Kapitel VIII
Über die weitere Differentiation von Differentialformen *

Leonhard Euler

§242 Wenn nur eine einzige Variable vorhanden ist und ihr erstes Differential als konstant angenommen wird, ist oben schon die Methode angegeben worden, die Differentiale eines jeden Grades zu finden. Wenn natürlich das Differential einer gewissen Funktion erneut differenziert wird, entspricht dies ihrem zweiten Differential und dieses gibt wiederum das dritte Differential der Funktion und so weiter. Diese selbe Regel hat in der Tat auch Geltung, wenn die Funktion mehrere Variablen beinhaltet oder nur eine einzige, deren erstes Differential als nicht konstant festgelegt wird. Es sei also V irgendeine Funktion von x aber auch dx diesmal nicht konstant, sondern auf irgendeine Weise variabel, so dass das Differential von $dx = ddx$ ist und das Differential von diesem d^3x und so weiter, und wir wollen die zweiten und folgenden Differentiale der Funktion V ausfindig machen.

§243 Wir wollen festlegen, dass das erste Differential der Funktion $V = Pdx$ ist, wo P eine gewisse von V abhängige Funktion von x sein wird. Wenn wir nun das zweite Differential der Funktion V finden wollen, muss ihr erstes Differential Pdx erneut differenziert werden. Weil dieses ein Produkt aus den zwei variablen Größen P und dx ist, von welcher das Differential jener

*Originaltitel: "De formularum differentialium ulteriori differentiatione", erstmals publiziert im Jahre 1755", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 10, pp 163-186", Eneström-Nummer E212, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

$dP = pdx$ ist, das Differential von dieser dx hingegen ddx, wird durch die über Faktoren gegebene Regel ihr zweites Differential dieses sein

$$ddV = Pddx + pdx^2$$

Des Weiteren, wenn $dp = qdx$ ist, weil das Differential von dx^2 $2dxddx$ ist, wird, indem erneut differenziert wird, sein

$$d^3V = Pd^3x + dPddx + 2pdxddx + dpdx^2$$

nun wird wegen $dP = pdx$ und $dp = qdx$ sein

$$d^3V = Pd^3x + 3pdxddx + qdx^3$$

und auf die gleiche Weise werden die weiteren Differentiale gefunden werden.

§244 Wir wollen dies auf die Potenzen von x anwenden, deren einzelne Differentiale wir ausfindig machen wollen, wenn dx als nicht konstant festgelegt wird.
I. Es sei also $V = x$; es wird sein

$$dV = dx,\ d^2V = d^2x,\ d^3V = d^3x,\ d^4V = d^4x, \text{ etc}$$

II. Es sei also $V = x^2$; es wird sein

$$dV = 2xdx$$

und

$$\begin{aligned}
ddV &= 2xddx + 2dx^2\\
d^3V &= 2xd^3x + 6dxddx\\
d^4V &= 2xd^4x + 8dxd^3x \ + 6ddx^2\\
d^5V &= 2xd^5x + 10dxd^4x + 20ddxd^3x\\
& \quad etc.
\end{aligned}$$

III. Wenn im Allgemeinen $V = x^n$ war, wird sein

$$\begin{aligned}
dV &= nx^{n-1}dx\\
ddV &= nx^{n-1}ddx + n(n-1)x^{n-2}dx^2\\
d^3V &= nx^{n-1}ddx + 3n(n-1)x^{n-2}dxddx + n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3\\
d^4V &= nx^{n-1}d^4x + 4n(n-1)x^{n-2}dxd^3x + 3n(n-1)x^{n-2}ddx^2
\end{aligned}$$

$$+6n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^2ddx+n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}dx^4$$
etc.

Wenn also dx konstant und deshalb $ddx = 0$, $d^3x = 0$, $d^4x = 0$ etc. war, werden dieselben Differentiale entspringen, die schon oben für diese Annahme gefunden werden sind.

§245 Weil ja also die Differentiale einer jeden Ordnung von x nach demselben Gesetz differenziert werden wie endliche Größen, werden irgendwelche Ausdrücke, in denen außer der endlichen Größe ihre Differentiale auftauchen, gemäß der oben gegebenen Vorschriften differenziert werden können. Diese Operation, weil sie manchmal auftaucht, wollen wir hier an einigen Beispielen illustrieren.

I. Wenn $V = \frac{xd^3x}{dx^2}$ war, wird durch differenzieren hervorgehen

$$dV = \frac{xd^3x}{dx^2} + \frac{ddx}{dx} - \frac{2xddx^2}{dx^3}$$

II. Wenn $V = \frac{x}{dx}$ war, wird sein

$$dV = 1 - \frac{xddx}{dx^2},$$

wo nichts daran hindert, dass wir für V ein endlich goße Größe festgelegt haben.

III. Wenn$V = xx\ln\left(\frac{ddx}{dx^2}\right)$ war, weil V in $xx\ln(ddx) - 2xx\ln(dx)$ verwandelt wird, wird gemäß der üblichen Regeln durch Differenzieren sein

$$dV = 2xdx\ln(ddx) + \frac{xxd^3x}{ddx} - 4xdx\ln(dx) - \frac{2xxddx}{dx}$$

Auf die gleiche Weise werden aber auch die höheren Differentiale von V aufgefunden werden.

§246 Wenn der vorgelegte Ausdruck zwei Variablen involviert, natürlich x und y, wird entweder das Differential von einer oder von keiner der beiden als konstant festgelegt; denn es ist vollkommen beliebig, welches der beiden Differentiale als konstant angenommen wird, weil es von unserem Belieben abhängt, wie wir die aufeinander folgenden Werte der einen zu wachsen festlegen wollen. Und in der Tat können nicht die Differentiale von jeder der beiden Variablen zugleich als konstant festgelegt werden; dadurch selbst würde nämlich eine Relation zwischen den Variablen x und y angenommen werden, der dennoch entweder nicht besteht oder unbekannt ist. Wenn nämlich, während wir x gleichmäßig zu wachsen festlegen, y auch die gleichen Zuwächse zu erhalten festgesetzt werden würde, dann würde damit selbst angezeigt werden, dass $y = ax + b$ sein wird und so hinge y von x ab, was dennoch nicht angenommen werden darf. Dieser Sache wegen kann entweder das Differential nur einer einzigen Variable oder keiner als konstant festgelegt werden. Wenn wir daher aber die Differentiation durchzuführen wissen, wenn kein Differential als konstant angenommen worden ist, werden zugleich auch die Differentiale bekannt sein, wenn nur das eine der beiden Differentiale als konstant festgelegt wird; es ist nämlich lediglich von Nöten, dass, wenn dx als konstant festgelegt wird, überall die ddx, d^2x, d^4x etc. enthaltenden Terme gestrichen werden.

§247 Es bezeichne also V irgendeine endliche Funktion von x und y und es sei $dV = Pdx + Qdy$. Um das zweite Differential von V zu finden, wollen wir jedes der beiden Differentiale dx und dy veränderlich annehmen, und weil P und Q Funktionen von x und y sind, wollen wir festlegen

$$\begin{aligned} dP &= pdx + rdy \\ dQ &= rdx + qdy; \end{aligned}$$

oben haben wir nämlich gesehen, dass $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = r$ ist.
Nachdem diese Dinge festgelegt worden sind, werde $dV = Pdx + Qdy$ differenziert und es wird aufgefunden werden.

$$ddV = Pddx + qdx^2 + 2rdxdy + Qddy + qdy^2$$

Wenn also das Differential dx als konstant festgelegt wird, wird sein

$$ddV = pdx^2 + 2rdxdy + Qddy + qdy^2$$

Wenn aber das Differential dy als konstant festgelegt werden würde, wäre

$$ddV = Pddx + pdx^2 + 2edxdy + qdy^2$$

§248 Wenn also irgendeine Funktion von x und y zweimal differenziert wird, nachdem kein Differential als konstant festgelegt worden ist, wird ihr zweites Differential immer eine Form von dieser Art haben

$$ddV = Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdy^2 + Tdxdy;$$

es werden aber die Größen P,Q,R,S und T so voneinander abhängen, dass unter Verwendung der Bezeichnungsweise im vorhergehenden Kapitel gilt

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right), R = \left(\frac{dP}{dx}\right), S = \left(\frac{dQ}{dy}\right) \text{ und } T = 2\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 2\left(\frac{dP}{dy}\right);$$

wenn auch nur eine einzige dieser Bedingungen nicht erfüllt ist, werden wir sicher sagen können, dass die vorgelegte Formel das zweite Differential von keiner Funktion ist. Sofort wird also erkannt werden können, wo eine Formel von dieser Art ein zweites Differential einer gewissen Größe ist oder nicht.

