Beobachtungen über die Kettenbrüche *

Leonhard Euler

§1 Nachdem ich im vorherigen Jahr begonnen hatte, die Kettenbrüche einer Untersuchung zu unterwerfen und diesen fast neuen Teil der Analysis zu entwickeln, haben sich mir inzwischen einige Beobachtungen aufgetan, die vielleicht für die Weiterentwicklung dieser Theorie nicht unnütz sein werden. Deswegen, weil die Erforschung dieser Lehre nicht wenig an neuen Hilfsmitteln für die Analysis zmit sich zu bringen scheint, möchte ich diesen Gegenstand erneut angehen und die sich hierauf beziehenden Dinge, die aufgetaucht sind, sorgfältig darstellen. Es sei also dieser Kettenbruch vorgelegt

$$A+\cfrac{B}{C+\cfrac{D}{E+\cfrac{F}{G+\cfrac{H}{I+\text{etc}}}}}$$

dessen wahrer Wert aufgefunden werden wird, indem die folgende Reihe bis ins Unendliche fortgeführt wird

$$A+\frac{B}{1P}-\frac{BD}{PQ}+\frac{BDF}{QR}-\frac{BDFH}{RS}+\text{ etc}$$

*Originaltitel: “De fractionibus continuis observationes“, erstmals publiziert in „*Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 11* 1750, pp. 32-81“, Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 14, pp. 291 - 349 “, Eneström-Nummer E123, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, Carins Steines, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz“

in welcher Reihe die Buchstaben P, Q, R, S, etc die folgenden Werte erhalten

$$P = C, Q = EP + D, R = GQ + FP, S = IR + HQ \text{ etc}$$

Diese Reihe ist aber stets konvergent, wie sehr auch immer die Buchstaben B, C, D, E, F etc wachsen oder schrumpfen, solange sie nur positiv sind; denn jeder beliebige Term ist kleiner als der vorhergehende, aber größer als der folgende, was das Bildungsgesetz, nach welchem die Werte P, Q, R, S etc zu berechnen sind, sofort zeigt.

§2 Wenn also umgekehrt diese unendliche Reihe vorgelegt war

$$\frac{B}{P} - \frac{BD}{PQ} + \frac{BDF}{QR} - \frac{BDFH}{RS} + \text{ etc}$$

wird ihre Summe angenehm mit einem Kettenbruch ausgedrückt werden können. Weil nämlich gilt

$$C = P, \quad E = \frac{Q - D}{P}, \quad G = \frac{R - FP}{Q}, \quad I = \frac{S - HQ}{R} \text{ etc}$$

man wird diesen jener Reihe gleichen Kettenbruch haben

$$\cfrac{B}{P + \cfrac{D}{\cfrac{Q-D}{D} + \cfrac{F}{\cfrac{R-FP}{Q} + \cfrac{H}{\cfrac{S-HQ}{R} + \cfrac{K}{\text{etc}}}}}}$$

oder

$$\cfrac{B}{P + \cfrac{DP}{Q - D + \cfrac{FPQ}{R - FP + \cfrac{HQR}{S - HQ + \cfrac{KRS}{\text{etc}}}}}}$$

Daher wird, wenn diese Reihe gegeben war

$$\frac{a}{p} - \frac{b}{q} + \frac{c}{r} - \frac{d}{s} + \frac{e}{t} - \text{ etc}$$

wegen

$$B = a,\quad D = b : a,\quad F = c : b,\quad H = d : c,\quad K = e : d \ \text{ etc}$$

und

$$P = p,\quad Q = q : p,\quad R = pr : q,\quad S = qs : pr,\quad T = prt : qs \quad \text{etc}$$

der Summe dieser Reihe

$$\frac{a}{p} - \frac{b}{q} + \frac{c}{r} - \frac{d}{s} + \frac{e}{t} - \ \text{etc}$$

der folgende Kettenbruch gleich sein

$$\cfrac{a}{p + \cfrac{b : a}{\frac{aq - bp}{app} + \cfrac{c : b}{\frac{p^2(br - cq)}{bqq} + \cfrac{d : c}{\frac{q^2(cs - dr)}{cp^2r^2} + \cfrac{e : d}{\frac{p^2r^2(dt - es)}{dq^2s^2} + \ \text{etc}}}}}}$$

$$= \cfrac{a}{p + \cfrac{bp^2}{aq - bp + \cfrac{acqq}{br - cq + \cfrac{bdrr}{cs - dr + \cfrac{cess}{dt - es + \ \text{etc}}}}}}$$

