n+2)\cdots(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}z^5 + \text{etc,} \end{aligned}$$

ist die Summe jeder der beiden zu untersuchen.

### LÖSUNG

**§16** Die Bestimmung dieser beiden Summen ist aus den oben gefundenen Differentialgleichungen herzuleiten, während $2y$ und $2\partial y$ anstelle von $z$ und $\partial z$ geschrieben wird:

$$\begin{aligned} (2n-1)t\partial y &= \partial s + y\partial t \\ 2ns\partial y &= \partial t - y\partial s \end{aligned}$$

Hier könnte freilich wieder der eine der beiden Buchstaben $s$ und $t$ eliminiert werden, wodurch man zu einer Differentialgleichung zweiten Grades gelangen würde; aber auch diese Arbeit können wir uns ersparen. Wir wollen natürlich nur die erste Gleichung, die auf diese Form gebracht wurde, benutzen:

$$\partial s = 2nt\partial y - \partial \cdot ty,$$

mit welcher wir die anfängliche Gleichung kombinieren wollen

$$v^{2n} = s + tv,$$

woher

$$s = v^{2n} - tv$$

wird und daher

$$\partial s = 2nv^{2n-1}\partial v - \partial \cdot tv = 2nt\partial y - \partial \cdot ty.$$

Es ist aber

$$\partial \cdot tv - \partial \cdot ty = \partial \cdot t(v - y) = \partial \cdot t\sqrt{1 + yy}$$

wegen

$$v = y + \sqrt{1 + yy}.$$

Und so werden wir

$$2nv^{2n-1}\partial v = 2nt\partial y + \partial t\sqrt{1 + yy} + \frac{ty\partial y}{\sqrt{1 + yy}}$$

haben, welche Gleichung durch $\sqrt{1 + yy}$ geteilt

$$\partial t + \frac{ty\partial y}{1 + yy} + 2nt\frac{\partial y}{\sqrt{1 + yy}} = \frac{2nv^{2n-1}\partial v}{\sqrt{1 + yy}}$$

gibt. Weil nun in der Tat

$$\frac{\partial y}{\sqrt{1 + yy}} = \frac{\partial v}{v}$$

ist, wird unsere Gleichung

$$\partial t + \frac{ty\partial y}{1 + yy} + 2nt\frac{\partial v}{v} = \frac{2nv^{2n-1}\partial v}{\sqrt{1 + yy}}$$

sein, die mit $v^{2n}\sqrt{1 + yy}$ multipliziert die linke Seite integrierbar machen wird, und es wird

$$\partial \cdot tv^{2n}\sqrt{1 + yy} = 2nv^{4n-1}\partial v$$

sein, deren Integral also

$$tv^{2n}\sqrt{1 + yy} = \frac{1}{2}v^{4n} + \frac{C}{2}$$

sein wird, als logische Konsequenz werden wir

$$t = \frac{v^{2n} + Cv^{-2n}}{2\sqrt{1 + yy}}$$

haben.

**§17** Für die Konstante $C$ wird, weil im Fall $y = 0$ und $v = 1$ $t = 0$ werden muss, $C = -1$ sein, sodass

$$t = \frac{v^{2n} - v^{-2n}}{2\sqrt{1+yy}}$$

ist, woher man

$$s = v^{2n} - tv = v^{2n} - \frac{v^{2n+1} - v^{1-2n}}{2\sqrt{1+yy}}$$

ableitet. Oben haben wir aber gesehen, dass

$$\sqrt{1+yy} = \frac{vv+1}{2v}$$

ist, nach Einsetzen wovon man

$$s = \frac{v^{2n} + v^{2-2n}}{vv+1}$$

finden wird. Trotzdem wollen wir auch sehen, wie die oben erwähnte Differentialgleichung behandelt werden muss.