§249 Auf die gleiche Weise werden die dritten und folgenden Differentiale gefunden werden, was förderlicher sein wird, es an einem speziellen Beispiel gezeigt zu haben, als dass bloß die allgemeinere Formeln verwendet werden. Es sei also $V = xy$; es wird sein

$$\begin{aligned}
dV &= ydx + xdy\\
ddV &= yddx + 2dxdy + xddy\\
d^3V &= yd^3x + 3dyddx + 3ddydx + xd^3y\\
d^4V &= yd^4x + 4dyd^3x + 6ddxddy + 4dxd^3y + xd^4y\\
&\quad etc.
\end{aligned}$$

in welchem Beispiel die immer schon Koeffizienten dem Gesetz der Potenzen des Binoms folgen und daher, so weit wie beliebt, fortgesetzt werden können. Aber wenn $V = \frac{y}{x}$ war, wird sein

$$\begin{aligned}
dV &= \frac{dy}{x} - \frac{ydx}{xx}\\
ddV &= \frac{ddy}{x} - \frac{2dxdy}{xx} + \frac{2ydx^2}{x^3} - \frac{yddx}{x^2}\\
d^3V &= \frac{d^3y}{x} - \frac{3dxddy}{xx} + \frac{6dx^2dy}{x^3} - \frac{3dyddx}{x^2} + \frac{6ydxddx}{x^3} - \frac{6ydx^3}{x^4} - \frac{yd^3x}{x^2}\\
&\quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

in welchem Beispiel die Progression der Differentiale nicht so leicht klar wir wie die im vorhergehenden.

§250 Und in der Tat ist dieser Methode des Differenzierens nicht nur auf endliche Funktionen beschränkt, sondern mit derselben Tätigkeit kann auch das Differential einer jeden Funktion, die schon Differentiale in sich enthält, gefunden werden, ob ein einziges bestimmtes Differential als konstant angenommen wird oder nicht. Weil nämlich die einzelnen Differentiale gleichermaßen und nach demselben Gesetz differenziert werden wie endliche Größen, gelten die in den vorhergehenden Kapiteln angegebenen Regeln auch hier und müssen lediglich verwendet werden. Es bezeichne also V den Ausdruck, der differenziert werden muss, ob er endlich oder unendliche groß oder unendlich klein ist; und die Differentiationsweise wird aus den nachstehenden Beispielen erkannt.

I. Es sei $V = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; es wird sein

$$dV = \frac{dxddx + dyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

II. Es sei $V = \dfrac{ydx}{dy}$; es wird also gelten

$$dV = dx + \frac{yddx}{dy} - \frac{ydxddy}{dy^2}.$$

III. Es sei $V = \dfrac{\left(dx^2 + dy^2\right)^{\frac{3}{2}}}{dxddy - dyddx}$; es wird sein

$$dV = \frac{(3dxddx + 3dyddy)\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dxddy - dyddx} - \frac{\left(dx^2 + dy^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(dxd^3y - dyd^3x\right)}{(dxddy - dyddx)^2}.$$

Weil diese Differentiale im allgemeinster Weise genommen worden sind, weil kein Differential für konstant gehalten worden ist, werden daher leicht die Differentiale abgeleitet werden können, die entspringen, wenn entweder dx oder dy als konstant festgelegt wird.

§251 Weil, nachdem kein Differential als konstant angenommen worden ist, auch kein Gesetz, nach welchem die aufeinander folgenden Werte fortschreiten sollen, vorgeschrieben wird, werden die zweiten Differentiale und die der folgenden Ordnungen nicht bestimmt sein und nichts Bestimmtes bedeuten. Daher wird eine Formel, in welcher zweite und höhere Differentiale enthalten sind, keinen bestimmten Wert haben, wenn nicht ein gewisses Differential als konstant angenommen worden ist; sondern ihre Bedeutung wird ungenau sein und variieren, je nachdem ob das eine oder das andere Differential als konstant festgelegt worden ist. Dennoch sind indes auch zweite Differentiale enthaltende Ausdrücke solcher Art gegeben, die, auch wenn kein Differential als konstant festgelegt worden ist, dennoch eine bestimmte Bedeutung umfassen, die ununterbrochen dieselbe bleibt, welches Differential auch immer konstant festgelegt wird. Die Natur von Formeln dieser Art werde wir aber unten sorgfältiger erforschen und auch eine Methode angeben, sie von den anderen, die keine bestimmten Werte in sich umfassen, zu trennen.

§252 Um also die Beschaffenheit von Formeln, in denen zweite oder höhere Differentiale enthalten sind, leichter zu erkennen, wollen wir zuerst eine einzige Variable enthaltende Differentialformeln betrachten und es wird leicht klar, wenn in einer gewissen Formel ihr zweites Differential ddx der Variable x enthalten ist und kein Differential als konstant festgelegt wird, dass die Formel keinen festen Wert haben kann. Wenn nämlich das Differential von x konstant gesetzt wird, wird $ddx = 0$ werden; wenn aber das Differential von xx $2xdx$ oder xdx konstant gesetzt wird, weil das Differential von xdx, also $xddx + dx^2 = 0$ ist, wird $ddx = -\frac{dx^2}{x}$ werden. Aber wenn das Differential von irgendeiner Potenz x^n, also $nx^{n-1}dx$ oder $x^{n-1}dx$, konstant sein muss, wird ihr zweites Differential dieses sein

$$x^{n-1}ddx + (n-1)x^{n-2}dx^2 = 0 \text{ und daher } ddx = -\frac{(n-1)dx^2}{x}.$$

Es werden aber andere Werte für ddx hervorgehen, wenn die Differentiale von anderen Funktionen von x als konstant festgelegt werden. Es ist aber offenbar, dass eine Formel, in welcher ddx auftaucht, verschiedenste Werte annimmt, je nachdem ob anstelle von ddx entweder 0 oder $-\frac{dx^2}{x}$ oder $-\frac{(n-1)dx^2}{x}$ oder ein anderer Ausdruck von dieser Art geschrieben wird. Natürlich, wenn die Formel $\frac{xxddx}{dx^2}$ vorgelegt wird, die wegen der homogenen unendliche kleinen Größen ddx und dx^2 einen endlichen Wert haben müsste, geht sie für konstant festgelegtes dx in 0 über; wenn $d.x^2$ konstant ist, geht sie in $-x$ über; wenn

$d.x^3$ konstant ist, geht sie in $-2x$ über; wenn $d.x^4$ konstant ist, geht sie in $-3x$ über und so weiter. Und sie kann daher keinen bestimmten Wert haben, wenn nicht definiert wird, ein Differential von welcher Art konstant angenommen worden ist.