§3 Um dies an einigen Beispielen zu beleuchten, wollen wir diese Reihe nehmen

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ \text{etc}$$

deren Summe $= \ln(2)$ oder $= \int \frac{dx}{1+x}$ ist, wenn nach der Integration $x = 1$ gesetzt wird; es wird also gelten:

$$a = b = c = d = \text{etc} = 1,\quad p = 1,\quad q = 2,\quad r = 3,\quad s = 4 \ \text{ etc}$$

sowie

$$p=1, \quad aq-bp=1, \quad br-cq=1, \quad cs-dr=1 \quad \text{etc.}$$

Daher wird also

$$\int \frac{dx}{1+x} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{16}{1+\text{ etc}}}}}}$$

oder der Wert dieses Kettenbruches ist $= \ln(2)$.

§4 Wir wollen nun diese Reihe betrachten

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\text{ etc}$$

deren Summe die Fläche des Kreises ist, dessen Durchmesser gleich 1 ist, oder $= \int \frac{dx}{1+x^2}$ ist, wenn nach der Integration $x=1$ gesetzt wird. Es wird also gelten

$$a=b=c=d=\text{ etc}=1 \quad \text{und} \quad p=1, \quad q=3, \quad r=5, \quad s=7 \text{ etc},$$

woher wird

$$\int \frac{dx}{1+xx} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\text{ etc}}}}}}$$

welches der Brouncker'sche Kettenbruch ist, welchen selbiger für die Quadratur des Kreises dargeboten hat.

§5 Indem in gleicher Weise andere Reihen dieses Geschlechts angenommen werden, werden ebenso die folgenden Umwandlungen von Integralformeln in in Kettenbrüche hervorgehen, wenn natürlich nach der Integration $x=1$ gesetzt wird

$$\int \frac{dx}{1+x^3} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{4^2}{3+\cfrac{7^2}{3+\cfrac{10^2}{3+\text{ etc}}}}}} \qquad \int \frac{dx}{1+x^4} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{4+\cfrac{5^2}{4+\cfrac{9^2}{4+\cfrac{13^2}{4+\text{ etc}}}}}}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^5} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{5+\cfrac{6^2}{5+\cfrac{11^2}{5+\cfrac{16^2}{5+\text{ etc}}}}}} \qquad \int \frac{dx}{1+x^6} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{6+\cfrac{7^2}{6+\cfrac{13^2}{6+\cfrac{19^2}{6+\text{ etc}}}}}}$$

§6 Daher folgt also, dass allgemein gelten wird

$$\int \frac{dx}{1+x^m} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{m+\cfrac{(m+1)^2}{m+\cfrac{(2m+1)^2}{m+\cfrac{(3m+1)^2}{m+\text{ etc}}}}}}$$

wenn nach der Integration $x=1$ gesetzt wird. Und wenn m eine gebrochene Zahl war, wird man haben

$$\int \frac{dx}{1+x^{\frac{m}{n}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{n}{m+\cfrac{(m+n)^2}{m+\cfrac{(2m+n)^2}{m+\cfrac{(3m+n)^2}{m+\text{ etc}}}}}}$$

§7 Wir wollen nun die Formel $\int \frac{x^{n-1}dx}{1+x^m}$ betrachten, die integriert, wenn nach der Integration $x=1$ gesetzt wird, diese Reihe gibt

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{m+n}+\frac{1}{2m+n}-\frac{1}{3m+n}+\text{ etc.}$$

Daher wird werden

$$a=b=c=d=\text{ etc}=1 \quad \text{und} \quad p=n,\ q=m+n,\ r=2m+n,\ s=3m+n \text{ etc.}$$

Daher wird man haben

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{1+x^m}=\cfrac{1}{n+\cfrac{n^2}{m+\cfrac{(m+n)^2}{m+\cfrac{(2m+n)^2}{m+\text{ etc}}}}}$$

welcher Kettenbruch mit dem zuletzt gefundenen übereinstimmt.

