Kapitel XVI
Über die Differentiation von unerklärbaren Funktionen *

Leonhard Euler

§367 Ich nenne hier Funktionen unerklärbar, die weder durch bestimmte Ausdrücke noch durch Wurzeln von Gleichungen erklärt werden können, so dass sie nicht nur nicht algebraisch sind, sondern meistens auch ungewiss ist, auf welches Geschlecht der Transzendenten sie sich beziehen. Eine solche unerklärbare Funktion ist

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{x},$$

die natürlich von x abhängt, aber, wenn x keine ganze Zahl ist, auf keine Weise erklärt werden kann. Auf die gleiche Weise wird dieser Ausdruck

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \ldots \cdot x$$

eine unerklärbare Funktion von x sein, weil ja, wenn x irgendeine Zahl ist, ihr Wert nicht nur nicht algebraisch ist, sondern nicht einmal durch eine gewisse Art transzendenter Größen ausgedrückt werden kann. Allgemein kann also die Kenntnis solcher unerklärbaren Funktionen aus Reihen berechnet werden. Es sei nämlich irgendeine Reihe vorgelegt

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & x \\ A+ & B+ & C+ & D+ & \ldots+ & X, \end{array}$$

*Originaltitel: "De formularum differentialium ulteriori differentiatione", erstmals publiziert im Jahre 1755, Nachdruck in „Opera Omnia: Series 1, Volume 10, pp 163-186", Eneström-Nummer E212, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Benjamin Kassel, im Rahmen des Euler-Seminars im Sommersemester 2015 deren Summe, wenn sie nicht durch eine endliche Formel ausgedrückt werden kann, eine unerklärbare Funktion von x liefern wird, nämlich

$$S = A + B + C + D + ... + X$$

Auf die gleiche Weise werden ununterbrochene Produkte aus den Termen der Reihe wie

$$P = A \cdot B \cdot C \cdot D ... \cdot X$$

unerklärbare Funktionen von x beschaffen, die aber mit Hilfe von Logarithmen auf die erste Form zurückgeführt werden können; es wird nämlich

$$\ln P = \ln A + \ln B + \ln C + \ln D + ... + \ln X$$

sein.

§368 In diesem Kapitel habe ich beschlossen die Methode zu erklären, Differentiale von unerklärbaren Funktionen solcher Art zu untersuchen. Dieser Gegenstand, obwohl er sich auf den ersten Teil dieses Werkes, wo die Vorschriften des Differentialkalküls angegeben worden sind, zu erstrecken scheint, wollen wir dennoch, weil er ja eine umfangsreichere Erkenntnis der Lehre der Reihen erfordert, zu welcher sich in diesem anderen Teil gelangen ließ, weil wir gezwungen sind, die natürliche Ordnung zu verlassen, an dieser Stelle erst erwähnen. Weil aber diese Untersuchung völlig neu ist und noch von keinem behandelt worden ist, fehlt nur, dass wird diesen Teil des Differentialkalküls absolvieren können, dass wir eher versuchen, nur seine ersten Elemente zu skizzieren. Außerdem möchte ich aber einige Fragen vorgelegen, deren Erklärung die Differentiation von unerklärbaren Funktionen dieser Art erfordert, damit zeitgleich der Nutzen dieser Behandlung, der aber ohne Zweifel in Zukunft um vieles Größer sein wird, besser erkannt wird.

§369 Um unerklärbare Funktionen dieser Art zu differentieren, ist vor allem nötig, dass wir deren Werte untersuchen, die sie annehmen, wenn für x $x + w$ gesetzt wird. Es sei also

$$\begin{array}{rcccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & ... & x \\ S = & A+ & B+ & C+ & D+ & ...+ & X \end{array}$$

und man setze Σ als den Wert von S fest, den es erhält, wenn für x $x + w$ gesetzt wird, und es sei Z der Term der Reihe, der dem Index $x + w$ entspricht.

Nun werden also die Terme, die den Indizes $x+1$, $x+2$, $x+3$ etc entsprechen durch X', X'', X''' etc angezeigt und der, der dem unendlichen Index $x+\infty$ entspricht, durch $X^{(\infty)}$. Und auf die gleiche Weise mögen die Terme, die den Indizes $x+w+1$, $x+w+2$, $x+w+3$ etc entsprechen durch Z', Z'', Z''' etc angezeigt werden und es sei $Z^{(\infty)}$ der Term, der dem Index $x+w+\infty$ entspricht. Nachdem diese Dinge festgesetzt worden sind, wird

$$\begin{aligned}
S' &= S+X' \\
S'' &= S+X'+X'' \\
S''' &= S+X'+X''+X''' \\
&\quad etc \\
S^{(\infty)} &= S+X'+X''+X'''+...+X^{(\infty)}
\end{aligned}$$

sein. Wenn auf die gleiche Weise auch Σ nacheinander um die Terme Z', Z'' etc vermehrt wird, wird

$$\begin{aligned}
\Sigma' &= \Sigma+Z' \\
\Sigma'' &= \Sigma+Z'+Z'' \\
\Sigma''' &= \Sigma+Z'+Z''+Z''' \\
&\quad etc \\
\Sigma^{(\infty)} &= \Sigma+Z'+Z''+Z'''+...+Z^{(\infty)}
\end{aligned}$$

sein.

§370 Nun ist die Natur der Reihe S, S', S'', S''' etc zu betrachten, wie sie sein wird, wenn sie ins Unendliche fortgesetzt wird; wenn diese im Unendlichen mit einer arithmetischen Progression vermischt wird, was geschieht, wenn die Terme der Reihe X, X', X'', X''' etc im Unendlichen zur Gleichheit konvergieren, sodass die Differenzen der Reihe S, S', S'' etc schließlich gleich werden, werden in diesem Fall die Größen $S^{(\infty)}$, $S^{(\infty+1)}$, $S^{(\infty+2)}$ etc in einer arithmetischen Progression sein, und weil $\Sigma^{(\infty)} = S^{(\infty+w)}$ ist, wird wegen

$$\Sigma^{(\infty)} = wS^{(\infty+1)} + (1-w)S^{(\infty)}$$

sein. Aber es ist $S^{(\infty+1)} = S^{(\infty)} + X^{(\infty+1)}$, woher

$$\Sigma^{(\infty)} = S^{(\infty)} + wX^{(\infty+1)}$$

wird, woraus man diese Gleichung erhalten wird

$$\Sigma + Z' + Z'' + Z''' + ... + Z^{(\infty)} = S + X' + X'' + X''' + ... + X^{(\infty)} + wX^{(\infty+1)},$$

aus welcher der gesuchte Wert Σ erhalten wird, den die Funktion S annimmt, während in ihr $x + w$ anstelle von x eingesetzt wird, und es wird

$$\begin{aligned} \Sigma =& S + wX^{(\infty+1)} + X' + X'' + X''' + etc \quad \textit{ins Unendliche} \\ & - Z' - Z'' - Z''' - etc \quad \textit{ins Unendliche} \end{aligned}$$

sein. Daher, wenn die infinitesimalen Terme der Reihe A, B, C, D etc verschwinden, verschwindet der Term $wX^{(\infty+1)}$ und kann weggelassen werden.

§371 Der Wert von Σ wird also durch eine neue unendliche Reihe ausgedrückt, die beschafft werden kann, wenn man den allgemeinen Term der Reihe $A + B + C + etc$ hat, aus welchem die Werte der Terme $Z', Z'', Z''' etc$ bestimmt werden können. Für unendlich kleingesetzte w, weil $\Sigma - S$ das Differential der Funktion S ist, wird also dieses Differential dS durch eine unendliche Reihe ausgedrückt werden. Und wenn nicht einmal die höheren Potenzen von w missachtet werden, wird man das vollständige Differential dieser unausdrückbaren Funktion S haben; damit dessen Natur deutlicher vor Augen geführt wird, werden wir diese Aufgabe in den folgenden Beispielen illustrieren.