§253 Diese Unbeständigkeit der Bedeutung wird in ähnlicher Weise gezeigt, wenn das dritte Differential in einer gewissen Formel enthalten ist. Wir wollen diese Formel $\frac{x^3 d^3 x}{dxddx}$ betrachten, die in gleicher Weise einen endlichen Wert darstellt. Wenn das Differential dx konstant ist, geht sie $\frac{0}{0}$ über, deren Wert sogleich klar zutage treten wird. Es sei $d.x^2$ konstant; es wird $ddx = -\frac{dx^2}{x}$ sein und durch erneutes Differenzieren

$$d^3 x = -\frac{2dxddx}{x} + \frac{dx^3}{x^2} = \frac{3dx^3}{x^2}$$

- wegen $ddx = -\frac{dx^2}{x}$; in diesem Fall geht also die vorgelegte Formel $\frac{x^3 d^3 x}{dxddx}$ in $-3x^2$ über. Aber wenn $d.x^4$ konstant war, wird $ddx = -\frac{(n-1)dx^2}{x}$ sein und daher

$$d^3 x = -\frac{2(n-1)dxddx}{x} + \frac{(n-1)dx^3}{x^2} = \frac{2(n-1)^2}{xx} + \frac{(n-1)dx^3}{xx} = \frac{(2n-1)(n-1)dx^3}{xx}.$$

in diesem Fall wird sein

$$\frac{d^3 x}{ddx} = -\frac{(2n-1)dx}{x} \text{ und } \frac{x^3 d^3 x}{dxddx} = -(2n-1)dx^2,$$

woher es klar zutage tritt, wenn $n = 1$ oder dx konstant ist, dass der Wert der Formel $= -x^2$ sein wird. Daraus ist es offenbar, wenn in einer gewissen Formel dritte oder höhere Differentiale auftauchen und nicht zugleich angezeigt wird, ein Differential von welcher Art konstant angenommen worden ist, dass die Formeln keine bestimmten Wert hat und sogar überhaupt nichts bedeutet; deswegen können solche Ausdrücke in einer Rechnung nicht auftauchen.

§254 Auf die gleiche Weise, wenn die Formel zwei oder mehrere Variablen enthält und in ihr Differentiale zweiten oder höheren Grades auftauchen, wird eingesehen werden, dass sie keinen bestimmten Wert haben kann, wenn nicht ein gewisses Differential als konstant festgelegt wird; davon sind nur die Fälle ausgenommen, welche wir bald gründlicher studieren werden. Wenn nämlich zuerst ddx in einer gewissen Formel enthalten ist, weil ja für verschiedenen Differentiale, die konstant festgelegt werden, der Wert von ddx ununterbrochen variiert wird, kann es nicht geschehen, dass die Formel einen beständigen Wert behält, und dasselbe gilt auch für jedes höhere Differential von x so wie die zweiten und höheren Differentiale der übrigen Variablen. Wenn aber die zweiten Differentiale von zwei oder mehreren Variablen enthalten sind, kann es geschehen, dass die aus dem einem entstehende Unbeständigkeit von denen der übrigen aufgehoben wird; und daher entsprießt jener Fall, den wir erwähnt haben, in welchem eine zweite Differentiale von zwei oder mehreren Variablen involvierende Funktion einen bestimmten Wert haben kann, weil nichts im Wege steht, dass kein Differential konstant festgelegt worden ist.

§255 Daher kann dieser Formel

$$\frac{yddx + xddy}{dxdy}$$

keine beständige und feste Bedeutung haben, wenn nicht ein gewisses Differential konstant festgelegt wird. Denn wenn dx konstant festgelegt wird, wird man $\frac{xddy}{dxdy}$ haben; wenn aber dy konstant gesetzt wird, wird man $\frac{yddx}{dxdy}$ haben; es ist aber offenbar, dass diese Formeln nicht notwendigerweise einander gleich sind. Wenn sie nämlich notwendigerweise einander gleich wären, müsste sie solche bleiben, welche Funktion von x auch immer anstelle von y eingesetzt werden würde. Wir wollen festlegen, dass nur $y = xx$ ist, und weil für konstant festgelegtes dx $ddy = 2dx^2$ ist, wird die Formel $\frac{xddy}{dxdy}$ in 1 übergehen; wenn aber dy oder $2xdx$ konstant festgelegt wird, wird $ddy = 2xddx + 2dx^2 = 0$ und daher $ddx = -\frac{dx^2}{x}$ werden, woher die Formel $\frac{yddx}{dxdy}$ in $-\frac{1}{2}$ übergeht. Weil also in einem einzigen Fall eine Diskrepanz aufgefunden wird, wird um Vieles weniger im Allgemeinen $\frac{xddy}{dxdy}$ gleich $\frac{yddx}{dxdy}$ sein, nachdem dy konstant gesetzt worden ist. Weil des Weiteren die Formel $\frac{yddx+xddy}{dxdy}$ nicht beständig bleibt, solange entweder dx oder dy konstant gesetzt wird, wird sie um Vieles weniger beständig sein, wenn das Differential einer jeden anderen Funktion entweder von x oder von y oder von jeder der beiden als konstant festgelegt wird.

§256 Daher ist auch klar, dass eine Formel von dieser Art keinen festen Wert haben kann, wenn sie nicht so beschaffen ist, dass, nachdem anstelle der Variablen y, z etc., die außer x enthalten sind irgendwelche Funktionen von x eingesetzt worden waren, die zweiten und höheren Differentiale von x, natürlich ddx, d^3x etc., völlig aus der Rechnung herausgehen. Wenn nämlich nach irgendeiner solchen Substitution in der Formel immer noch ddx oder dx^3 oder d^4x etc zurückbliebe, wird, weil die Differentiale, je nachdem ob die einen oder die anderen konstant angenommen werden, ihre Bedeutung variieren, der Wert der Formel selbst auch unbestimmt sein. So ist die zuvor vorgelegte Formel $\frac{yddx+xddy}{dxdy}$ beschaffen; wenn diese einen festen Wert hätte, was auch immer y bedeutet, müsste sie auch einen festen Wert haben, wenn y eine gewisse Funktion von x bezeichnen würde. Aber wenn wir nur $y = x$ setzen, geht die Formel in $\frac{2xddx}{dx^2}$ über, die natürlich wegen des in ihr enthaltenen ddx unbestimmt ist und die einen und die anderen Werte annimmt, je nachdem ob die einen oder die Differentiale konstant gesetzt werden, wie aus §252 hinreichend offenbar ist.

§257 Es mag aber hier Zweifel aufkommen, ob überhaupt solche zwei oder mehrere Differentiale zweiten oder höheren Grades enthaltende Formeln gegeben sind, die sich dieser Eigenschaft erfreuen, dass, wenn anstelle der übrigen Variablen irgendwelche Funktionen einer einzigen eingesetzt werden, die Differentiale zweiten Grades sich völlig aufheben. Diesem Zweifel wollen wir zuerst so entgegnen, dass wir eine Formel von dieser Art vorlegen, die mit dieser Eigenschaft versehen ist, damit durch die Erforschung die Tragweite der Frage besser begriffen wird. Ich sage also, dass diese Formel

$$\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$$

die erwähnte Eigenschaft besitzt; was für eine Funktion von x nämlich auch immer anstelle von y eingesetzt wird, immer werden der Differentiale zweiten Grades völlig verschwinden; diese Eigenschaft wollen wir an den folgenden Beispielen prüfen:

I. Es sei $y = x^2$; es wird sein

$$dy = 2xdx \text{ und } ddy = 2xddx + 2dx^2,$$

welche Werte in der Formel $\frac{dyddx-dxddy}{dx^3}$ eingesetzt geben werden

$$\frac{2xdxddx - 2xdxddx - 2dx^3}{dx^3} = -2$$

II. Es sei $y = x^n$; es wird sein

$$dy = nx^{n-1}dx \text{ und } ddy = nx^{n-1}ddx + n(n-1)x^{n-2}dx^2,$$

welche Werte eingesetzt die Formel $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ in diese verwandelt werden

$$\frac{nx^{n-1}dxddx - nx^{n-1}dxddx - n(n-1)x^{n-2}dx^3}{dx^3} = -n(n-1)x^{n-2}$$

III. Es $y = -\sqrt{1-xx}$; es wird sein

$$dy = \frac{xdx}{\sqrt{1-xx}} \text{ und } dyy?\frac{xddx}{\sqrt{1-xx}} + \frac{dx^2}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$$

und die Formel $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ geht über in

$$\frac{xddx}{dx^3\sqrt{1-xx}} - \frac{xddx}{dx^2\sqrt{1-xx}} - \frac{1}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$$

In all diesen Beispielen haben sich also die zweiten Differentiale ddx gegenseitig aufgehoben und dies wird genauso passieren passieren, welche anderen Funktionen auch immer anstelle von x eingesetzt werden.