§8 Es sei nun die Formel vorgelegt $\int \frac{x^{n-1}dx}{(1+x^m)^{\frac{\mu}{\nu}}}$, die integriert und wenn nach der Integration $x=1$ gesetzt wird, diese Reihe ergibt

$$\frac{1}{n}-\frac{\mu}{\nu(m+n)}+\frac{\mu(\mu+\nu)}{1\cdot 2\nu^2(2m+n)}-\frac{\mu(\mu+\nu)(\mu+2\nu)}{1\cdot 2\cdot 3\nu^3(3m+n)}+\text{ etc}$$

die mit der allgemeinen verglichen gibt

$$a=1,\ b=\mu,\ c=\mu(\mu+\nu),\ d=\mu(\mu+\nu)(\mu+2\nu) \text{ etc,}$$

$$p=n,\ q=\nu(m+n),\ r=2\nu^2(2m+n),\ s=6\nu^3(3m+n),\ t=24\nu^4(4m+n) \text{ etc}$$

sowie

$$\begin{aligned}
aq-bp &= \nu m+(\nu-\mu)n,\\
br-cq &= \mu\nu(3\nu-\mu)m+\mu\nu(\nu-\mu)n,\\
cs-dr &= 2\mu\nu^2(\mu+\nu)(m(5\nu-2\mu)+n(\nu-\mu)),\\
dt-es &= 6\mu\nu^3(\mu+\nu)(\mu+2\nu)(m(7\nu-3\mu)+n(\nu-\mu))\\
&\text{etc}
\end{aligned}$$

nach Einsetzen welcher man nach der Vereinfachung haben wird

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{(1+x^m)^{\frac{\mu}{\nu}}} =$$

$$\cfrac{1}{n+\cfrac{\mu n^2}{\nu m+(\nu-\mu)n+\cfrac{\nu(\mu+\nu)(m+n)^2}{(3\nu-\mu)m+(\nu-\mu)n+\cfrac{2\nu(\mu+2\nu)(2m+n)^2}{(5\nu-2\mu)m+(\nu-\mu)n+\cfrac{3\nu(\mu+3\nu)(3m+n)^2}{(7\nu-3\mu)m+(\nu-\mu)n+\text{ etc}}}}}}$$

Es sei $\mu = 1$ und $\nu = 2$; es wird sein

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{1+x^m}} = \cfrac{1}{n+\cfrac{n^2}{2m+n+\cfrac{6(m+n)^2}{5m+n+\cfrac{20(2m+n)^2}{8m+n+\cfrac{42(3m+n)^2}{11m+n+\cfrac{72(4m+n)^2}{14m+n+\text{ etc}}}}}}}$$

§9 Aber wenn $\nu = 1$ und μ eine ganze Zahl war, werden die folgenden Kettenbrüche hervorgehen

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{(1+x^m)^2} = \cfrac{1}{n+\cfrac{2n^2}{m-n+\cfrac{1\cdot 3(m+n)^2}{m-n+\cfrac{2\cdot 4(2m+n)^2}{m-n+\cfrac{3\cdot 5(3m+n)^2}{m-n+\cfrac{4\cdot 6(4m+n)^2}{m-n+\text{ etc}}}}}}}$$

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{(1+x^m)^3} = \cfrac{1}{n + \cfrac{3n^3}{m-2n + \cfrac{1\cdot 4(m+n)^2}{-2n + \cfrac{2\cdot 5(2m+n)^2}{-m-2n + \cfrac{3\cdot 6(3m+n)^2}{-2m-2n + \cfrac{4\cdot 7(4m+n)^2}{-3m-2n + \text{ etc}}}}}}}$$

welche Ausdrücke gleichermaßen wie die folgenden wegen der negativen Größen nicht konvergieren, sondern divergieren.

§10 All dies folgt aus der Umwandlung des allgemeinen in §1 gegebenen Kettenbruchs in eine unendliche Reihe

$$A + \frac{B}{1P} - \frac{BD}{PQ} + \frac{BDF}{QR} - \frac{BDFH}{RS} + \text{ etc.}$$

Diese selbe Reihe wird aber durch Addieren von je zwei Termen in diese transformiert

$$A + \frac{BE}{1Q} + \frac{BDFI}{QS} + \frac{BDFHKN}{SV} + \text{ etc.}$$

Es ist aber

$$C = P = \frac{Q-D}{E}, \quad G = \frac{S-HQ}{IQ} - \frac{F(Q-D)}{EQ}, \quad L = \frac{V-MS}{NS} - \frac{K(S-HQ)}{IS}, \quad \text{etc.}$$