## Eine Andere aus Differentialen zweiten Grades hergeholte Lösung

**§18** Weil unsere beiden Differentialgleichungen

$$\partial s = 2nt\partial y - \partial \cdot ty$$
$$\partial t = 2ns\partial y - y\partial s$$

sind, wird aus der ersten

$$s = 2n\int t\partial y - ty$$

sein, nach Einsetzen welcher Werte in die andere

$$\partial t = 4nn\partial y \int t\partial y - y\partial \cdot ty$$

werden wird, was entwickelt

$$\partial t = 4nn\partial y \int t\partial y - ty\partial y - yy\partial t$$

gibt.

**§19** Damit wir also das Integralzeichen wegschaffen, wollen wir

$$\int t\partial y = u$$

setzen, dass

$$t = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{und} \quad \partial t = \frac{\partial\partial u}{\partial y}$$

ist, nach Einsetzen welcher Werte

$$\frac{\partial\partial u}{\partial y}(1+yy) + y\partial u = 4nnu\partial y$$

hervorgeht, welche Differentialgleichung sich, indem man

$$u = e^{\int p\partial y}$$

setzt, wegen

$$\partial u = p\partial y e^{\int p\partial y}$$

und

$$\partial\partial u = (\partial p\partial y + pp\partial y\partial y)e^{\int p\partial y}$$

auf einfache Differentiale zurückführen lässt; es wird nämlich

$$(\partial p + pp\partial y)(1+yy) + py\partial y = 4nn\partial y$$

sein oder

$$\partial p + pp\partial y + \frac{py\partial y}{1+yy} = 4nn\frac{\partial y}{1+yy}.$$

**§20** Um nun den ersten Term und den dritten in einen zusammenzuziehen, wollen wir

$$p = \frac{q}{\sqrt{1+yy}}$$

setzen und die Gleichung wird

$$\frac{\partial q}{\sqrt{1+yy}} + \frac{qq\partial y}{1+yy} = 4nn\frac{\partial y}{1+yy}$$

sein oder

$$\frac{\partial q}{\sqrt{1+yy}} = \frac{(4nn-qq)\partial y}{1+yy},$$

welche angenehm eine Separation zulässt; es ist nämlich klar, dass

$$\frac{\partial q}{4nn - qq} = \frac{\partial y}{\sqrt{1+yy}}$$

hervorgeht, welche Gleichung mit $4n$ multipliziert und integriert

$$\ln\frac{2n+q}{2n-q} = 4n\int\frac{\partial y}{\sqrt{1+yy}} = 4n\ln v$$

gibt; als logische Konsequenz wird

$$\frac{2n+q}{2n-q} = Cv^{4n}$$

sein, woher man

$$q = \frac{2n(Cv^{4n}-1)}{Cv^{4n}+1}$$

findet.

**§21** Daher wird also wegen

$$p = \frac{q}{\sqrt{1+yy}}$$

$$p\partial y = \frac{q\partial y}{\sqrt{1+yy}} = \frac{q\partial v}{v}$$

sein und daher

$$p\partial y = \frac{2n(Cv^{4n}-1)\partial v}{v(Cv^{4n}+1)},$$

welchen Ausdruck man in diese Teile auflöst:

$$p\partial y = -\frac{2n\partial v}{v} + \frac{4nCv^{4n-1}\partial v}{Cv^{4n}+1},$$

dessen Integral also

$$\int p\partial y = -2n\ln v + \ln(Cv^{4n}+1) + \ln D$$

sein wird, als logische Konsequenz wird

$$e^{\int p\partial y} = \frac{D}{v^{2n}}(1+Cv^{4n}) = Dv^{-2n} + CDv^{+2n} = u$$

sein.

**§22** Weil also

$$u = \int t\partial y \quad \text{und daher} \quad t = \frac{\partial u}{\partial y}$$

ist, werden wir durch Differentiation, nachdem die beliebigen Konstanten verändert worden sind,

$$t = \frac{Ev^{-2n} + Fv^{+2n}}{\sqrt{1+yy}}$$

finden. Um aber die Konstanten zu bestimmen, bemerke man zuerst, dass für $y = 0$ und $y = 1$ gesetzt $t = 0$ sein muss, woher