§258 Weil diese Beispiele die Gültigkeit unserer Proposition schon gebilligt haben, dass die Formel $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ einen festen Wert hat, auch wenn kein Differential konstant angenommen worden ist, werden wir den Beweis umso leichter führen können. Es sei y irgendeine Funktion von x und ihr Differential dy wird von dieser Art sein, dass $dy = pdx$ ist, und p wird eine gewisse Funktion von x sein und ihr Differential wird deshalb eine Form von dieser Art $dp = qdx$ haben und q wird wiederum eine Funktion von x sein. Weil also $dy = pdx$ ist, wird durch Differenzieren $ddy = pddx + qdx^2$ sein und daher auch

$$dyddx - dxddy = pdxddx - pdxddx - qdx^3 = -qdx^3;$$

Weil in diesem Ausdruck kein zweites Differential enthalten ist, wird er einen festen Wert haben und $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ wird $= -q$ sein. Auf welche Weise auch immer y von x abhängt, die zweiten Differentiale werden sich in dieser Formel immer gegenseitig aufheben und dieses Grundes wegen wird ihr Wert, der sonst unbestimmt wäre, beständig und fest sein.

§259 Obwohl wir hier festgelegt haben, dass y eine Funktion von x ist, bleibt dennoch die Gültigkeit gleichermaßen bestehen, wenn y von x überhaupt nicht abhängt, wie wir angenommen haben. Während wir nämlich für y irgendeine Funktion eingesetzt haben und nicht definiert haben, was für eine sie ist, haben wir y auch keine Abhängigkeit von x zugeschrieben. Dennoch kann der Beweis indes ohne Erwähnung der Funktion geführt werden; was für eine Größe nämlich y auch immer ist, ob von x abhängend oder nicht, ihr Differential dy wird zu dx homogen sein und so wird $\frac{dx}{dy}$ eine endliche Größe bezeichnen, deren Differential, welches sie ergibt, wenn x in $x + dx$ und $y + dy$ übergeht, fest sein wird und von keinem Gesetz der zweiten Differentiale abhängen wird. Es sei also $\frac{dy}{dx} = p$; es wird $dy = pdx$ und $ddy = pddx + dpdx + dpdx$ sein, woher wird

$$dxddy - dyddx = dpdx^2,$$

dessen Wert nicht unbestimmt ist, weil er nur die ersten Differentiale enthält; und deshalb wird er derselbe bleiben, ob entweder ein gewisses Differential als konstant angenommen wird, wie auch immer es zunächst beschaffen ist, oder ob kein Differential konstant gesetzt worden ist.

§260 Weil also $dyddx - dxddy$, während der zweiten Differentiale nicht im Wege stehen, die sich potentiell gegenseitig aufzuheben anzusehen sind, eine feste Bedeutung hat, wird irgendein Ausdruck, in welche keine anderen zweiten Differentiale außer der Formel $dyddx - dxddy$ enthalten sind, in gleicher Weise eine feste Bedeutung haben. Oder wenn $dyddx - dxddy = \omega$ gesetzt wird und V eine aus x, y, deren ersten Differentialen dx, dy und aus ω irgendwie zusammengesetzt Größe war, wird sie einen festen Wert haben. Weil nämlich in den ersten Differentialen ihr beliebigen Gesetz nicht berücksichtigt wird, nach welchem die aufeinander folgenden Werte von x zu wachsen festgelegt werden, sich in ω die zweiten Differentiale gegenseitig aufheben, wird auch die Größe C selbst nicht unbestimmt, sondern fix sein. So erhält dieser Ausdruck

$$\frac{\left(dx^2 + dy^2\right)^{\frac{3}{2}}}{dxddy - dyddy}$$

einen festen Wert, obwohl er mit zweiten Differentialen beschmutzt scheint, und erhält darüber hinaus, weil der Zähler dem Nenner homogen ist, einen endlichen Wert, wenn er nicht zufällig entweder unendlich groß oder unendlich klein wird.

§261 So wie die Formel $dyddy - dyddx$ einen festen Wert zu haben gezeigt worden ist, so werden auch, wenn die dritte Variable z hinzukommt, diese Formeln

$$dxddz - dzddx \text{ und } dyddz - dzddy$$

feste Werte haben. Daher werden Ausdrücke, die die drei Variablen x, y und z involvieren, wenn in ihnen keine anderen zweiten Differentiale außer diesen angegebenen auftauchen, dann ebenso unveränderlich sein, wie wenn überhaupt keine zweiten Differentiale enthalten wären. So erfreut sich diesen Ausdruck

$$\frac{\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)^{\frac{3}{2}}}{(dx + dz)\, ddy - (dy + dz)\, ddx + (dx - dy)\, ddz},$$

weil die zweiten Differentiale nicht im Wege stehen, einer festen Bedeutung. Auf die gleiche Weise können mehrere Variablen enthaltende Formeln dargeboten werden, in denen die zweiten Differentiale nicht verhindern, dass deren Bedeutung immer dieselbeist.

§262 Nachdem also von den allgemeinen Formeln dieses Geschlechtes diejenigen ausgenommen worden sind, die zweite Differentiale umfassen, werden alle übrigen keine bestimmte Bedeutung haben und können deshalb nicht in der Rechnung auftreten, wenn nicht ein gewisses Differential bestimmt wird, das als konstant angenommen worden ist. Sobald aber ein gewisses Differential als konstant angenommen wird, werden alle Ausdrücke, wie viele Variablen auch immer sie enthalten und Differentiale von welcher Ordnung auch immer nach dem ersten in sie eingehen, feste Bedeutungen erhalten und werden in Rechnungen auftreten können. Wenn nämlich eines Beispiels wegen dx als konstant angenommen worden ist, verschwinden die zweiten und folgenden Differentiale von x; und welche Funktionen von x auch immer anstelle der übrigen Variablen y,z etc. eingesetzt werden, werden deren zweite Differentiale durch x^2, die dritten durch dx^3 etc. bestimmt werden und so wird die von den zweiten Differentialen herstammenden Unbeständigkeit beseitigt. Dasselbe passiert, wenn das erste Differential einer anderen Variable oder irgendeiner Funktion konstant festgelegt wird.

§263 Aus diesen Dingen folgt also, dass die zweiten Differentiale und die der höheren Ordnungen in Wirklichkeit niemals eine Rechnung eingehen und wegen der zu allgemeinen Bedeutung für die Analysis völlig ungeeignet sind.

Wann immer nämlich zweite Differentiale vorhanden zu sein scheinen, ist entweder ein gewisses erstes Differential konstant angenommen worden oder aber keines. Im ersten Fall verschwinden die zweiten Differentiale völlig aus der Rechnung, während sie durch die ersten Differentiale bestimmt werden. Im zweiten Fall aber, wenn sie sich nicht gegenseitig aufheben, wird die Bedeutung zu allgemein sein und deshalb finden sie in der Analysis auch keinen Platz; wenn sie sich aber gegenseitig aufgeben, sind sie nur scheinbar vorhanden und in Wirklichkeit sind allein die endlichen Größen mit ihren Differentialen vorhanden zu sein anzusehen. Weil sie aber dennoch sehr oft wenn auch nur scheinbar in der Rechnung gebraucht werden, war es notwendig, die Methode sie zu handhaben darzustellen. Bald werden wird aber eine Methode darlegen, mit deren Hilfe die zweiten und höheren Differentiale immer entfernt werden können.