Daher wird diese unendliche Reihe

$$A + \frac{BE}{Q} + \frac{BDFI}{QS} + \frac{BDFHKN}{SV} + \text{ etc}$$

in den folgenden Kettenbruch umgewandelt werden

$$A + \cfrac{B}{\frac{Q-D}{E} + \cfrac{D}{E + \cfrac{F}{\frac{E(S-HQ)-FI(Q-D)}{EIQ} + \cfrac{H}{I + \cfrac{K}{\frac{I(V-MS)-KN(S-HQ)}{INS} + \text{ etc}}}}}}$$

welcher von Brüchen befreit in diesen übergeht

$$A+\cfrac{BE}{Q-D+\cfrac{D}{1+\cfrac{FIQ}{E(S-HQ)-FI(Q-D)+\cfrac{EHQ}{1+\cfrac{KNS}{I(V-MS)-KN(S-HQ)+\cfrac{IMS}{1+\text{ etc}}}}}}}$$

§11 Wenn nun umgekehrt diese unendliche Reihe vorgelegt wird

$$\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\frac{d}{s}+\frac{e}{t}+\text{ etc}$$

und der Vergleich mit der vorhergehenden angestellt wird, wird gelten

$$Q=p,\quad S=\frac{q}{p},\quad V=\frac{pr}{q},\quad X=\frac{qs}{pr},\quad Z=\frac{prt}{qs}\quad \text{etc}$$

und ebenso

$$E=\frac{a}{B},\quad I=\frac{b}{BDF},\quad N=\frac{c}{BDFHK}\quad \text{etc}$$

mit welchen Werten die vorgelegte Reihe in diesen Kettenbruch umgewandelt werden wird

$$\cfrac{a}{p-D+\cfrac{D}{1+\cfrac{bp:1}{Da\left(\frac{q}{p}-Hp\right)-b(p-D)+\cfrac{DHap:1}{1+\cfrac{cq:p}{Hb\left(\frac{pr}{q}-\frac{Mq}{p}\right)-c\left(\frac{q}{p}-Hp\right)+\cfrac{HMbq:p}{1+\cfrac{dp:q}{Mc\left(\frac{qs}{pr}-\text{ etc}\right)}}}}}}}$$

in welchen Kettenbruch unzählige neue Größen eingehen, die in der vorgelegten Reihe nicht enthalten waren.

§12 Weil aber aus §2 diese Reihe

$$\frac{b}{p}-\frac{bd}{pq}+\frac{bdf}{qr}-\frac{bdfh}{rs}+\text{etc}$$

diesem Kettenbruch gleich ist

$$\cfrac{b}{p+\cfrac{dp}{q-d+\cfrac{fpd}{r-fp+\cfrac{hqr}{s-hq+\cfrac{krs}{\text{etc}}}}}}$$

wird, wenn diese Reihe auf die vorausgehende zurückgeführt wird, werden

$$b=BE,\quad d=\frac{-DFI}{E},\quad f=\frac{-HKN}{I},\quad \text{etc},$$

$$p=Q,\quad q=S,\quad r=V,\quad s=X,\quad \text{etc}.$$

Daher wird der im vorhergehenden Paragraphen gegebene Kettenbruch in diesen verwandelt werden

$$A+\cfrac{BE}{Q-\cfrac{DFI\cdot Q}{ES+DFI-\cfrac{EHKN\cdot QS}{IV+HKNQ-\cfrac{IMOR\cdot SV}{NX+MORS+\text{etc}}}}}$$

das Fortschreitungsgesetz welcher Bruch leicht erkannt wird.

§13 Aber jene Reihe

$$A+\frac{B}{P}-\frac{BD}{PQ}+\frac{BDF}{QR}-\text{etc}$$

welche wir zuerst aus dem allgemeinen Kettenbruch gefunden haben, wird leicht in diese Form transformiert

$$A+\frac{B}{2P}+\frac{BE}{2Q}-\frac{BDG}{2PR}+\frac{BDFI}{2QS}-\frac{BDFHL}{2RT}+\text{etc},$$

die, wenn die Buchstaben C,E,G,I etc mithilfe der gegebenen Gleichungen durch die übrigen ausgedrückt werden, in diese übergeht

$$A + \frac{B}{2P} + \frac{B(Q-D)}{2PQ} - \frac{BD(R-FP)}{2PQR} + \frac{BDF(S-HQ)}{2QRS} - \text{ etc,}$$

welcher deshalb dieser Kettenbruch gleich ist

$$A + \cfrac{B}{P + \cfrac{DP}{Q - D + \cfrac{FPQ}{R - FP + \cfrac{HQR}{S - HQ + \text{ etc}}}}}$$