Beispiel 1

Das Differential dieser unerklärbaren Funktion zu finden

$$S = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + ... + \tfrac{1}{x}$$

Weil ja der allgemeine Term X dieser Reihe $= \frac{1}{x}$ ist und deshalb

$$\begin{array}{ll} X' = \dfrac{1}{x+1} & Z' = \dfrac{1}{x+1+w} \\ X'' = \dfrac{1}{x+2} & Z'' = \dfrac{1}{x+2+w} \\ X''' = \dfrac{1}{x+3} & Z''' = \dfrac{1}{x+3+w} \\ etc & etc, \end{array}$$

wird wegen

$$X^{(\infty+1)} = \tfrac{1}{x+\infty+1} = 0,$$

wenn anstelle von x $x+w$ gesetzt wird, die Funktion S in Σ übergehen, dass

$$\begin{aligned}\Sigma =& S + \frac{1}{x+1} \qquad + \frac{1}{x+2} \qquad + \frac{1}{x+3} \qquad + etc \\ & - \frac{1}{x+1+w} - \frac{1}{x+2+w} - \frac{1}{x+3+w} - etc\end{aligned}$$

ist, oder durch zusammenfassen je dieser zwei Terme zu einzeln wird

$$\Sigma = S + \tfrac{w}{(x+1)(x+1+w)} + \tfrac{w}{(x+2)(x+2+w)} + \tfrac{w}{(x+3)(x+3+w)} + etc$$

sein oder weil

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+1+w} &= \frac{1}{x+1} - \frac{w}{(x+1)^2} + \frac{w^2}{(x+1)^3} - \frac{w^3}{(x+1)^4} + etc \\ \frac{1}{x+2+w} &= \frac{1}{x+2} - \frac{w}{(x+2)^2} + \frac{w^2}{(x+2)^3} - \frac{w^3}{(x+2)^4} + etc \\ & etc\end{aligned}$$

ist, wird nachdem die Reihe nach Potenzen von w geordnet wurden,

$$\begin{aligned}\Sigma = S &+ w \ (\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} + etc) \\ &- w^2(\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \frac{1}{(x+4)^3} + etc) \\ &+ w^3(\frac{1}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+2)^4} + \frac{1}{(x+3)^4} + \frac{1}{(x+4)^4} + etc) \\ &- w^4(\frac{1}{(x+1)^5} + \frac{1}{(x+2)^5} + \frac{1}{(x+3)^5} + \frac{1}{(x+4)^5} + etc) \\ & etc\end{aligned}$$

sein. Nachdem also dx für w gesetzt wurde, werden wir das vollständige Differential der vorgelegten Funktion S erhalten.

$$\begin{aligned}dS =& dx \ (\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} + etc) \\ &- dx^2(\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \frac{1}{(x+4)^3} + etc) \\ &+ dx^3(\frac{1}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+2)^4} + \frac{1}{(x+3)^4} + \frac{1}{(x+4)^4} + etc) \\ &- dx^4(\frac{1}{(x+1)^5} + \frac{1}{(x+2)^5} + \frac{1}{(x+3)^5} + \frac{1}{(x+4)^5} + etc) \\ & etc\end{aligned}$$

Beispiel 2

Das Differential dieser unerklärbaren Funktion zu finden

$$S = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + ... + \tfrac{1}{2x-1}$$

Weil der allgemeine Term dieser Reihe $X = \frac{1}{2x-1}$ ist, wird

$$\begin{aligned}
X' &= \frac{1}{2x+1} & Z' &= \frac{1}{2x+1+2w} \\
X'' &= \frac{1}{2x+3} & Z'' &= \frac{1}{2x+3+2w} \\
X''' &= \frac{1}{2x+5} & Z''' &= \frac{1}{2x+5+2w} \\
&etc & &etc
\end{aligned}$$

sein. Wegen der verschwindenden und gleichen infinitesimalen Termen dieser Reihe wird der Wert von S, wenn anstelle von x $x + w$ gesetzt wird, als

$$\begin{aligned}
\Sigma = S &+ \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2x+5} + etc \\
&- \frac{1}{2x+1+2w} - \frac{1}{2x+3+2w} - \frac{1}{2x+5+2w} - etc
\end{aligned}$$

hervorgehen oder als

$$\Sigma = S + \tfrac{2w}{(2x+1)(2x+1+2w)} + \tfrac{2w}{(2x+3)(2x+3+2w)} + etc$$

Aber wenn die einzelnen Terme in Reihen nach Dimensionen von w aufgelöst werden, wird

$$\begin{aligned}
\Sigma = S + 2w &\left(\frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+3)^2} + \frac{1}{(2x+5)^2} + etc\right) \\
- 4w^2 &\left(\frac{1}{(2x+1)^3} + \frac{1}{(2x+3)^3} + \frac{1}{(2x+5)^3} + etc\right) \\
+ 8w^3 &\left(\frac{1}{(2x+1)^4} + \frac{1}{(2x+3)^4} + \frac{1}{(2x+5)^4} + etc\right) \\
- 16w^4 &\left(\frac{1}{(2x+1)^5} + \frac{1}{(2x+3)^5} + \frac{1}{(2x+5)^5} + etc\right) \\
&etc
\end{aligned}$$

sein. Man setze nun dx für w und es wird das vollständige Differential der vorgelegten Funktion S als

$$\begin{aligned}
dS =& 2dx \left(\frac{1}{(2x+1)^2}+\frac{1}{(2x+3)^2}+\frac{1}{(2x+5)^2}+etc\right)\\
&-4dx^2\left(\frac{1}{(2x+1)^3}+\frac{1}{(2x+3)^3}+\frac{1}{(2x+5)^3}+etc\right)\\
&+8dx^3\left(\frac{1}{(2x+1)^4}+\frac{1}{(2x+3)^4}+\frac{1}{(2x+5)^4}+etc\right)\\
&-16dx^4\left(\frac{1}{(2x+1)^5}+\frac{1}{(2x+3)^5}+\frac{1}{(2x+5)^5}+etc\right)\\
&\qquad etc
\end{aligned}$$

hervorgehen.

Beispiel 3

Das vollständige Differential dieser unerklärbaren Funktion von x zu finden

$$S = 1+\tfrac{1}{2^n}+\tfrac{1}{3^n}+\tfrac{1}{4^n}+...+\tfrac{1}{x^n}$$

Weil der allgemeine Term dieser Reihe $= \frac{1}{x^n}$ ist, werden die infinitesimalen Terme verschwindend und einander gleich sein. Daher wird wegen

$$\begin{aligned}
X' &= \frac{1}{(x+1)^n} & Z' &= \frac{1}{(x+1+w)^n}\\
X'' &= \frac{1}{(x+2)^n} & Z'' &= \frac{1}{(x+2+w)^n}\\
X''' &= \frac{1}{(x+3)^n} & Z''' &= \frac{1}{(x+3+w)^n}\\
etc & & etc &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X'-Z' &= \frac{nw}{(x+1)^{n+1}}-\frac{n(n+1)w^2}{2(x+1)^{n+2}}+\frac{n(n+1)(n+2)w^3}{6(x+1)^{n+3}}-etc\\
X''-Z'' &= \frac{nw}{(x+2)^{n+1}}-\frac{n(n+1)w^2}{2(x+2)^{n+2}}+\frac{n(n+1)(n+2)w^3}{6(x+2)^{n+3}}-etc\\
& \qquad etc
\end{aligned}$$

sein, aus welchem man

$$
\begin{aligned}
\Sigma - S = n & \qquad w\ \left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+2)^{n+1}} + \frac{1}{(x+3)^{n+1}} + etc\right)\\
- \frac{n(n+1)}{1\cdot 2} & \qquad w^2\left(\frac{1}{(x+1)^{n+2}} + \frac{1}{(x+2)^{n+2}} + \frac{1}{(x+3)^{n+2}} + etc\right)\\
+ \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3} & w^3\left(\frac{1}{(x+1)^{n+3}} + \frac{1}{(x+2)^{n+3}} + \frac{1}{(x+3)^{n+3}} + etc\right)\\
& \qquad etc
\end{aligned}
$$

findet. Daher wird für $w = dx$ gesetzt das gesuchte vollständige Differential der Funktion S als

$$
\begin{aligned}
dS = n & \qquad dx\ \left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+2)^{n+1}} + \frac{1}{(x+3)^{n+1}} + etc\right)\\
- \frac{n(n+1)}{1\cdot 2} & \qquad dx^2\left(\frac{1}{(x+1)^{n+2}} + \frac{1}{(x+2)^{n+2}} + \frac{1}{(x+3)^{n+2}} + etc\right)\\
+ \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3} & dx^3\left(\frac{1}{(x+1)^{n+3}} + \frac{1}{(x+2)^{n+3}} + \frac{1}{(x+3)^{n+3}} + etc\right)\\
& etc
\end{aligned}
$$

hervorgehen.