§264 Wenn der Ausdruck die eine einzige Variable x enthält und ihre höheren Differentiale ddx, d^3x, d^4x etc. in ihm auftauchen, kann er keine feste Bedeutung haben, wenn nicht ein gewisses erstes Differential konstant gesetzt worden ist. Es sei also t jene variable Größe, deren Differential dt konstant festgelegt worden ist, so dass $ddt = 0$, $d^3t = 0$, $d^4t = 0$ etc. ist. Es werde $dx = pdt$ gesetzt und p wird eine unendliche Größe sein, deren Differential eine von der unbestimmten Bedeutung der zweiten Differentiale nicht beeinflusst wird, und daher wird auch $\frac{dp}{dt}$ eine endliche Größe sein. Es sei $dp = qdt$ und auf die gleiche Weise weiter $dq = rdt$, $dr = sdt$ etc; es werden q, r, s etc. endliche feste Bedeutungen habenden Größen sein

$$ddx = dpdt = qdt^2,\ d^3x = dqdt^2 = rdt^3,\ dx^4 = drdt^3 = sdt^4 \text{ etc;}$$

wenn diese Werte anstelle von ddx, d^3x, d^4x etc. eingesetzt werden, wird dieser Ausdruck lediglich endliche Größen zusammen mit dem ersten Differential dt enthalten und daher nicht weiter ein vage Bedeutung haben.

§265 Wenn x eine Funktion von t ist, wird auf diese Weise die Größe x völlig eliminiert werden können, so dass allein die Größe t zusammen mit einem Differential dt im Ausdruck zurückbleibt; wenn aber t eine Funktion von x ist, wird umgekehrt auch x eine Funktion von r sein. Dennoch kann indes die Größe x selbst mit ihrem ersten Differential dx in der Rechnung beibehalten werden, solange nach den zuvor durchgeführten Substitutionen überall anstelle von t und dt wieder deren durch x und dx ausgedrückte Werte eingesetzt werden. Damit dies klarer wird, wollen wir festlegen, dass $t = x^n$ ist, so dass das erste Differential von x^n konstant gesetzt worden ist. Weil also $dt = nx^{n-1}dx$ ist, wird sein

$$p = \frac{1}{x^{n-1}} \text{ und } dp = \frac{-(n-1)\,dx}{nx^n} = qdt = nqx^{n-1}dx;$$

daher wird

$$q = \frac{-(n-1)}{nnx^{2n-1}} \text{ und } dq = \frac{(n-1)\,(2n-1)\,dx}{nnx^{2n}} = rdt = nrx^{n-1}dx.$$

Daher wird weiter

$$r = \frac{(n-1)\,(2n-1)}{n^3x^{3n-1}} \text{ und } s = -\frac{(n-1)\,(2n-1)\,(3n-1)}{n^4x^{4n-1}}.$$

Daher, wenn das Differential von x^n konstant festgelegt wird, wird sein

$$\begin{aligned} ddx &= -\frac{(n-1)\,dx^2}{x} \\ d^3x &= -\frac{(n-1)\,(2n-1)\,dx^3}{xx} \\ d^4x &= -\frac{(n-1)\,(2n-1)\,(3n-1)\,dx^4}{x^3} \\ &\text{etc} \end{aligned}$$

§266 Wenn der Ausdruck die zwei Variablen x und y enthält und das eine Differential einer einzigen derer, z.B. x, als konstant festgelegt worden ist, werden wegen $ddx = 0$ keine anderen zweiten und höheren Differentiale enthalten sein außer ddy, d^3y etc. Diese werden aber auf dieselbe Weise, die wir zuvor gebraucht haben, beseitigt werden können, indem festgelegt wird

$$dy = pdx,\ dp = qdx,\ dq = rdx,\ dr = sdx \text{ etc;}$$

es wird nämlich werden

$$ddy = qdx^2,\ d^3y = rdx^3,\ d^4y = sdx^4 \text{ etc;}$$

nach Einsetzen von diesen wird ein Ausdruck entspringen, der außer den endlichen Größen x, y, p, q, r, s etc. nur das erste Differential dx enthalten wird. So, wenn dieser Ausdruck vorgelegt war

$$\frac{ydx^4 + xdyd^3y + x^4dy}{(xx+yy)\,ddy},$$

in welchem dx konstant angenommen ist, werde festgelegt

$$dy = qdx,\ dp = qdx,\ dq = rdx \text{ und } dr?sdx;$$

nach Einsetzen dieser Werte wird der vorgelegte Ausdruck in diesen verwandelt werden

$$\frac{(y + xpr + xs)\,dx^2}{(xx + yy)\,q},$$

welcher nicht weiter zweite oder höhere Differentiale enthält.

§267 Auf die gleiche Weise werden die zweiten und höheren Differentiale beseitigt werden, wenn dy konstant angenommen worden war. Aber wenn irgendein anderes erstes Differential dt konstant festgelegt wird, dann werden auf die zuvor angegebene Weise zuerst die höheren Differentiale von x aus der Rechnung beseitigt, indem festgelegt wird

$$dx = pdt,\ dp = qdt,\ dq = rdt,\ dr = sdt \text{ etc},$$

woher wird

$$ddx = qdt^2,\ dx^3 = rdt^3,\ d^4x = sdt^4 \text{ etc},$$

darauf auf die gleiche Weise die höheren Differentiale von y, indem festgelegt wird

$$dy = Pdt,\ dP = qdt,\ dQ = Rdt,\ dR = Sdt \text{ etc},$$

woher werden wird

$$ddy = Qdt^2,\ d^3y = Rdt^3,\ d^4y = Sdt^4 \text{ etc};$$

nach Einsetzen von diesen wird ein Ausdruck erhalten werden, der außer den endlichen Größen x, p, a, r, s etc„ y,P,Q,R,S etc. allein das Differential dt umfassen wird und deshalb keine allzu allgemein Bedeutung haben wird.

§268 Wenn das erste Differential, welches konstant festgelegt wird, entweder von x oder von y oder von jedem der beiden zugleich abhängt, dann ist es nicht nötig, dass diese zwei Reihen von endlichen Größen p, q, r etc. eingeführt wird. Wenn nämlich dt nur von x abhängt, dann werden die Buchstaben p, q, r etc. Funktionen von x werden und allein die Buchstaben p,Q,R etc. eingehen; und dasselbe geschieht, wenn das konstante Differential dt nur von y abhängt. Aber wenn dt von jeder der beiden abhängt, muss die Operation ein wenig variiert werden. Wir wollen eines Beispiels wegen festlegen, dass dieses Differential ydx konstant angenommen worden ist, und es wird $yddx + dxdy = 0$ sein, woher wird

$$ddx = -\frac{dxdy}{y}$$

Es sein nun

$$dy = pdx,\, dp = qdx,\, dq = rdx \text{ etc}$$

und es wird sein

$$ddx = -\frac{pdx^2}{y}$$

und durch weiteres Differenzieren

$$dx^3 = -\frac{qdx^3}{y} + \frac{ppdx^3}{yy} - \frac{2pdxddx}{y};$$

es werde hier anstelle von ddx sein Wert $-\frac{pdx^2}{y}$ eingesetzt; es wird werden

$$d^3x = -\frac{qdx^3}{y} + \frac{3ppdx^3}{yy}$$

und weiter

$$dx^4 = -\frac{rdx^4}{y} + \frac{qpdx^4}{yy} + \frac{6pqdx^4}{yy} - \frac{6p^3dx^4}{y^3} + \left(\frac{3pp}{yy} + \frac{q}{y}\right) 3dx^2ddx$$

und nach Einsetzen des Wertes $-\frac{pdx^2}{y}$ für ddx wird ans Licht treten

$$d^4x = \left(-\frac{r}{y} + \frac{10pq}{yy} - \frac{15p^3}{y^3}\right) dx^4$$

etc. Darauf, weil $dy = pdx$ ist, wird sein

$$ddy = qdx^2 + pddx = \left(q - \frac{pp}{y}\right) dx^2$$

und, indem ununterbrochen für ddx der Wert $-\frac{pdx^2}{y}$ eingesetzt wird, wird werden

$$d^3y = \left(r - \frac{4pq}{y} + \frac{3p^3}{yy}\right) dx^3$$

und

$$d^4y = \left(s - \frac{7px}{y} - \frac{4qq}{y} + \frac{25ppq}{yy} - \frac{15p^4}{y^3}\right) dx^4$$

etc. Diese Werte anstelle der höheren Differentiale von x und y eingesetzt werden den vorgelegten Ausdrucken eine Form solcher Art abändern, der nicht weiter höhere Differentiale enthalten wird und sich daher der Betrachtung eines gewissen Differentials als konstant entledigen wird. Denn weil nach dieser Transformation keine zweiten Differentiale enthalten sind, ist es nicht einmal von Nöten, dass erwähnt wird, was für ein Differential als konstant angenommen worden ist.