§14 All diese Dinge folgen also unmittelbar aus der Betrachtung von Kettenbrüchen und viele Beobachtungen dieser Art habe ich schon in der vorausgehenden Abhandlung mitgeteilt. Nachdem also diese Dinge abgehandelt worden sind, schreite ich nun zu anderen und einigen Methoden voran, so zu Kettenbrüchen zu gelangen und möchte darlegen, die Werte von gegebenen Kettenbrüchen dieser Art anzugeben. Deshalb möchte ich zuerst, weil hier der Brouncker'sche Ausdruck für die Quadratur des Kreises nicht nur bewiesen worden ist, sondern auch gleichsam a priori gefunden worden ist, andere ähnliche entweder von Brouncker oder Wallis gefundene Ausdrücke einer Untersuchung unterwerfen; denn von Wallis selbst werden sie auch entsprechend aufgelistet, aber es wird nicht hinreichend klar aufgezeigt, ob Brouncker alle gefunden hat oder lediglich den, welcher für die Quadratur des Kreises dargeboten worden war. Danach werde ich aber auch jene übrigen Kettenbrüche, die von größerer Wichtigkeit zu sein scheinen, aus höchst verschiedenen Prinzipien beweisen und werde lehren um Vieles mehr dieses Geschlechts zu finden.

§15 Was sich aber bei Wallis findet, geht darauf zurück, dass das Produkt dieser zwei Kettenbrüche $= a^2$ ist:

$$a - 1 + \cfrac{1}{2(a-1) + \cfrac{9}{2(a-1) + \cfrac{25}{2(a-1) + \text{etc}}}}$$

und

$$a+1+\cfrac{1}{2(a+1)+\cfrac{9}{2(a+1)+\cfrac{25}{2(a+1)+\text{etc}}}}$$

Weil also in gleicher Weise gilt

$$(a+1)^2 = a+1+\cfrac{1}{2(a+1)+\cfrac{9}{2(a+1)+\text{etc}}} \times a+3+\cfrac{1}{2(a+3)+\cfrac{9}{2(a+3)+\text{etc}}}$$

wird, indem auf diese Weise bis ins Unendliche fortgeschritten wird, aufgefunden werden

$$a\cdot\frac{a(a+4)(a+4)(a+8)(a+8)(a+12)(a+12)}{(a+2)(a+2)(a+6)(a+6)(a+10)(a+10)(a+14)} \quad \text{etc} =$$

$$a-1+\cfrac{1}{2(a-1)+\cfrac{9}{2(a-1)+\cfrac{25}{2(a-1)+\text{etc}}}}$$

§16 Wenn nun dieses aus unendlich vielen Faktoren bestehende Produkt durch die in der vorhergehenden Abhandlung angegebene Methode untersucht wird, wird aufgefunden werden, dass gelten wird

$$\frac{a(a+4)(a+4)(a+8)\text{etc}}{(a+2)(a+2)(a+6)(a+6)\text{etc}} = \frac{\int x^{a+1}dx : \sqrt{1-x^4}}{\int x^{a-1}dx : \sqrt{1-x^4}}.$$

Deshalb wird der Wert dieses Kettenbruches

$$a-1+\cfrac{1}{2(a-1)+\cfrac{9}{2(a-1)+\cfrac{25}{2(a-1)+\ \text{etc}}}}$$

diesem Ausdruck gleich werden

$$\frac{a\int x^{a+1}dx : \sqrt{1-x^4}}{\int x^{a-1}dx : \sqrt{1-x^4}}$$

nachdem nach jeder der beiden Integrationen $x=1$ gesetzt wirde.