§372 Aus diesen können auch die Summen dieser Reihen interpoliert oder die Werte der summatorischen Terme beschafft werden, wann immer die Anzahl der Terme keine ganze Zahl ist. Wenn nämlich $x = 0$ gesetzt wird, wird auch $S = 0$ sein und Σ wird die Summe der Terme ausdrücken, wie die Zahl w Einheiten enthält, auch wenn diese Zahl w keine ganze Zahl ist. Wenn so im ersten Beispiel

$$\Sigma = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + ... + \tfrac{1}{w}$$

gesetzt wird, wird

$$\Sigma = \tfrac{w}{1(1+w)} + \tfrac{w}{2(2+w)} + \tfrac{w}{3(3+w)} + \tfrac{w}{4(4+w)} + etc$$

oder

$$\begin{aligned}\Sigma = w\,&(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+etc)\\ -\,w^2&(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+etc)\\ +\,w^3&(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+etc)\\ &\quad etc\end{aligned}$$

sein, im dritten Beispiel aber wird

$$\Sigma = 1+\tfrac{1}{2^n}+\tfrac{1}{3^n}+\tfrac{1}{4^n}+...+\tfrac{1}{w^n}$$

sein. Und der Wert von Σ, ob w eine ganze oder gebrochene Zahl ist, wird durch die Reihe auf die folgende Weise ausgedrückt werden.

$$\begin{aligned}\Sigma =\,&n & w\,&(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{4^{n+1}}+etc)\\ &-\frac{n(n+1)}{1\cdot 2} & w^2&(\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{1}{3^{n+2}}+\frac{1}{4^{n+2}}+etc)\\ &+\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3} & w^3&(\frac{1}{2^{n+3}}+\frac{1}{3^{n+3}}+\frac{1}{4^{n+3}}+etc)\\ && etc\end{aligned}$$

§373 Diese selben Ringe können auch auf die allgemeine Reihe angewandt werden; weil nämlich

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & ... & x\\ S = & A+ & B+ & C+ & D+ & ...+ & X\end{matrix}$$

ist und für $x+w$ anstelle von x gesetzt X in Z und S in Σ übergeht, wird

$$Z = X+\tfrac{wdX}{dx}+\tfrac{w^2ddX}{1\cdot 2dx^2}+\tfrac{w^3d^3X}{1\cdot 2\cdot 3dx^3}+etc$$

sein, und weil auf die gleiche Weise Z', Z'', Z''' etc durch X', X'', X''' etc ausgedrückt werden, wird

$$\begin{aligned}\Sigma = S+wX^{(\infty+1)}&-\frac{w}{dx} & d\,&(X'+X''+X'''+X''''+etc)\\ &-\frac{w^2}{1\cdot 2dx^2} & dd\,&(X'+X''+X'''+X''''+etc)\\ &-\frac{w^3}{1\cdot 2\cdot 3dx^3} & d^3\,&(X'+X''+X'''+X''''+etc)\\ && etc\end{aligned}$$

sein, und wenn nicht $X^{(\infty+1)} = 0$ ist, werde er auf diese Weise ausgedrückt werden können, dass die Betrachtung des Unendlichen weggeschafft wird,

$$X^{(\infty+1)} = X' + (X'' - X') + (X''' - X'') + (X'''' - X''') + etc$$

und es wird daher

$$\begin{aligned}
\Sigma = S + wX' + w \quad & ((X'' - X') + (X''' - X'') + (X'''' - X''') + etc) \\
- \frac{w}{dx} \quad & d(X' + X'' + X''' + X'''' + etc) \\
- \frac{w^2}{1 \cdot 2dx^2} \quad & dd(X' + X'' + X''' + X'''' + etc) \\
- \frac{w^3}{1 \cdot 2 \cdot 3dx^3} & d^3(X' + X'' + X''' + X'''' + etc) \\
& etc
\end{aligned}$$

sein. Wenn also $w = dx$ gesetzt wird, wird das vollständige Differential von

$$S = A + B + C + ... + X$$

so ausgedrückt entstehen

$$\begin{aligned}
dS = X'dx + dx \quad & ((X'' - X') + (X''' - X'') + (X'''' - X''') + etc) \\
- \quad d \quad & (X' + X'' + X''' + X'''' + etc) \\
- \frac{1}{2} dd \quad & (X' + X'' + X''' + X'''' + etc) \\
- \frac{1}{6} d^3 \quad & (X' + X'' + X''' + X'''' + etc) \\
etc &
\end{aligned}$$

§374 Wir wollen setzen, dass $x = 0$ ist; es wird

$$X' = A \qquad X'' = B \qquad etc$$

werden und daher wird $X' + X'' + X''' + etc$ die unendliche Reihe sein, der allgemeine Term $= X$. Man bildet daraus die Reihe aus diesen allgemeinen Termen

$$\frac{dX}{dx}, \qquad \frac{ddX}{2dx^2}, \qquad \frac{d^3X}{6dx^3}, \qquad \frac{d^4X}{24dx^4}, \qquad etc$$

die Summen welcher Reihen ins Unendliche fortgesetzt

$$\int X = \mathcal{A}, \qquad \int \frac{dX}{dx} = \mathcal{B}, \qquad \int \frac{ddX}{2dx^2} = \mathcal{C}, \qquad \int \frac{d^3X}{6dx^3} = \mathcal{D}, etc$$

seien; und weil für $x = 0$ gesetzt auch $S = 0$ wird, wird Σ die Summe der Reihe

$$A + B + C + D + ... + Z$$

sein, die w Terme enthält; es ist nämlich Z der Term des Index w, ob w eine ganze Zahl oder eine gebrochene ist. Daher wird man

$$\begin{aligned} \Sigma = wA + w((B-A) + (C-B) + (D-C) + etc) \\ - w\mathcal{B} \ - w^2\mathcal{C} \qquad - w^3\mathcal{D} \quad - w^4\mathcal{E} \qquad - etc \end{aligned}$$

haben, wo die erste Reihe weggelassen werden kann, wenn die Terme der vorgelegten Reihe schließlich verschwinden.

§375 Wir wollen nun x anstelle von w schreiben und Σ wird in S übergehen, sodass

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & \;...\; x \\ S = & A+ & B+ & C+ & D+ & ...+X \end{array}$$

ist und derselbe Wert von S wird nun durch eine unendliche Reihe auf diese Weise ausgedrückt werden

$$\begin{aligned} S = Ax + x((B-A) + (C-B) + (D-C) + etc) \\ - \mathcal{B}x \ - \mathcal{C}x^2 \qquad - \mathcal{D}x^3 \quad - \mathcal{E}x^4 \qquad - \mathcal{F}x^5 - etc; \end{aligned}$$

weil deren Wert genauso geordnet ausgedrückt wird, ob x eine ganze oder gebrochene Zahl ist, können die Differentiale von S jeder Ordnung daher leicht beschafft werden:

$$\begin{array}{llllll}
\frac{dS}{dx} & = A & + (B-A) & + (C-B) & + (D-C) & + etc \\
& - \mathcal{B} & - 2\mathcal{C}x & - 3\mathcal{D}x^2 & - 4\mathcal{E}x^3 & - etc \\
\frac{ddS}{2dx^2} & = -\mathcal{C} & - 3\mathcal{D}x & - 6\mathcal{E}x^2 & - 10\mathcal{F}x^3 & - etc \\
\frac{d^3S}{6dx^3} & = -\mathcal{D} & - 4\mathcal{E}x & - 10\mathcal{F}x^2 & - 20\mathcal{G}x^3 & - etc \\
\frac{d^4S}{24dx^4} & = -\mathcal{E} & - 5\mathcal{F}x & - 15\mathcal{G}x^2 & - 35\mathcal{H}x^3 & - etc
\end{array}$$

Daher, weil das vollständige Differential

$$= dS + \tfrac{1}{2}ddS + \tfrac{1}{6}d^3S + \tfrac{1}{24}d^4S + etc$$

ist, wird das vollständige Differential der vorgelegten Funktion S

$$\begin{aligned}
dS = {} & Adx + (B-A)dx + (C-B)dx + (D-C)dx + etc \\
& - \mathcal{B}dx - \mathcal{C}(2xdx + dx^2) - \mathcal{D}(3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3) \\
& - \mathcal{E}(4x^3dx + 6x^2dx^2 + 4xdx^3 + dx^4) - etc
\end{aligned}$$

sein.

§376 Auf diese Weise also kann das Differential jeder unerklärbaren Funktion S angegeben werden, wenn die infinitesimalen Terme der Reihe

$$A + B + C + D + etc$$

entweder verschwinden oder einander gleich sind. Wenn daher nämlich die infinitesimalen Terme dieser Reihe nicht $= 0$ waren, dann wird die Summe der Reihe $\mathcal{B}$, die aus dem allgemeinen Term $\frac{dX}{dx}$ gebildet wird, unendlich werden, aber mit der Reihe

$$A + (B-A) + (C-B) + (D-C) + etc$$

verbunden eine endliche Summe festlegen. Aber es kann geschehen, dass die Terme der Reihe $A + B + C + D + etc$ so ins Unendliche vermehrt werden, dass nicht nur die Summe der Reihe $\mathcal{B}$, sondern auch die Summe der Reihe $\mathcal{C}$ unendlich groß wird, in welchem Fall es nicht genügt, die Reihe $A + (B -$

$A) + (C - B) + etc$ hinzugefügt zu haben; aber weil ja in diesem Fall die in §370 betrachteten Terme, nämlich $S^{(\infty)}$, $S^{(\infty+1)}$, $S^{(\infty+2)}$, *etc* nicht weiter in einer arithmetischen Progression sind, wie wir angenommen hatten, wird die Art dieser Progression zu beachten sein. So wie wir also angenommen haben, dass die ersten Differentiale dieser Terme gleich sind, so werden wir die Methode weiter ausdehnen, wenn wir erst die zweiten oder dritten oder weiteren Differenzen als konstant festsetzen.