§269 Sehr oft pflegt es aber in einer auf gekrümmten Linien angewandten Rechnung zu passieren, dass dieses erste Differential $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ als konstant angenommen wird; daher wollen wir zeigen, wie in diesem Fall die zweiten und höheren Differentiale eliminiert werden müssen. So wird nämlich zugleich der Weg klar werden, wie diese Aufgabe zu bewältigen, wenn irgendein anderes Differential als konstant anzunehmen ist. Es werde wiederum festgelegt

$$dy = pdx, \; dp = qdx, \; dq = rdx, \; dr = xdx \text{ etc}$$

und das Differential $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ wird diese Form $dx\sqrt{1 + pp}$ annehmen; weil dieses konstant wird, wird werden

$$ddx\sqrt{1 + pp} + \frac{pqdx^2}{\sqrt{1 + pp}} = 0$$

und daher

$$ddx = -\frac{pqdx^2}{1 + pp},$$

woher man schon den Wert von dx haben wird; daher wird weiter sein

$$d^3x = -\frac{prdx^3}{1 + pp} - \frac{qqdx^3}{1 + pp} + \frac{2ppqqdx^3}{(1 + pp)^2} - \frac{2ppdxddx}{1 + pp}$$

$$= -\frac{prdx^3}{1 + pp} - \frac{qqdx^3}{1 + pp} + \frac{4ppqqdx^3}{(1 + pp)^2} = -\frac{prdx^3}{1 + pp} + \frac{(3pp - 1)\, qqdx^3}{(1 + pp)^2}.$$

Des Weiteren wird werden

$$d^4x = -\frac{psdx^4}{1 + pp} + \frac{(10pp - 3)\, qrdx^4}{(1 + pp)^2} - \frac{(15pp - 13)\, pq^3dx^4}{(1 + pp)^3}$$

Wenn wir aber $dy = pdx$ angenommen haben, wird durch Differenzieren werden

$$ddy = qdx^2 + pddx = qdx^2 - \frac{ppqdx^2}{1+pp} = \frac{qdx^2}{1+pp},$$

$$d^3y = \frac{rdx^3}{1+pp} - \frac{2pqqdx^3}{(1+pp)^2} + \frac{2qdxddx}{1+pp}$$

und daher

$$d^3y = \frac{rdx^3}{1+pp} - \frac{4pqqdx^3}{(1+pp)^2}$$

und weiter durch Differenzieren

$$d^4y = \frac{sdx^4}{1+pp} - \frac{13pqrdx^4}{(1+pp)^2} + \frac{4\,(6pp-1)\,q^3dx^4}{(1+pp)^3}$$

Also werden alle höheren Differentiale jeder der beiden Variablen x und y durch endliche Größen und Potenzen von dx ausgedrückt werden und nach diesen Substitutionen wird ein von zweiten Differentialen völlig freier Ausdruck hervorgehen.

§270 Nachdem also die Art und Weise dargestellt worden ist, sich der zweiten und höheren Differentiale zu entledigen, wird es passen sein, dass diese neu erworbene Fertigkeit an einigen Beispielen illustriert wird.

I. Es sei dieser Ausdruck $\frac{xddy}{dx^2}$ vorgelegt, in welchem dx konstant gesetzt worden ist. Nachdem also $dy = pdx$ und $dp = qdx$ gesetzt wurde, geht wegen $ddy = qdx^2$ der vorgelegte Ausdruck in diesen endlichen xq über.

II. Es sei dieser Ausdruck $\frac{dx^2+dy^2}{ddx}$ vorgelegt, in welchem dy konstant festgelegt worden sei. Es werde $dx = pdy$, $dp = qdy$ gesetzt; wegen $ddx = qdy^2$ wird $\frac{1+pp}{q}$ entspringen. Wenn wir aber wie zuvor $dy = pdx$, $dp = qdx$ setzen wollen, wird wegen des Konstanten dy $0 = pdddx + dpdx$ und $ddx = -\frac{qdx^2}{p}$ sein; daher wird der vorgelegte Ausdruck in diesen $-\frac{p(1+pp)}{q}$ übergehen.

III. Es sei dieser Ausdruck $\frac{yddx-xddy}{dxdy}$ vorgelegt, in welchem ydx konstant gesetzt worden sei. Es werde $dy = pdx$ und $dp = qdx$ gesetzt und es wird aus §268 $ddx = -\frac{pdx^2}{y}$, $ddy = qdx^2 - \frac{ppsx^2}{y}$ sein, nach Einsetzen von welchem der vorgelegte Ausdruck in diesen $-1 - \frac{xq}{p} + \frac{xp}{y}$ verwandelt wird.

IV. Es sei dieser Ausdruck $\frac{dx^2+dy^2}{ddy}$ vorgelegt, in welchem $\sqrt{dx^2+dy^2}$ konstant gesetzt worden sei. Es werde wiederum $dy = pdx$ und $dp = qdx$ festgelegt und es wird aus dem vorhergehenden Paragraphen $ddy = \frac{qdx^2}{1+pp}$ sein; daher wird der vorgelegte Ausdruck in $\frac{(1+pp)^2}{q}$ übergehen.
Aus diesen Beispielen wird aber zu Genüge eingesehen, wie in einem jeden sich ergebenden Fall, welches erste Differential auch immer als konstant angenommen worden ist, die zweiten und höheren Differentiale eliminiert werden müssen.

§271 Weil also auf diese Weise durch Einführen der endlichen Größen p, q, r, s etc die zweiten und höheren Differentiale so eliminiert werden können, dass der ganze Ausdruck außer den endlichen Größen x, y, p, q, r, s etc allein das Differential dx umfasst, wird, wenn umgekehrt ein reduzierter dieser Art vorgelegt wird, er wiederum in die erste Form verwandelt werden können, indem anstelle der Buchstaben p, q, r, s etc. die zweiten und höheren Differentiale eingeführt werden. Nun wird es aber egal sein, welches bestimmte erste Differential als konstant angenommen wird, und es kann entweder das selbst, was zuvor angenommen worden ist, als konstant festgelegt werden oder irgendein anderes. Ja es wird sogar überhaupt kein Differential als konstant angenommen werden können und auf diese Weise werden zweite und höhere Differentiale enthaltende Ausdrücke hervorgehen, die, auch wenn kein Differential als konstant angenommen worden ist, dennoch feste Bedeutungen haben, Ausdrücke von welcher Art wir oben gegeben zu sein gezeigt haben.

§272 Es seien irgendeie die endlichen Buchstaben x, y, p, q, r etc. zusammen mit dem Differential dx enthaltender Ausdruck vorgelegt, in welchem sei

$$p = \frac{dy}{dx},\; q = \frac{dp}{dx},\; r = \frac{dq}{dx} \text{ etc.}$$

Wenn wir diese Buchstaben p, q, r etc. so eliminieren wollen, dass wir an deren Stelle die zweiten und höheren Differentiale von x und y für kein als konstant angenommenes Differential einführen, wird werden

$$dp = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2} \text{ und daher } q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3},$$

welche Formel differenziert geben wird

$$dq = \frac{dx^2 d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dxdyd^3x}{dx^4},$$

woher wird

$$r = \frac{dx^2 d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dydyd^3x}{dx^5}.$$

Wenn daher darüber hinaus der Buchstabe s, der den Wert $\frac{dr}{dx}$ bezeichnet, enthalten ist, wird für ihn dieser Wert eingesetzt werden müssen

$$s = \frac{dx^3d^4y - 6dx^2ddxd^3y - 4dx^2ddyd^3x + 15dxddx^2ddy + 10dxdyddxd^3x - 15dyddx^3 - dx^2dyd^4x}{dx^7}.$$

Nachdem also diese Werte anstelle der Größen p, q, r, s etc. eingesetzt worden sind, wird der vorgelegte Ausdruck in einen anderen die höheren Differentiale von x und y enthaltenden verwandelt werden, der, auch wenn kein erstes Differential als konstant angenommen worden ist, dennoch keine unbestimmte, sondern eine feste Bedeutung haben wird.