§17 Dieser Lehrsatz nach welchem der Wert dieses sich ziemlich weit erstreckenden Kettenbruches durch Integralformeln ausgedrückt wird, ist umso mehr bemerkenswert, umso weniger offenbar seine Gültigkeit ist. Denn obwohl jener Fall, in dem $a = 2$ ist, schon zuvor gefunden worden ist und sein Wert durch die Quadratur des Kreises dargeboten worden ist, folgen die übrigen Fälle dennoch nicht daraus. Wenn dieser Kettenbruch nämlich auf die eingangs vorgeschriebene Weise in eine Reihe umgewandelt wird, wird zu derart verwickelten Formeln gelangt, dass ihre Summe in keinster Weise erschlossen werden kann, außer im Fall $a = 2$. Deswegen habe ich schon vor längerer Zeit viel Mhe darauf verwendet, dass ich so die Gültigkeit dieses Lehrsatz zu zeigen und einen Weg zu entdecken, auf welchem sich a priori zu diesem Kettenbruch selbst gelangen lässt; diese Untersuchung erschien mir umso schwieriger, umso größeren Nutzen ich aus ihr zu entspringen glaubte. Solange ich aber den ganzen Eifer vergeblich auf diese Aufgabe verwendete, habe ich im höchsten Maße bedauert, dass die von Brouncker gebrauchte Methode niemals dargestellt worden ist und vielleicht ganz und gar verloren gegangen ist.

§18 So viel freilich aus der Wallis'schen Betrachtung feststeht, ist Brouncker durch Interpolation der folgenden Reihen zu dieser Form geführt worden

$$\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \text{ etc,}$$

deren Zwischenterme die Quadratur des Kreises zu geben Wallis bewiesen hatte. Und daher wird der Anfang dieser von Brouncker durchgeführten Interpolation angedeutet. Er wird nämlich gesagt, sich vorgelegt zu haben, die einzelnen Brüche $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}$ etc in zwei Faktoren aufzulösen, die alle im Verhältnis einer geometrischen Progression stehen. Wenn also gilt

$$AB = \frac{1}{2}, \quad CD = \frac{3}{4}, \quad EF = \frac{5}{6}, \quad GH = \frac{7}{8} \quad \text{etc}$$

und die Größen A,B,C,D,E etc eine geometrische Progression festlegen, geht jene Reihe in diese über

$$AB + ABCD + ABCDEF + \text{etc}$$

welche auf diese Form reduziert von selbst interpoliert wird; es wird nämlich der Term, dessen Index $\frac{1}{2}$ ist, $= A$ sein und der Term, der den Index $\frac{3}{2}$ hat, $= ABC$ und so weiter. Daher wird diese ganze Interpolation auf die Auflösung der einzelnen Brüche in zwei Faktoren zurückgeführt.

§19 Nach dem Kontinuitätsgesetz wird aber gelten

$$BC = \frac{2}{3}, \quad DE = \frac{4}{5}, \quad FG = \frac{6}{7} \quad \text{etc.}$$

Weil also gilt

$$A = \frac{1}{2B}, \quad B = \frac{2}{3C}, \quad C = \frac{3}{4D}, \quad D = \frac{4}{5E} \quad \text{etc}$$

wird sofort erhalten

$$A = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} \quad \text{etc.}$$

welches aber die zuerst von Wallis hervorgebrachte Formel selbst ist, mit welcher er die Quadratur des Kreises ausgedrückt hat, und die im höchsten Maße vom Brouncker'schen Ausdruck abweicht. Weil also diese Formel, indem die Interpolation auf diese Weise ausfindig gemacht wird, sich so leicht ergibt, ist es umso mehr zu bewundern, dass Brouncker, denselben Weg beschreitend, zu einem dermaßen verschiedenen Ausdruck gelangt ist; denn es scheint kein Weg übrig zu sein, der zu diesem Kettenbruch führt. Und es ist in der Tat nicht zu glauben, dass Brouncker bewusst den Wert von A durch einen Kettenbruch ausdrücken wollte, sondern eher einer eigenen Methode folgend, quasi zufällig auf sie gestoßen ist, weil zur damaligen Zeit Kettenbrüche vollkommen unbekannt waren und bei dieser Begebenheit wohl zuerst auftraten. Daraus lässt sich ziemlich gewiss schließen, dass eine offenbar zu Kettenbrüchen dieser Art führenden Methode gegeben ist, wie ungewöhnlich sie auch heute freilich erscheinen mag.