§377 Nachdem also dieselbe Begründung, die wir in §369 benutzt haben, beibehalten werde, wollen wir setzen, dass erst die zweiten Differenzen der erwähnten Werte konstant sind,

$$S^{(\infty)}, S^{(\infty+1)}, S^{(\infty+2)}$$

Erste Differenzen

$$X^{(\infty+1)}, X^{(\infty+2)}$$

Zweite Differenzen

$$X^{(\infty+2)} - X^{(\infty+1)}$$

Daher wird

$$\begin{aligned}\Sigma^{(\infty)} = S^{(\infty+w)} &= S^{(\infty)} + wX^{(\infty+1)} + \frac{w(w+1)}{1\cdot 2}(X^{(\infty+2)} - X^{(\infty+1)})\\ &= S^{(\infty)} - \frac{w(w-3)}{1\cdot 2}X^{(\infty+1)} + \frac{w(w-1)}{1\cdot 2}X^{(\infty+2)}\end{aligned}$$

sein. Deswegen werden wir diese Gleichung haben

$$\begin{gathered}\Sigma + Z' + Z'' + Z''' + \ldots + Z^{(\infty)}\\ = S + X' + X'' + X''' + \ldots + X^{(\infty)} - \tfrac{w(w-3)}{1\cdot 2}X^{(\infty+1)} + \tfrac{w(w-1)}{1\cdot 2}X^{(\infty+2)},\end{gathered}$$

aus welcher man

$$\begin{aligned}\Sigma = S &+ X' + X'' + X''' + X'''' + etc \text{ ins Unendliche}\\ &- Z' - Z'' - Z''' - Z'''' - etc \text{ ins Unendliche}\\ &+ wX^{(\infty+1)} + \frac{w(w-1)}{1\cdot 2}(X^{(\infty+2)} - X^{(\infty+1)})\end{aligned}$$

findet. Diese infinitesimalen Terme können aber so dargestellt werden, dass

$$
\begin{array}{lll}
\Sigma & = S & + X' + X'' + X''' + X'''' + etc \\
 & & - Z' - Z'' - Z''' - Z'''' - etc \\
 & + wX' & + w \left\{ \begin{array}{l} X'' + X''' + X'''' + X'''''etc \\ -X' - X'' - X''' - X'''' - etc \end{array} \right\} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} +\frac{w(w-1)}{1\cdot 2}X'' \\ -\frac{w(w-1)}{1\cdot 2}X' \end{array} \right\} & + \dfrac{w(w-1)}{1\cdot 2} \left\{ \begin{array}{l} X''' + X''' + X''''' + etc \\ -2X'' - 2X''' - 2X'''' - etc \\ +X' + X'' + X''' + etc \end{array} \right\}
\end{array}
$$

ist, woher zugleich das Gesetz klar ist, wie dieser Ausdruck beschaffen sein wird, wenn die dritten oder vierten oder weiteren Differenzen erst konstant waren.

§378 Weil also, wie wir oben bewiesen haben,

$$Z = X + \tfrac{wdX}{1dx} + \tfrac{w^2ddX}{1\cdot 2dx^2} + \tfrac{w^3dddX}{1\cdot 2\cdot 3dx^3} + etc$$

ist, wird wenn wir anstelle von Z', Z'', Z''', etc die daher zu entstehenden Werte einsetzen, der Wert von S, wenn anstelle von x $x + w$ geschrieben wird, der folgende sein

$$
\begin{array}{llll}
\Sigma & = S + wX' & + w & \left\{ \begin{array}{l} X'' + X''' + X'''' + X'''''etc \\ -X' - X'' - X''' - X'''' - etc \end{array} \right\} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} +\frac{w(w-1)}{1\cdot 2}X'' \\ -\frac{w(w-1)}{1\cdot 2}X' \end{array} \right\} & + \dfrac{w(w-1)}{1\cdot 2} & \left\{ \begin{array}{l} X''' + X'''' + X''''' + etc \\ -2X'' - 2X''' - 2X'''' - etc \\ +X' + X'' + X''' + etc \end{array} \right\} \\
 & & - \dfrac{w}{dx} & d(X' + X'' + X''' + X'''' + etc) \\
 & & - \dfrac{w^2}{2dx^2} & d^2(X' + X'' + X''' + X'''' + etc) \\
 & & - \dfrac{w^3}{6dx^3} & d^3(X' + X'' + X''' + X'''' + etc) \\
 & & etc &
\end{array}
$$

Wenn also anstelle von $w\ dx$ gesetzt wird, wird das vollständige Differential der vorgelegten unerklärbaren Funktion S hervorgehen, natürlich

$$
\begin{aligned}
dS \quad = X'dx \qquad & + dx\left\{\begin{array}{c} X'' + X''' + X'''' + X'''''etc \\ -X' - X'' - X''' - X'''' - etc \end{array}\right\} \\
\left\{\begin{array}{c} -X''\frac{dx(1-dx)}{1\cdot 2} \\ +X'\frac{dx(1-dx)}{1\cdot 2} \end{array}\right\} \qquad & - \frac{dx(1-dx)}{1\cdot 2}\left\{\begin{array}{c} X''' + X'''' + X''''' + etc \\ -2X'' - 2X''' - 2X'''' - etc \\ +X' + X'' + X''' + etc \end{array}\right\} \\
\left\{\begin{array}{c} +X'''\frac{dx(1-dx)(2-dx)}{1\cdot 2\cdot 3} \\ -2X''\frac{dx(1-dx)(2-dx)}{1\cdot 2\cdot 3} \\ +X'\frac{dx(1-dx)(2-dx)}{1\cdot 2\cdot 3} \end{array}\right\} \qquad & + \frac{dx(1-dx)(2-dx)}{1\cdot 2\cdot 3}\left\{\begin{array}{c} +X'''' + X''''' + etc \\ -3X''' - 3X'''' - etc \\ +3X'' + 3X''' + etc \\ -X' - X'' - etc \end{array}\right\} \\
& - d(X' + X'' + X''' + X'''' + X''''' + etc) \\
& - \frac{1}{2}dd(X' + X'' + X''' + X'''' + X''''' + etc) \\
& - \frac{1}{6}d^3(X' + X'' + X''' + X'''' + X''''' + etc) \\
& - \frac{1}{24}d^4(X' + X'' + X''' + X'''' + X''''' + etc) \\
& etc,
\end{aligned}
$$

welcher Ausdruck sich sehr weit erstreckt, und, die wie vielten Differenzen auch immer erst konstant waren, das gesuchte Differential beschafft. Diese Formel ist nämlich angepasst auf konstante Differentiale und zugleich ist das Gesetz klar, wenn es notwendig ist, weiter fortzuschweifen.

§379 Wenn daher also die Reihe $A + B + C + D + etc$, aus welcher die unerklärbare Funktion

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & ... & x \\
S & = & A & + & B & + & C & + & D & + & ... + & X
\end{array}
$$

gebildet wird, so beschaffen war, dass ihre infinitesimalen Terme schließlich verschwinden, dann, wie wir schon angemerkt haben, wird

$$
\begin{aligned}
dS = -\,d \quad & (X' + X'' + X''' + X'''' + etc) \\
-\frac{1}{2}dd \; & (X' + X'' + X''' + X'''' + etc) \\
-\frac{1}{6}d^3 \; & (X' + X'' + X''' + X'''' + etc) \\
-\frac{1}{24}d^4 & (X' + X'' + X''' + X'''' + etc) \\
etc &
\end{aligned}
$$

sein. Wenn aber die infinitesimalen Terme jener Reihe nicht $= 0$ sind, aber dennoch verschwindende Differenzen haben, dann muss zu diesem Ausdruck darüber hinaus

$$
dx \left\{ \begin{array}{ll} X' & \begin{array}{l} +X'' + X''' + X'''' + X''''' + etc \\ -X' - X'' - X''' - X'''' - X''''' - etc \end{array} \end{array} \right\}
$$

addiert werden. Aber wenn erst die zweiten Differenzen der infinitesimalen Terme dieser Reihe $A + B + C + D + etc$ verschwinden, dann muss außerdem

$$
\frac{dx(dx-1)}{1 \cdot 2} \left\{ \begin{array}{ll} \begin{array}{l} +X'' \\ -X' \end{array} & \begin{array}{l} +X''' + X'''' + X''''' + etc \\ -2X'' - 2X''' - 2X'''' - etc \\ X' + X'' + X''' + etc \end{array} \end{array} \right\}
$$

hinzugefügt werden. Und wenn erst die dritten Differenzen dieser erwähnten infinitesimalen Terme verschwindend waren, dann muss außer diesen schon beschafften Ausdrücken darüber hinaus

$$
\frac{dx(dx-1)(dx-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left\{ \begin{array}{ll} \begin{array}{l} +X''' \\ -2X'' \\ +X' \end{array} & \begin{array}{l} +X'''' + X''''' + X'''''' + etc \\ -3X''' - 3X'''' - 3X''''' - etc \\ +3X'' + 3X''' + 3X'''' + etc \\ -X' - X'' - X''' - etc \end{array} \end{array} \right\}
$$

addiert werden. Und so weiter werden die darüber hinaus zu addierenden Ausdrücke beschaffen sein, wenn erst weitere Differenzen der infinitesimalen Terme der Reihe $A + B + C + D + tc$ verschwinden. Und daher, welche

Reihe auch immer angenommen wird, solange ihre infinitesimalen Terme schließlich auf verschwindende Differenzen führen, wird das Differential der unerklärbaren Funktion, die aus ihr gebildet werde, bestimmt werden können.