§273 Auf diese Weise wird also eine jede Differentialform höheren Grades, in welcher ein gewisses erstes Differential als konstant angenommen worden ist, in eine andere Form verwandelt werden können, in welcher kein Differential konstant festgelegt wird, die, weil diesem nicht im Wege steht, denselben festen Wert hat. Zuerst werden natürlich mit Hilfe der zuvor angegebenen Methode nach Annahmen der Werte $dy = pdx$, $dp = qdx$, $y = rdx$, $dr = sdx$ etc. die höheren Differentiale eliminiert, dann werden anstelle von p, q, r, s etc. die nun gefundenen Werte eingesetzt und es wird ein dem ersten gleicher kein konstantes Differential involvierender Ausdruck entspringen; diese Transformationen werden die folgenden Beispiele illustrieren.

I. Es sei dieser Ausdruck $\frac{xddy}{dx^2}$ vorgelegt, in welchem dx konstant gesetzt sei, welcher in eine andere kein konstantes Differential involvierende verwandelt werden müssen soll. Es werde $dy = pdx$, $dp = qdx$ gesetzt und, wie wir zuvor (§270) gesehen haben, wird der vorgelegte Ausdruck in diesen qx übergehen. Nun werde anstelle von q der Wert eingesetzt, den es für kein als konstant angenommenes Differential erhält, $q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$ und es wird dieser Ausdruck

$$\frac{xdxddy - xdyddx}{dx^3}$$

dem vorgelegten gleich und nicht weiter ein konstantes Differential involvierend aufgefunden werden.

II. Es sei dieser Ausdruck $\frac{dx^2+dy^2}{ddx}$ vorgelegt, in welchem dy konstant angenommen worden ist. Es werde $dy = pdx$ und $dp = qdx$ konstant festgelegt und er wird in diesen $-\frac{p(1+pp)}{q}$ übergehen [§270]; es werde nun $p = \frac{dy}{dx}$ und $q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$ festgelegt und es wird gefunden werden

$$\frac{dy\left(dx^2+dy^2\right)}{dyddx - dxddy},$$

der für kein als konstant angenommenes Differential denselben festen Wert wie der vorgelegte hat.

III. Es sei dieser Ausdruck $\frac{yddx - xddy}{dxdy}$ vorgelegt und welchem das Differential ydx konstant angenommen worden ist. Es werde $dy = pdx$, $dp = qdx$ gesetzt und, wie wir oben (§270) gesehen haben, wird dieser Ausdruck in diesen $-1 - \frac{xq}{p} + \frac{xp}{y}$ verwandelt, der für kein konstant angenommenes Differential in diesen verwandelt werden wird

$$-1 - \frac{xdxddy - xdy}{dx^2dy} + \frac{xdy}{ydx}$$

$$= \frac{xdxdy^2 - ydx^2dy - yxdxddy + yxdyddx}{ydx^2dy}$$

IV. Es sei dieser Ausdruck $\frac{dx^2+dy^2}{ddy}$ vorgelegt, in welchem das Differential $\sqrt{dx^2+dy^2}$ als konstant angenommen ist. Für $dy = pdx$ und $dp = qdx$ gesetzt wird dieser Ausdruck $\frac{(1+pp)^2}{q}$ (an erwähnter Stelle) entspringen. Es werde nun $p = \frac{dy}{dx}$ und $q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$ gesetzt und für kein als konstant festgelegtes Differential werden wir diesen Ausdruck erlangen

$$\frac{\left(dx^2+dy^2\right)^2}{dx^2ddy - dxdyddx},$$

der dem vorgelegten gleichwertig ist.

V. Es sei dieser Ausdruck $\frac{dxd^3y}{ddy}$ vorgelegt, in welchem das Differential dx als konstant angenommen worden sei. Es werde $dy = pdx$, $dp = qdx$ und $dq = rdx$ gesetzt und wegen $ddy = qdx^2$ und $d^3y = rdx^3$ wird die vorgelegte Formel in diese $\frac{rdx^2}{q}$ übergehen. Nun werden anstelle von q und r die Werte eingesetzt, welche sie für kein als konstant angenommenes Differential erhalten, natürlich

$$q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3} \text{ und } r = \frac{dx^2d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dxdyd^3x}{dx^5}$$

und es wird der folgenden dem vorgelegten gleichwertige Ausdruck erhalten werden

$$\frac{dx^2d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^3 - dxdyd^3x}{dxddy - dyddx}$$
$$= \frac{dx\left(dxd^3y - dyd^3x\right)}{dxddy - dyddx} - 3ddx.$$

§274 Wenn wir diese Transformationen sorgfältiger anschauen, werden wir leicht eine bequemere Methode, sie durchzuführen, erschließen können, sodass es nicht von Nöten ist, die Buchstaben p, q, r etc. einzuführen. Es werden aber verschiedene Arten auftauchen, diese Aufgabe zu bewältigen, je nachdem ob das eine oder das andere Differential in der vorgelegten Formel das Differential dx als konstant angenommen worden ist, und weil wir anstelle von dy pdx und wieder $\frac{dy}{dx}$ anstelle von p gesetzt haben, werden die ersten Differentiale dx und dy, wo auch immer sie im Ausdruck auftauchen ohne Veränderung zurückgelassen. Wo aber ddy auftaucht, weil an seiner Stelle qdx^2 und weiter anstelle von q der Wert $\frac{dxddy-dyddx}{dx^3}$ geschrieben wird, wird die Transformation durchgeführt werden, wenn überall anstelle von ddy sofort $\dfrac{dxddy - dyddx}{dx}$ gesetzt wird oder gleichwertig

$$ddy - \frac{dyddx}{dx}.$$

Wenn darüber hinaus im vorgelegten Ausdruck d^3y auftaucht, weil an seiner Stelle rdx^3 gesetzt wird, wird wegen des zuvor gefundenen Wertes von r überall anstelle von d^3y geschrieben werden müssen

$$d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx},$$

wonach der vorgelegte Ausdruck in einen anderen verwandelt werden wird, der kein konstantes Differential involviert. So, wenn dieser Ausdruck $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy}$ vorgelegt wird, in welchem dx konstant gesetzt wird, wird ihm für $ddy - \frac{dyddx}{dx}$ anstelle von ddy dieser kein konstantes Differential involvierender gleich sein

$$\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy-dyddx}.$$

§275 Daher wird leicht erschlossen, wenn in einem gewissen vorgelegten Ausdruck das Differential dy als konstant angenommen worden ist, dass dann überall anstelle von $ddx - \frac{dxddy}{dy}$ und anstelle von d^3x dies $d^3x - \frac{3ddxddy}{dy} + \frac{3dxddy^2}{dy^2} - \frac{dxd^3y}{dy}$ geschrieben werden muss, damit ein gleichwertiger Ausdruck erhalten wird, in welchem kein Differential als konstant festgelegt wird. Wenn aber im vorgelegten Ausdruck ydx als konstant angenommen worden ist, weil ja [§268] wird

$$ddx = -\frac{pdx^2}{y} \text{ und } ddy = qdx^2 - \frac{ppdx^2}{y},$$

wird überall anstelle von $ddx - \frac{dyddy}{dx} - \frac{dy^2}{y}$ geschrieben werden müssen; zu höheren Differentialen, weil sie bei dieser Aufgabe sehr selten aufzutauchen pflegen, schreite ich nicht fort. Wenn daher aber in dem vorgelegten Ausdruck dieses Differential $\sqrt{dx^2+dy^2}$ als konstant angenommen worden war, weil wir [§269] gefunden haben

$$ddx = -\frac{pqdx^2}{1+pp} \text{ und } ddy = \frac{qdx^2}{1+pp},$$

weil für ddx überall $\frac{dy^2ddx-dxdyddy}{dx^2+dy^2}$ geschrieben werden muss. Wenn dieser Ausdruck $\frac{dy\sqrt{dx^2+dy^2}}{dxx}$ vorgelegt war, in welchem $\sqrt{dx^2+dy^2}$ als konstant angenommen sei, wird er in diesen verwandelt werden

$$\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx-dxddy},$$

in welchem kein Differential als konstant angenommen wird.