$$F = -E$$

wird, sodass schon

$$t = \frac{E}{\sqrt{1+yy}}(v^{-2n} - v^{+2n})$$

ist. Wenn darauf aber $y$ unendlich klein war, muss

$$t = nz = 2ny$$

sein, dann wird in der Tat

$$v = 1 + y \quad \text{und} \quad v^{-1} = 1 - y$$

und daher

$$v^{2n} = 1 + 2ny \quad \text{und} \quad v^{-2n} = 1 - 2ny,$$

aus welchen Werten

$$2ny = -4nEy, \quad \text{also} \quad E = -\frac{1}{2}$$

werden wird, und so erhalten wir für $t$ denselben Wert wie wir oben gefunden haben, natürlich

$$t = \frac{v^{2n} - v^{-2n}}{\sqrt{1+yy}},$$

woraus man weiter wie zuvor

$$s = \frac{v^{2n-1} + v^{1-2n}}{2\sqrt{1+yy}}$$

berechnet.

# Eine sehr leicht Lösung des Problems

**§23** Wir werden diese Lösung allein aus der Gleichung

$$v^{2n} = s + tv$$

berechnen, in welcher wegen

$$v = y + \sqrt{1+yy}$$

der Buchstabe $s$ die geraden Potenzen von $y$ umfasst, $t$ aber die ungeraden. Nachdem also der Buchstabe $y$ negativ genommen wurde, bleibt $s$ derselbe, der Buchstabe $t$ wird aber in $-t$ übergehen; dann werden wir anstelle von $v$

$$-y + \sqrt{1+yy} = v^{-1}$$

haben. Nachdem das bemerkt wurde, wird, wenn wir $s$, $-t$, $v^{-1}$ anstelle der Buchstaben $s$, $t$, $v$ schreiben, unsere Gleichung genauso geltend bleiben, und so werden wir

$$v^{-2n} = s - \frac{t}{v}$$

haben, nach Verbindung welcher Gleichung mit der anfänglichen $v^{2n} = s + tv$ durch Abziehen

$$v^{2n} - v^{-2n} = tv + \frac{t}{v}$$

werden wird, woher

$$t = \frac{v^{2n} - v^{-2n}}{2\sqrt{1+yy}}$$

wird, und daher man

$$s = \frac{v^{2n-1} + v^{1-2n}}{2\sqrt{1+yy}}$$

finden wird. Weil nämlich aus der ersten Gleichung

$$t = v^{2n-1} - \frac{s}{v}$$

ist, aus der anderen aber

$$-t = v^{1-2n} - vs,$$

werden die Werte einander gleichgesetzt

$$\frac{s(vv+1)}{v} = v^{2n-1} + v^{1-2n}$$

geben, woher wegen

$$\frac{vv+1}{v} = 2\sqrt{1+yy}$$
$$s = \frac{v^{2n-1} + v^{1-2n}}{2\sqrt{1+yy}}$$

sein wird.

**§24** Wir wollen all dies schließlich auf die Potenz $1+x$ selbst übertragen, weil sowohl

$$1+x = vv$$

als auch

$$\sqrt{1+yy} = \frac{vv+1}{2v} = \frac{x+2}{2\sqrt{1+x}}$$

ist, wird

$$2\sqrt{1+yy} = \frac{x+2}{\sqrt{1+x}}$$

sein, nach Einsetzen welcher Werte

$$s = \frac{\sqrt{1+x}}{x+2} \cdot \left((1+x)^{n-\frac{1}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{2}-n}\right)$$
$$t = \frac{\sqrt{1+x}}{x+2} \cdot \left((1+x)^{n} - (1+x)^{-n}\right)$$

werden wird oder

$$s = \frac{(1+x)^n + (1+x)^{1-n}}{x+2}$$
$$t = \frac{(1+x)^{n+\frac{1}{2}} - (1+x)^{\frac{1}{2}-n}}{x+2}$$

Daher folgert man für die andere Reihe

$$\frac{tx}{z} = t\sqrt{1+x}$$

und so wird der Wert der Reihe

$$\frac{(1+x)^{n+1} - (1+x)^{1-n}}{2+x}$$

sein, was die Summe der Ordnung nach geraden Termen ist, welche in der Reihe für die Potenz $(1+x)^n$ gefunden worden ist.