§380 Wenn $x = 0$ gesetzt wird, wird $X = A, X'' = B, X''' = C, etc$ werden. Daher, wie $A + B + C + D + etc$ eine Reihe ist, deren allgemeiner Term X ist, wenn aus den allgemeinen Termen

$$\tfrac{dX}{dx}, \tfrac{ddX}{2dx^2}, \tfrac{d^3X}{6dx^3}, \tfrac{d^4X}{24dx^4}, etc$$

auf die gleiche Weise unendliche Reihen gebildet werden und deren Summen respektive durch die Buchstaben $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$, etc bezeichnet werden, wird die Summe von w Termen der Reihe

$$A + B + C + D + etc$$

so ausgedrückt werden, dass es egal ist, ob w eine ganze Zahl ist oder nicht. Wir wollen also x für w schreiben, dass

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & x \\ S = & A+ & B+ & C+ & D+ & \ldots+ & X \end{array}$$

ist und wenn die infinitesimalen Terme dieser Reihe verschwinden, wird

$$S = -\mathcal{B}x - \mathcal{C}x^2 - \mathcal{D}x^3 - \mathcal{E}x^4 - etc$$

sein. Aber wenn die infinitesimalen Terme zumindest erste konstante Differenzen haben, dann muss in diesem Wert darüber hinaus dieser addiert werden

$$x \left\{ A \qquad \begin{array}{l} +B + C + D + E + etc \\ -A - B - C - D - etc \end{array} \right\}$$

Wenn aber erst die zweiten Differenzen jener infinitesimalen Terme verschwinden, dann muss außerdem

$$\frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \left\{ \begin{array}{l} +B \\ -A \end{array} \qquad \begin{array}{l} +C + D + E + F + etc \\ -2B - 2C - 2D - 2E - etc \\ +A + B + C + D + etc \end{array} \right\}$$

addiert werden. Wenn erst die dritten Differenzen verschwindend waren, dann muss darüber hinaus diese unendliche Reihe hinzugefügt werden

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left\{\begin{array}{ll} & C+D+E+F+G+etc \\ +C & \\ & -3C-3D-3E-3F-etc \\ -2B & \\ & +3B+3C+3D+3E+etc \\ +A & \\ & -A-B-C-D-etc \end{array}\right\}$$

etc

§381 Wir wollen diese Dinge auch auf eine andere Art unerklärbarer Funktionen anwenden, die aus einem längeren Produkt einiger Terme der vorgelegten Reihe $A+B+C+D+etc$ bestehen, und es sei

$$\begin{aligned} &\;1\;\;2\;\;3\;\;4\;\;...\;x \\ S =&A{\cdot}B{\cdot}C{\cdot}D{\cdot}...{\cdot}X \end{aligned}$$

und man suche zuerst den Wert Σ, in welchen S verwandelt wird, wenn anstelle von x $x+w$ geschrieben wird; wir wollen aber wie zuvor setzen, dass Z der Term der Reihe $A+B+C+D+etc$ ist, dessen Index $= x+w$ ist, wie X dem Index x entspricht. Um also diesen Fall auf den vorhergehenden zurückzuführen, wollen wir Logarithmen nehmen und es wird

$$ln(S) = ln(A) + ln(B) + ln(C) + ln(D) + ... + ln(X)$$

sein. Wenn daher die infinitesimalen Terme dieser Reihe verschwinden, wird unter Verwendung derselben Methode, die wir zuvor benutzt haben,

$$\begin{aligned} ln(\Sigma) =&ln(S) + ln(X') + ln(X'') + ln(X''') + etc \\ &- ln(Z') - ln(Z'') - ln(Z''') - etc \end{aligned}$$

sein und daher wird durch Zurückgehen zu Zahlen

$$\Sigma = S\cdot \tfrac{X'}{Z'}\cdot \tfrac{X''}{Z''}\cdot \tfrac{X'''}{Z'''}\cdot \tfrac{X''''}{Z''''}\cdot etc$$

sein; dieser Ausdruck gilt also, wenn die infinitesimalen Terme der Reihe A, B, C, D, etc der Einheit gleich werden. Wenn aber die Logarithmen der infinitesimalen Terme dieser Reihe nicht verschwinden, aber dennoch verschwindende Differenzen haben, dann muss zu jener Reihe, die wir für $ln(\Sigma)$ gefunden haben, darüber hinaus diese Reihe addiert werden

$$wln(X') + w(ln(\frac{X''}{X'}) + ln(\frac{X'''}{X''}) + ln(\frac{X''''}{X'''}) + etc)$$

und so wird man durch Nehmen von Zahlen

$$\Sigma = S \cdot X'^w \cdot \frac{X''^w X'^{1-w}}{Z'} \cdot \frac{X'''^w X''^{1-w}}{Z''} \cdot \frac{X''''^w X'''^{1-w}}{Z'''} \cdot etc$$

haben.

§382 Wenn wir daher also $x = 0$ setzen, in welchem Fall $S = 1$ und $X' = A, X'' = B, X''' = C, etc$ wird, wird Σ das Produkt w Terme dieser Reihe A, B, C, D, etc bezeichnen. Wenn wir also für w x schreiben, dass Σ einen Wert erhält, den wir zuvor S selbst zugeteilt hatten, so dass

$$\begin{array}{l} \quad\ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ ...\ x \\ S = A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot ... \cdot X \end{array}$$

ist, weil nun Z', Z'', Z''', etc in X', X'', X''', etc übergehen, wenn die Logarithmen der infinitesimalen Terme dieser Reihe A, B, C, D, E, etc verschwinden, wird S auf diese Weise

$$S = \frac{A}{X'} \cdot \frac{B}{X''} \cdot \frac{C}{X'''} \cdot \frac{D}{X''''} \cdot \frac{E}{X'''''} \cdot etc$$

ausgedrückt werden. Wenn aber erst die Differenzen der Logarithmen dieser infinitesimalen Terme dieser Reihe A, B, C, D, etc verschwinden, dann wird diese Funktion S auf die folgende Weise ausgedrückt werden, dass

$$S = A^x \cdot \frac{B^x A^{1-x}}{X'} \cdot \frac{C^x B^{1-x}}{X''} \cdot \frac{D^x C^{1-x}}{X'''} \cdot \frac{E^x D^{1-x}}{X''''} \cdot etc$$

ist; wenn erst die zweiten Differenzen jener Logarithmen verschwindend sind, wird aus dem Vorhergehenden leicht zusammengefügt, Funktionen von welcher Art darüber hinaus addiert werden müssen; diesen Fall, weil er kaum aufzutauchen pflegt, wollen wir hier auslassen. Im Übrigen werde ich den Nutzen dieser Ausdrücke bei der Aufgabe der Interpolation im folgenden Kapitel aufzeigen.

§383 Weil hier hauptsächlich also die Differentiation von unerklärbaren Funktionen dieser Art vorgelegt ist, wollen wir das Differential dieser Funktion

$$S = A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot ... \cdot X$$

untersuchen. Dafür wollen wir die zuvor gefundene Gleichung

$$\begin{aligned} ln(\Sigma) = & ln(S) + ln(X') + ln(X'') + ln(X''') + etc \\ & - ln(Z') - ln(Z'') - ln(Z''') - etc \end{aligned}$$

resumieren, und weil $ln(Z)$ aus $ln(X)$ entsteht, wenn anstelle von x $x + w$ gesetzt wird, wird

$$ln(Z) = ln(X) + \tfrac{w}{dx} dln(X) + \tfrac{w^2}{2dx^2} ddln(X) + \tfrac{w^3}{6dx^3} d^3 ln(X) + etc$$

sein; nach Einsetzen dieser Werte für $ln(Z'), ln(Z''), ln(Z'''), etc$ wird man

$$\begin{aligned} ln(\Sigma) = ln(S) - & \frac{w}{dx} \quad d \quad (ln(X') + ln(X'') + ln(X''') + ln(X'''') + etc) \\ - & \frac{w^2}{2dx^2} dd \, (ln(X') + ln(X'') + ln(X''') + ln(X'''') + etc) \\ - & \frac{w^3}{6dx^3} d^3 \; (ln(X') + ln(X'') + ln(X''') + ln(X'''') + etc) \\ & etc \end{aligned}$$

haben. Man setze nun $w = dx$ und es wird $ln(\Sigma) = ln(S) + dln(S)$ werden und daher wird

$$\begin{aligned} \frac{dS}{S} = & - \quad d \quad (ln(X') + ln(X'') + ln(X''') + ln(X'''') + etc) \\ & - \frac{1}{2} dd \, (ln(X') + ln(X'') + ln(X''') + ln(X'''') + etc) \\ & - \frac{1}{6} d^3 \; (ln(X') + ln(X'') + ln(X''') + ln(X'''') + etc) \\ & \quad etc \end{aligned}$$

sein, welche Formel gilt, wenn die Logarithmen der infinitesimalen Terme der Reihe A, B, C, D, etc verschwinden; wenn aber selbige nicht verschwinden, aber dennoch verschwindende Differenzen haben, dann muss zu vorhergehendem Ausdruck des vollständigen Differentials darüber hinaus diese Reihe addiert werden

$$dxln(X') + dx(ln(\tfrac{X''}{X'}) + ln(\tfrac{X'''}{X''}) + ln(\tfrac{X''''}{X'''}) + etc),$$

damit man das vollständige Differential erhält.