§276 Damit diese Reduktionen leichter mit Nutzen verwendet werden können, ist es ratsam, sie in der folgenden Tabelle zu erfassen.
Es wird also eine Differentialformel höheren Grades mit Hilfe der folgenden Substitution in eine andere kein konstantes Differential involvierende verwandelt werden.

I. Wenn das Differential dx konstant angenommen war,

werde anstelle von	geschrieben
ddy	$ddy - \frac{dyddx}{dx}$
d^3y	$d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx}.$

II. Wenn das Differential dy konstant angenommen war,

werde anstelle von	geschrieben
ddx	$ddx - \frac{dxddy}{dy}$
d^3x	$d^3x - \frac{3ddxddy}{dy} + \frac{3dxddy^2}{dy^2} - \frac{dxd^3y}{dy}.$

III. Wenn das Differential ydx konstant angenommen war,

werde anstelle von	geschrieben
ddx	$-\frac{dxdy}{y}$
ddy	$ddy - \frac{ddyddx}{dx} - \frac{dy^2}{y}$
d^3x	$\frac{dyddx}{y} - \frac{dxddy}{y} + \frac{3dxdy^2}{yy}$
d^3y	$d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx^2} - \frac{4dyddy}{y} + \frac{4dy^2ddx}{ydx}$

IV. Wenn das Differential $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ angenommen war,

werde anstelle von	geschrieben
ddx	$\dfrac{dy^2ddx - dxdyddy}{dx^2 + dy^2}$
ddy	$\dfrac{dx^2ddy - dexdyddx}{dx^2 + dy^2}$
d^3x	$\dfrac{dy^2d^3y - dxdyd^3x}{dx^2 + dy^2} + \dfrac{(dxddy - dyddx)\left(3dy^2ddy - dx^2ddy + 4dxdyddx\right)}{(dx^2 + dy^2)^2}$
d^3y	$\dfrac{dx^2d^3y - dxdyd^3x}{dx^2 + dy^2} + \dfrac{(dyddx - dxddy)\left(3dx^2ddx - dy^2ddx + 4dxdyddy\right)}{(dx^2 + dy^2)^2}$

§277 Diese Ausdrücke, die kein konstantes Differential einschließen, werden so beschaffen sein, dass nach Beheben ein jedes Differential als konstant angenommen werden kann. Und daher können die Differentialausdrücke höheren Grades, in welchen kein Differential konstant gesetzt wird, untersucht werden, ob deren Bedeutung unbestimmt oder fest ist. Es werde nämlich nach Belieben, beispielsweise dx, konstant festgelegt, dann werde durch die erste Regel des vorhergehenden Paragraphen der Ausdruck wiederum auf eine Form reduziert, in welcher kein Differential konstant angenommen ist; wenn dieses mit dem vorgelegten übereinstimmt, wird er beständig sein und von keiner Unbeständigkeit der zweiten Differentiale abhängen; wenn aber dieser Ausdruck verschieden hervorgeht, dann wird er eine unbestimmte Bedeutung haben. So, wenn dieser Ausdruck $yddx - xddy$ vorgelegt wird, in welchem kein Differential konstant gesetzt worden sei, um ausfindig zu machen, ob er eine feste oder unbestimmte Bedeutung hat, werde dx konstant festgelegt und er wird in $-xddy$ übergehen; nun werde durch die erste Regel des vorhergehenden Paragraphen anstelle von ddy $ddy - \frac{dyddx}{dx}$ gesetzt und es wird $-xddy + \frac{xdyddx}{dx}$ hervorgehen, dessen Nichtübereinstimmung mit dem vorgelegten anzeigt, dass der vorgelegte Ausdruck keine feste Bedeutung hat.

§278 Auf diese gleiche Weise, wenn ein allgemeiner Ausdruck von dieser Art vorgelegt wird

$$Pddx + Qdxdy + Rddy,$$

wird eine Bedingung bestimmt werden können, unter welcher er für kein als konstant angenommenes Differential einen festen Wert hat. Es werde nämlich dx konstant festgelegt und der vorgelegte Ausdruck wird in dieser $Qdxdy +$

$Rddy$ übergehen; nun werde dieser wiederum in eine andere Form verwandelt, dass seine Bedeutung dieselbe bleibt, auch wenn kein Differential konstant gesetzt wird, und es wird $Qdxdy + Rddy - \frac{Rdyddx}{dx}$ hervorgehen, welche Form mit der vorgelegten übereinstimmen wird, wenn $Pdx + Rdy = 0$ war; und allein in diesem Fall wird sein Wert fest sein. Aber wenn nicht $P = -\frac{Rdy}{dx}$ oder $R = -\frac{Pdx}{dy}$ war, dann wird der vorgelegte Ausdruck $Pddx + Qdxdy + Rddy$ keinen festen Wert haben, sondern seine Bedeutung wird unbestimmt und verschieden sein, je nachdem ob das eine oder das andere Differential als konstant angenommen wird.

§279 Aus diesen Prinzipien wird es leicht sein, einen Differentialausdruck, in welchem ein gewisses Differential konstant gesetzt worden ist, in eine andere Form zu verwandeln, in welcher ein anderes Differential konstant angenommen wird. Es werde nämlich zuerst auf eine Form solcher Art zurückgeführt, die kein konstantes Differential involviert, wonach jenes andere Differential konstant gesetzt werde. So, wenn im vorgelegten Ausdruck Differential dx konstant angenommen worden ist und er in einen anderen zu verwandeln ist, der das konstante Differential dy verwickeln soll, werde in den oben anstelle von ddy und d^3y einzusetzenden Formeln wegen des konstanten dy $ddy = 0$, $d^3y = 0$ gesetzt und dem Gefragten wird Genüge geleistet werden, wenn anstelle von ddy $-\frac{dyddx}{dx}$ und $\frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx}$ anstelle von d^3y eingesetzt wird. Auf diese Weise wird diese Formel $-\frac{\left(dx^2+dy^2\right)^{\frac{3}{2}}}{dxddy}$, in welcher dx konstant gesetzt worden ist, in diese $-\frac{\left(dx^2+dy^2\right)^{\frac{3}{2}}}{dyddx}$ verwandelt werden, in welcher dy konstant gesetzt wird.

§280 Wenn auf der anderen Seite die Formel, in welcher dy konstant festgelegt ist, in eine andere Verwandelt werden muss, in welcher dx konstant sein soll, dann muss anstelle von ddx $-\frac{dxddy}{dy}$ und anstelle von d^3x dieser Ausdruck $\frac{3dxddy^2}{dy^2} - \frac{dxd^3y}{dy}$ eingesetzt werden. Auf die gleiche Weise, wenn eine Formel, in welcher $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ konstant gesetzt worden ist, in eine andere verwandelt werden muss, in welcher dx konstant sein soll, dann werde anstelle von ddx $-\frac{dxdyddy}{dx^2+dy^2}$ und $\frac{dx^2ddy}{dx^2+dy^2}$ anstelle von ddy geschrieben. Aber wenn die Formel, in welcher dx konstant angenommen worden ist, in eine andere verwandelt werden muss, in welcher $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ konstant sein soll, weil wegen des konstanten $dx^2 + dy^2$ wird

$$dxddy + dyddy = 0 \text{ und } ddx = -\frac{dyddy}{dx},$$

wird nach Annehmen dieses Wertes anstelle von ddx für ddy geschrieben werden müssen

$$ddy + \frac{dy^2 ddy}{dx^2} = \frac{\left(dx^2 + dy^2\right) ddy}{dx^2}.$$

So wird diese Formel $-\frac{\left(dx^2+dy^2\right)^{\frac{3}{2}}}{dxddy}$, in welcher dx konstant ist, in eine andere verwandelt werden, in welcher $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ konstant festgelegt wird, die $-\frac{dx\sqrt{dx^2+dy^2}}{ddy}$ sein wird