§20 Obwohl ich aber lange vergeblich mit dem Wiederfinden dieser Methode beschäftigt war, bin ich dennoch auf eine Methode gestoßen, Interpolationen für Reihen dieser Art mit Kettenbrüchen durchzuführen; diese gab mir von den Brouncker'schen höchst verschiedene Ausdrücke. Dennoch erwarte ich indes, dass es nicht ohne jeden Nutzen sein wird, diese Methode darzulegen, weil mit ihrer Hilfe Kettenbrüche gefunden werden, deren Werte schon anderswoher bekannt sind und durch Quadraturen dargeboten werden können. Denn weil ich des Weiteren eine Methode angeben werde, die Werte irgendwelcher Kettenbrüche mit Quadraturen auszudrücken, werden daraus außergewöhnliche Vergleiche von Integralformeln entspringen, vermindert in dem Fall, in dem der Variable nach der Integration ein bestimmter Wert zugeteilt wird; ich habe viele Vergleiche von solcher Art in der vorhergehenden Abhandlung über aus unendlich vielen Faktoren bestehenden Produkten dargeboten.

§21 Um also diese von mir gefundene Interpolationsweise darzulegen, sei diese sich sehr weit erstreckende Reihe vorgelegt

$$\frac{p}{p+2q}+\frac{p(p+2r)}{(p+2q)(p+2q+2r)}+\frac{p(p+2r)(p+4r)}{(p+2q)(p+2q+2r)(p+2q+4r)}+\text{ etc},$$

deren Term zum Index $\frac{1}{2}=A$ sei, der Term zum Index $\frac{3}{2}=ABC$, der Term zum Index $\frac{5}{2}=ABCDE$ etc. Daher wird also gelten

$$AB=\frac{p}{p+2q},\quad CD=\frac{p+2r}{p+2q+2r},\quad EF=\frac{p+4r}{p+2q+4r}\quad\text{etc}$$

und aus dem Kontinuitätsgesetz

$$BC=\frac{p+r}{p+2q+r},\quad DE=\frac{p+3r}{p+2q+3r},\quad FG=\frac{p+5r}{p+2q+5r}\quad\text{etc}$$

und so weiter.

§22 Um die Brüche zu beseitigen, setze man

$$A=\frac{a}{p+2q-r},\quad B=\frac{b}{p+2q},\quad C=\frac{c}{p+2q+r},\quad D=\frac{d}{p+2q+2r}\quad\text{etc}$$

und es wird gelten

$$ab=(p+2q-r)p, bc=(p+2q)(q+r), cd=(p+2q+r)(p+2r),$$
$$de=(p+2q+2r)(p+3r)\quad\text{etc.}$$

Nun sei

$$a=m-r+\frac{1}{\alpha},\quad b=m+\frac{1}{\beta},\quad c=m+r+\frac{1}{\gamma},$$
$$d=m+2r+\frac{1}{\delta},\quad e=m+3r+\frac{1}{\varepsilon}\quad\text{etc}$$

in welchen Substitutionen die ganzen Anteile eine arithmetische Progression festlegen, deren konstante Differenz r ist, was natürlich die Progression jener

Produkte verlangt. Nach Einsetzen dieser Werte werden also die folgenden Gleichungen, wobei man der Kürze wegen zuvor festgelegt

$$p^2 + 2pq - pr - m^2 + mr = P$$

und

$$2r(p + q - m) = Q:$$

hervorgehen

$$\begin{aligned}
&P\alpha\beta && -(m-r)\alpha && = m\beta + 1\\
&(P+Q)\beta\gamma && -m\beta && = (m+r)\gamma + 1\\
&(P+2Q)\gamma\delta && -(m+r)\gamma && = (m+2r)\delta + 1\\
&(P+3Q)\delta\varepsilon && -(m+2r)\delta && = (m+3r)\varepsilon + 1\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

§23 Aus diesen Gleichungen also die folgenden Relationen der Buchstaben α,β,γ,δ etc zueinander hervorgehen:

$$\alpha = \frac{m\beta + 1}{P\beta - (m-r)} = \frac{m}{P} + \frac{p(p+2q-r) : P^2}{-\dfrac{m-r}{P} + \beta}$$

$$\beta = \frac{(m+r)\gamma + 1}{(P+Q)\gamma - m} = \frac{m+r}{P+Q} + \frac{(p+r)(p+2q) : (P+Q)^2}{-\dfrac{m}{P+Q} + \gamma}$$

$$\gamma = \frac{(m+2r)\delta + 1}{(P+2Q)\delta - (m+r)} = \frac{m+2r}{P+2Q} + \frac{(p+2r)(p+2q+r) : (P+2Q)^2}{-\dfrac{m+r}{P+2Q} + \delta} \quad \text{etc.}$$