§384 Dasselbe kann auf eine andere Weise geleistet werden. Man setze $x = 0$, in welchem Fall $ln(S)$ in 0 übergeht. Dann bilde man die Reihen, deren allgemeine Terme

$$ln(X), \tfrac{dln(X)}{dx}, \tfrac{ddln(X)}{2dx^2}, \tfrac{d^3ln(X)}{6dx^3}, etc$$

seien und die Summe dieser unendlichen Reihen seien respektive $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, etc$. Man schreibe x für w, dass $\Sigma = S$ ist, und es wird

$$ln(S) = -\mathcal{B}x - \mathcal{C}x^2 - \mathcal{D}x^3 - \mathcal{E}x^4 - etc$$

sein, wenn freilich die Logarithmen der infinitesimalen Terme der Reihe A, B, C, D, etc, deren allgemeiner Term X ist, verschwinden; aber wenn erst die Differenzen dieser Logarithmen verschwinden, so wird

$$\begin{aligned} ln(S) =& xln(A) + x(ln(\frac{B}{A}) + ln(\frac{C}{B}) + ln(\frac{D}{C}) + ln(\frac{E}{D}) + etc) \\ &- \mathcal{B}x - \mathcal{C}x^2 - \mathcal{D}x^3 - \mathcal{E}x^4 - etc \end{aligned}$$

sein. Und daher wird das Differential von $ln(S)$

$$\begin{aligned} \frac{dS}{S} =& dxln(A) + dx(ln(\frac{B}{A}) + ln(\frac{C}{B}) + ln(\frac{D}{C}) + ln(\frac{E}{D}) + etc) \\ &- \mathcal{B}dx - 2\mathcal{C}xdx - 3\mathcal{D}x^2dx - 4\mathcal{E}x^3dx - etc \end{aligned}$$

sein. Aber wenn das vollständige Differential verlangt wird, wird es

$$\begin{aligned} \frac{dS}{S} =& dxln(A) + dx(ln(\frac{B}{A}) + ln(\frac{C}{B}) + ln(\frac{D}{C}) + ln(\frac{E}{D}) + etc) \\ &- \mathcal{B}dx - \mathcal{C}(2xdx + dx^2) - \mathcal{D}(3xxdx + 3xdx^2 + dx^3) - etc \end{aligned}$$

sein. Um den Nutzen dieser Formeln zu zeigen, fügen wir die folgenden Beispiele hinzu, die wir auf jede der beiden Art lösen.

Beispiel 1

Das Differential dieser unerklärbaren Funktion zu finden

$$S = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{7}{8} \cdot ... \cdot \tfrac{2x-1}{2x}$$

Hier ist vor allem zu bemerken, dass die infinitesimalen Terme dieser Faktoren in die Einheit übergehen und deren Logarithmus verschwinden. Weil also $X = \frac{2x-1}{2x}$ ist, wird

$$X' = \frac{2x+1}{2x+2}, \quad X'' = \frac{2x+3}{2x+4}, \quad X' = \frac{2x+5}{2x+6}, \quad etc$$

und allgemein

$$X^{(n)} = \frac{2x+2n-1}{2x+2n}$$

sein; daher wird

$$\begin{aligned}
ln(X^{(n)}) = &\ ln(2x+2n-1) - ln(2x+2n)\\
d\ \ ln(X^{(n)}) = &\ \frac{2dx}{2x+2n-1} - \frac{2dx}{2x+2n}\\
ddln(X^{(n)}) = &-\frac{4dx^2}{(2x+2n-1)^2} + \frac{4dx^2}{(2x+2n)^2}\\
d^3\,ln(X^{(n)}) = &+\frac{2\cdot 2\cdot 4dx^3}{(2x+2n-1)^3} - \frac{2\cdot 2\cdot 4dx^3}{(2x+2n)^3}\\
d^4\,ln(X^{(n)}) = &-\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 6dx^4}{(2x+2n-1)^4} + \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 6dx^4}{(2x+2n)^4}\\
&etc
\end{aligned}$$

sein; daher wird das vollständige Differential

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{S} = -2\,dx &\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2x+5} + etc \\ -\frac{1}{2x+2} - \frac{1}{2x+4} - \frac{1}{2x+6} - etc \end{array} \right\}\\
+\frac{4}{2}dx^2 &\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+3)^2} + \frac{1}{(2x+5)^2} + etc \\ -\frac{1}{(2x+2)^2} - \frac{1}{(2x+4)^2} - \frac{1}{(2x+6)^2} - etc \end{array} \right\}\\
-\frac{8}{3}dx^3 &\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(2x+1)^3} + \frac{1}{(2x+3)^3} + \frac{1}{(2x+5)^3} + etc \\ -\frac{1}{(2x+2)^3} - \frac{1}{(2x+4)^3} - \frac{1}{(2x+6)^3} - etc \end{array} \right\}\\
etc
\end{aligned}$$

sein. Wenn daher aber nur das erste Differential gesucht wird, wird es

$$\frac{dS}{S} = -2dx \cdot \left(\frac{1}{(2x+1)(2x+2)} + \frac{1}{(2x+3)(2x+4)} + \frac{1}{(2x+5)(2x+6)} + etc\right)$$

sein, welches selbe durch die andere in §394 angegebene Methode so gefunden wird. Weil

$$ln(X) = ln\left(\frac{2x-1}{2x}\right)$$

ist, wird

$$\frac{dln(X)}{dx} = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}, \qquad \frac{ddln(X)}{2dx^2} = -\frac{2}{(2x-1)^2} + \frac{1}{2xx}$$
$$\frac{d^3ln(X)}{6dx^3} = \frac{8}{3(2x-1)^3} - \frac{1}{3x^3}, \quad etc$$

sein und daher wird

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \quad ln(\frac{1}{2}) + ln(\frac{3}{4}) + ln(\frac{5}{6}) + ln(\frac{7}{8}) + etc \\
\mathcal{B} &= \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \frac{2}{9} + etc \\ -\frac{2}{2} - \frac{2}{4} - \frac{2}{6} - \frac{2}{8} - \frac{2}{10} - etc \end{array} \right\} = 2ln(2) \\
\mathcal{C} &= -\frac{4}{2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + etc \\ -\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2} - \frac{1}{8^2} - etc \end{array} \right\} \\
\mathcal{D} &= \frac{8}{3} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + etc \\ -\frac{1}{2^3} - \frac{1}{4^3} - \frac{1}{6^3} - \frac{1}{8^3} - etc \end{array} \right\} \\
\mathcal{E} &= -\frac{16}{4} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + etc \\ -\frac{1}{2^4} - \frac{1}{4^4} - \frac{1}{6^4} - \frac{1}{8^4} - etc \end{array} \right\} \\
& \quad etc
\end{aligned}$$

werden oder es wird

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= +\frac{2}{1} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - etc\right) \\
\mathcal{C} &= -\frac{4}{2} \left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - etc\right) \\
\mathcal{D} &= +\frac{8}{3} \left(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - etc\right) \\
\mathcal{E} &= -\frac{16}{4} \left(1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - etc\right) \\
& \quad etc
\end{aligned}$$

sein. Nach Einsetzen dieser Werte wird

$$\begin{aligned}\frac{dS}{S} =& -2 \quad dx(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-etc)\\ &+4x \quad dx(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-etc)\\ &-8x^2 \; dx(1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}-etc)\\ &+16x^3dx(1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}-etc)\\ &\qquad etc\end{aligned}$$

sein. Wenn also $x = 0$ ist, in welchem Fall $ln(S) = 0$ und $S = 1$ wird, wird $dS = -2dxln(2)$ sein.

Beispiel 2

Das Differential dieser unerklärbaren Funktion $S = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot x$ zu finden. Die Terme dieser Reihe $1, 2, 3, 4, etc$ wachsen ins Unendliche so, dass die Differenzen der Logarithmen verschwinden; es ist nämlich

$$ln(\infty + 1) - ln(\infty) = ln(1 + \tfrac{1}{\infty}) = \tfrac{1}{\infty} = 0$$

Weil also $X = x$ ist, wird

$$X' = x + 1, \quad X'' = x + 2, \quad X''' = x + 3, \quad etc$$

sein; Weiter wird aber wegen $ln(X) = ln(x)$

$$dln(X) = \tfrac{dx}{x}, \quad ddln(X) = -\tfrac{dx^2}{x^2}, \quad d^3ln(X) = \tfrac{2dx^3}{x^3},$$
$$d^4ln(X) = -\tfrac{2\cdot 3dx^4}{x^4}, \quad etc$$

sein; daher, wenn die letzten Logarithmen verschwinden, wäre

$$\begin{aligned}\frac{dS}{S} =& -dx \; (\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}+etc)\\ &+\frac{dx^2}{2}(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{1}{(x+4)^2}+etc)\\ &-\frac{dx^3}{3}(\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+2)^3}+\frac{1}{(x+3)^3}+\frac{1}{(x+4)^3}+etc)\\ &\qquad etc\end{aligned}$$

Aber weil erst die Differenzen der Logarithmen verschwinden, muss darüber hinaus dieser Ausdruck addiert werden

$$dxln(x+1) + dx(ln(\tfrac{x+2}{x+1}) + ln(\tfrac{x+3}{x+2}) + ln(\tfrac{x+4}{x+3}) + ln(\tfrac{x+5}{x+4}) + etc)$$

Weil aber

$$\begin{aligned}
ln(\frac{x+2}{x+1}) &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{3(x+1)^3} - \frac{1}{4(x+1)^4} + etc \\
ln(\frac{x+3}{x+2}) &= \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2(x+2)^2} + \frac{1}{3(x+2)^3} - \frac{1}{4(x+2)^4} + etc \\
& etc
\end{aligned}$$

ist, wird das wahre vollständige Differential

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{S} = dxln(x+1) &- \frac{1}{2}(dx - dx^2)(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + etc) \\
&+ \frac{1}{3}(dx - dx^3)(\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + etc) \\
&- \frac{1}{4}(dx - dx^4)(\frac{1}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+2)^4} + \frac{1}{(x+3)^4} + etc) \\
&+ \frac{1}{5}(dx - dx^5)(\frac{1}{(x+1)^5} + \frac{1}{(x+2)^5} + \frac{1}{(x+3)^5} + etc) \\
& etc
\end{aligned}$$

sein. Wenn wir aber dieses Differential auf andere Art ausdrücken wollen, weil

$$ln(X) = ln(x), \quad \tfrac{dln(X)}{dx} = \tfrac{1}{x}, \quad \tfrac{ddln(X)}{2dx^2} = -\tfrac{1}{2x^2}, \quad \tfrac{d^3ln(X)}{6dx^3} = \tfrac{1}{3x^3}$$
$$\tfrac{d^4ln(X)}{24dx^4} = -\tfrac{1}{4x^4}, \quad etc$$

ist, wird man die folgende Reihe haben

$$\begin{array}{lllllll}
\mathcal{A} = & ln(1) + ln(2) + ln(3) + ln(4) + ln(5) + etc) \\
\mathcal{B} = 1 & (1 & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & +\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & +etc) \\
\mathcal{C} = -\frac{1}{2} & (1 & +\frac{1}{2^2} & +\frac{1}{3^2} & +\frac{1}{4^2} & +\frac{1}{5^2} & +etc) \\
\mathcal{D} = \frac{1}{3} & (1 & +\frac{1}{2^3} & +\frac{1}{3^3} & +\frac{1}{4^3} & +\frac{1}{5^3} & +etc) \\
\mathcal{E} = -\frac{1}{4} & (1 & +\frac{1}{2^4} & +\frac{1}{3^4} & +\frac{1}{4^4} & +\frac{1}{5^4} & +etc) \\
& etc
\end{array}$$

Daher wird wegen $ln(A) = ln(1) = 0$ aus §384

$$\begin{aligned}
ln(S) = \quad & x \ \ (ln(\frac{2}{1}) + ln(\frac{3}{2}) + ln(\frac{4}{3}) + ln(\frac{5}{4}) + etc) \\
- \quad & x \ \ (1 \quad + \frac{1}{2} \quad + \frac{1}{3} \quad + \frac{1}{4} \quad + etc) \\
+ & \frac{1}{2}x^2(1 \quad + \frac{1}{2^2} \quad + \frac{1}{3^2} \quad + \frac{1}{4^2} \quad + etc) \\
- & \frac{1}{3}x^3(1 \quad + \frac{1}{2^3} \quad + \frac{1}{3^3} \quad + \frac{1}{4^3} \quad + etc) \\
+ & \frac{1}{4}x^4(1 \quad + \frac{1}{2^4} \quad + \frac{1}{3^4} \quad + \frac{1}{4^4} \quad + etc) \\
& \quad etc
\end{aligned}$$

werden. Die zwei ersten Summen, mit welchen x multipliziert worden ist, auch wenn jede der beiden Summen unendlich ist, haben dennoch beide zugleich eine endliche Summe. Wenn nämlich n Terme jeder der beiden genommen werden, wird

$$ln(n+1) - 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} - ... - \tfrac{1}{n}$$

hervorgehen. Aber oben (§142a) haben wir gefunden, dass

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + ... + \tfrac{1}{n} = Konst + ln(n) + \tfrac{1}{2n} - \tfrac{\mathcal{A}}{2n^2} + \tfrac{\mathcal{B}}{4n^4} - etc$$

ist und diese Konstante geht als $= 0,5772156649015325$ hervor. Wenn daher also $n = \infty$ gesetzt wird, wird

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + ... + \tfrac{1}{\infty} = Konst. + ln(\infty)$$

sein, woher der Wert jener zwei ins Unendliche fortgesetzten Reihen $= ln(\infty + 1) - Konst - ln(\infty) = -Konst$ sein wird. Daraus wird

$$\begin{aligned}
ln(S) = -x \quad & \cdot 0,5772156649015325 \\
+ \frac{1}{2}\ & xx(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + etc) \\
- \frac{1}{3}\ & x^3\,(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + etc) \\
+ \frac{1}{4}\ & x^4\,(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + etc) \\
& etc
\end{aligned}$$

sein, woher man die Differentiale jeder Ordnung leicht findet. Es wird nämlich

$$\begin{aligned}\frac{dS}{S} = & -dx \quad \cdot 0,5772156649015325\\ & +xdx\ (1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+etc)\\ & -x^2dx(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+etc)\\ & +x^3dx(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+etc)\\ & \qquad etc\end{aligned}$$

sein. Aber wenn diese Reihen zu einer zusammengefasst werden, wird

$$\tfrac{dS}{S} = -dx \cdot 0,5772156649015325 + \tfrac{xdx}{1(1+x)} + \tfrac{xdx}{2(2+x)} + \tfrac{xdx}{3(3+x)} + \tfrac{xdx}{4(4+x)} + etc$$

sein. Daher, wenn $x = 0$ ist, wird

$$\tfrac{dS}{S} = -dx \cdot 0,5772156649015325$$

werden. Aus deren ersten Ausdruck wird aber in diesem Fall

$$\begin{aligned}\frac{dS}{S} = & -\frac{1}{2}dx(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+etc)\\ & +\frac{1}{3}dx(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+etc)\\ & -\frac{1}{4}dx(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+etc)\\ & +\frac{1}{5}dx(1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+etc)\\ & \qquad etc\end{aligned}$$

sein.

§385 Daher können also auch Differentiale unerklärbarer Funktionen solcher Art in jedem Spezialfall beschafft werden, deshalb weil wir hier vollständige Differentiale gefunden haben. Deswegen, wenn solche Funktionen in Ausdrücke eingehen,, die unbestimmt scheinen, von welcher Art wir welche im vorhergehenden Kapitel behandelt haben, werden die Werte durch dieselbe Methode bestimmt werden können, wie man aus den beigefügten Beispielen einsehen wird.

Beispiel 1

Den Wert dieses Ausdruckes

$$\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{x}}{x(x-1)}-\frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

im Fall zu bestimmen, wann immer $x=1$ gesetzt wird.
Wir wollen

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{x}=S$$

setzen; es wird aus §372

$$\begin{aligned}S = x\ &(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+etc)\\ -x^2&(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+etc)\\ +x^3&(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+etc)\\ &etc\end{aligned}$$

sein, oder weil auch

$$\begin{aligned}S = +1 \quad &+\frac{1}{2} \quad +\frac{1}{3} \quad +\frac{1}{4} \quad +\frac{1}{5} \quad +etc\\ -\frac{1}{1+x}&-\frac{1}{2+x}-\frac{1}{3+x}-\frac{1}{4+x}-\frac{1}{5+x}-etc\end{aligned}$$

ist, wird, wenn jeder Term der oberen Reihe mit dem vorhergehenden der unteren kombiniert wird,

$$S=1+\frac{w}{2(2+w)}+\frac{w}{3(3+w)}+\frac{w}{4(4+w)}+etc$$

oder

$$\begin{aligned}S=1+w\ &(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+etc)=1+\mathcal{B}w\\ -w^2&(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+etc)= \quad -\mathcal{C}w^2\\ +w^3&(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+etc)= \quad +\mathcal{D}w^3\\ &etc \qquad\qquad\qquad\qquad etc\end{aligned}$$

werden. Der ganze Ausdruck wird also für $x=1+w$ gesetzt in diesen übergehen

$$\frac{1+\mathcal{B}w-\mathcal{C}w^2+\mathcal{D}w^3-etc}{w(1+w)}-\frac{1}{w(1+2w)}$$

oder

$$\frac{w+\mathcal{B}w+2\mathcal{B}w^2-\mathcal{C}w^2-etc}{w(1+w)(1+2w)}=\frac{1+\mathcal{B}+2\mathcal{B}w-\mathcal{C}w-etc}{(1+w)(1+2w)}$$

Man setze nun $w=0$ und der Wert des vorgelegten Ausdruckes im Fall $x=1$ wird

$$=1+\mathcal{B}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+etc$$

sein; weil diese Reihe $=\frac{1}{6}\pi^2$ ist, folgt, dass der gesuchte Wert $=\frac{1}{6}\pi^2$ ist.

Beispiel 2

Den Wert dieses Ausdruckes

$$\frac{2x-xx}{(x-1)^2}+\frac{\pi\pi x}{6(x-1)}-\frac{(2x-1)(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{x})}{x(x-1)^2}$$

im Fall zu finden, indem $x=1$ gesetzt wird. Man setze $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{x}=S$ und setze $x=1+w$; es wird, wie wir im vorhergehenden Beispiel gefunden haben,

$$S=1+\mathcal{B}w-\mathcal{C}w^2+\mathcal{D}w^3-etc$$

werden, während

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+etc=\frac{1}{6}\pi\pi-1\\
\mathcal{C} &= \frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+etc\\
\mathcal{D} &= \frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+etc\\
& \quad etc
\end{aligned}$$

ist. Für $x=1+w$ gesetzt wird also der vorgelegte Ausdruck diese Form annehmen

$$\frac{1-ww}{ww}+\frac{(1+\mathcal{B})(1+w)}{w}-\frac{(1+2w)(1+\mathcal{B}w-\mathcal{C}w^2+\mathcal{D}w^3-etc)}{(1+w)w^2}$$

die auf denselben Nenner $w^2(1+w)$ gebracht

$$\frac{1+w+w^2-w^3+2w^2+w^3+\mathcal{B}w(1+2w+ww)-1-\mathcal{B}w+\mathcal{C}w^2-\mathcal{D}w^3-2w-2\mathcal{B}w^2+2\mathcal{E}w^3-etc}{w^2(1+w)}$$

wird, die auf diese Form reduziert wird

$$\frac{w^2+\mathcal{C}w^2+\mathcal{B}w^3+2\mathcal{C}w^3-\mathcal{D}w^3+etc}{w^2(1+w)}$$

Es werde nun $w = 0$ und es wird $1 + \mathcal{C}$ hervorgehen. Deshalb wird der Wert des vorgelegten Ausdruckes im Fall $x = 1 = 1 + \mathcal{C}$ sein und daher durch diese Reihe ausgedrückt werden

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + etc;$$

Weil deren Summe weder durch Logarithmen noch durch Peripherie des Kreises π beschafft werden kann, kann der gesuchte Wert immer noch nicht auf andere Weise angegeben werden. Aus diesen zwei Beispielen erkennt man den Nutzen, den die Differentiation von unerklärbaren Funktionen in der Lehre der Reihen haben kann, hinreichend deutlich.

§386 Bei der hier angegebenen Methode unerklärbare Funktionen zu differenzieren, haben wir angenommen, dass die infinitesimalen Terme der Reihe A, B, C, D, E, etc entweder $= 0$ sind oder schließlich verschwindende Differenzen haben; wenn keines von beiden der Fall ist, wird sich diese Methode nicht benutzen lassen. Deswegen möchte ich noch eine andere Methode erläutern, die durch diese Bedingung nicht eingeschränkt ist und die die allgemeine Summation von Reihen, die aus dem allgemeinen Term hergeholt und oben [Kap. V] genauer erklärt wurde, liefert. Es bezeichnen also die Buchstaben $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, etc$ die in §122 beschafften Bernoulli-Zahlen und es sei diese unerklärbare Funktion vorgelegt

$$\begin{array}{rl} & \overset{1}{A}+\overset{2}{B}+\overset{3}{C}+\overset{4}{D}+\overset{\ldots}{\ldots}+\overset{x}{X} \\ S = & \end{array}$$

und weil wir oben (§130) gezeigt haben, dass

$$S = \int Xdx + \frac{1}{2}X + \frac{\mathcal{A}dX}{1\cdot 2dx} - \frac{\mathcal{B}d^3X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^3} + \frac{\mathcal{C}d^5X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6dx^5} - etc$$

sein wird, wird es daher leicht sein, das Differential dieser Funktion S zu beschaffen, es wird nämlich

$$dS = Xdx + \frac{1}{2}dX + \frac{\mathcal{A}ddX}{1\cdot 2dx} - \frac{\mathcal{B}d^4X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^3} + \frac{\mathcal{C}d^6X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6dx^5} - etc$$

sein.

§387 Wenn aber die vorgelegte Progression mit der geometrischen verbunden ist, in welchem Fall ihre infinitesimalen Terme nunmal auf konstante Differenzen geführt werden und deshalb die feste Methode keinen Platz findet, dann wird die in §174 angegebene Methode Aushilfe bringen. Wenn nämlich diese Funktion vorgelegt ist

$$S = Ap + Bp^2 + Cp^3 + Dp^4 + ... + Xp^x$$

ist, suche man die Werte der Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, etc$, dass

$$\tfrac{p-1}{p-e^u} = 1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \epsilon u^5 + etc$$

ist, nach Finden von welchen, wir wir sie oben in §173 beschafft haben,

$$S = \tfrac{p}{p-1} \cdot p^x (X - \tfrac{\alpha dX}{dx} + \tfrac{\beta ddX}{dx^2} - \tfrac{\gamma d^3X}{dx^3} + \tfrac{\delta d^4X}{dx^4} - etc)$$

$\pm$*Konstante* sein wird, die die Summe $= 0$ werden lässt, wenn $x = 0$ gesetzt wird, oder die in einem gewissen anderen Fall genügt. Nachdem also das Differential genommen wurde, wird diese Konstante aus der Rechnung herausgehen und es wird

$$\begin{aligned} dS = & \frac{p}{p-1} \cdot p^x dx ln(p)(X - \frac{\alpha dX}{dx} + \frac{\beta ddX}{dx^2} - \frac{\gamma d^3X}{dx^3} + etc) \\ & + \frac{p}{p-1} p^x (dX - \frac{\alpha ddX}{dx} + \frac{\beta d^3X}{dx^2} - \frac{\gamma d^4X}{dx^3} + etc) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{gathered} dS = \tfrac{p^{x+1}}{p-1}(Xdxln(p) - (\alpha ln(p) - 1)dX \\ +(\beta ln(p) - \alpha)\tfrac{ddX}{dx} - (\gamma ln(p) - \beta)\tfrac{d^3X}{dx^2} + etc) \end{gathered}$$

sein, was das gesuchte Differential der vorgelegten Funktion S ist.

§388 Wenn aber jene unerklärbare Funktion aus Faktoren besteht und deren infinitesimale Logarithmen konstante Differenzen haben oder weniger, dann wird auch durch diese Methode das Differential der Funktion beschafft werden können. Es sei nämlich

$$\begin{aligned} & \;\;1\;\;\;2\;\;\;3\;\;\;4\;\;\; ...\;\; x \\ S = & A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot ... \cdot X \end{aligned}$$

Weil daher

$$ln(S) = ln(A) + ln(B) + ln(C) + ln(D) + ... + ln(X)$$

wird, wird, indem man die Bernoulli-Zahlen zur Hilfe nimmt, durch die obere Methode

$$ln(S) = \int dxln(X) + \tfrac{1}{2}ln(X) + \tfrac{\mathcal{A}dln(X)}{1\cdot 2dx} - \tfrac{\mathcal{B}d^3ln(X)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^3} + etc$$

sein, nach Differentiation dieses Ausdruckes wird

$$\begin{aligned}\frac{dS}{S} =& dxln(X) + \frac{1}{2}dln(X) + \frac{\mathcal{A}ddln(X)}{1\cdot 2dx} - \frac{\mathcal{B}d^4ln(X)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^3} \\ &+ \frac{\mathcal{C}d^6ln(X)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6dx^5} - \frac{\mathcal{D}d^8ln(X)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8dx^7} + etc\end{aligned}$$

wird. Daher, wenn $X = x$ war, dass

$$S = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot x$$

ist, wird nach der Anwendung

$$\tfrac{dS}{S} = dxln(X) + \tfrac{dx}{2x} - \tfrac{\mathcal{A}dx}{2xx} + \tfrac{\mathcal{B}dx}{4x^4} - \tfrac{\mathcal{C}dx}{6x^6} + \tfrac{\mathcal{D}dx}{8x^8} - etc$$

werden, welche Form, wenn x eine sehr große Zahl ist, gefälliger benutzt wird als die, die wir zuvor gefunden haben.