Wenn also der Kürze wegen festgelegt wird

$$p^2 + 2pq - mp - mq + qr = R$$

und

$$pr + qr - mr = S$$

und die Werte der angenommenen Buchstaben ununterbrochen in den vorhergehenden eingesetzt werden, wird der folgende Kettenbruch hervorgehen

$$\alpha = \frac{m}{p} + \cfrac{p(p+2q-r):p^2}{\cfrac{2rR}{P(P+Q)} + \cfrac{(p+r)(p+2q):(P+Q)^2}{\cfrac{2r(R+S)}{(P+Q)(P+2Q)} + \cfrac{(p+2r)(p+2q+r):(P+2Q)^2}{\cfrac{2r(R+2S)}{(P+2Q)(P+3Q)} + \text{ etc}}}}$$

§24 Weil also $a = m - r = \frac{1}{\alpha}$ gilt, wird man haben

$$a = m - r + \cfrac{P}{m + \cfrac{p(p+2q-r)(P+Q)}{2rR + \cfrac{(p+r)(p+2q)P(P+2Q)}{2r(R+S) + \cfrac{(p+2r)(p+2q+r)(P+Q)(P+3Q)}{2r(R+2S) + \text{ etc}}}}}$$

Daher wird der Term der vorgelegten Reihe

$$\frac{p}{p+2q} + \frac{p(p+2r)}{(p+2q)(p+2q+2r)} + \frac{p(p+2r)(p+4r)}{(p+2q)(p+2q+2r)(p+2q+4r)} + \text{ etc}$$

der Term mit Index $\frac{1}{2}$ dieser sein

$$A = \frac{a}{p+2q-r}.$$

Weil ja aber der allgemeine Term dieser Reihe, also der zum Index n, dieser ist

$$= \frac{\int y^{p+2q-1}dy(1-y^{2r})^{n-1}}{\int y^{p-1}dy(1-y^{2r})^{n-1}},$$

wird der gefundene Kettenbruch oder der Wert des Buchstaben a sein

$$= (p+2q-r)\frac{\int y^{p+2q-1}dy:\sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{p-1}dy:\sqrt{1-y^{2r}}},$$

wenn nach jeder der beiden Integrationen $y = 1$ gesetzt wird.

§25 Weil aber in unserem Kettenbruch der beliebige Buchstabe m enthalten ist, wird man unzählige Kettenbrüche haben, die denselben Wert haben und der bekannt ist; es wird förderlich sein, von diesen die wesentlichen betrachtet zu haben. Es sei also

$$m - r = p \text{ oder } m = p + r$$

es wird gelten

$$P = 2p(q-r), \quad Q = 2r(q-r), \quad R = p(q-r) \text{ und } S = r(q+r),$$

woher werden wird

$$a = p + \cfrac{2p(q-r)}{p + r + \cfrac{(p+2q-r)(p+r)}{r + \cfrac{(p+2q)(p+2r)}{r + \cfrac{(p+2q+r)(p+3r)}{r + \text{ etc}}}}}$$

Aber wenn $r > q$ war, damit der Kettenbruch nicht negativ wird, wird gelten

$$a = \cfrac{p}{1 + \cfrac{2(r-q)}{p + 2q - r + \cfrac{(p+2q-r)(p+r)}{r + \cfrac{(p+2q)(p+2r)}{r + \cfrac{(p+2q+r)(p+3r)}{r + \text{ etc}}}}}}$$

§26 Es sei nun $m = p + q$, damit P und Q verschwinden; es wird aber gelten

$$P = q(r-q) \text{ und } R = q(r-q)$$

und daher wird dann folgen

$$a = p + q - r + \cfrac{q(r-q)}{p + q + \cfrac{p(p+2q-r)}{2r + \cfrac{(p+r)(p+2q)}{2r + \cfrac{(p+2r)(p+2q+r)}{2r + \text{ etc}}}}}$$

welcher Kettenbruch sogar dem vorhergehenden gleich ist, auch wenn die Formen selbst verschieden sind.

§27 Man setze $m = p + 2q$ und es wird gelten

$$\begin{aligned} P &= 2q(r - p - 2q) = -2q(p + 2q - r), \\ Q &= -\,2qr, \\ R &= -\,q(p + 2q - r) \end{aligned}$$

und

$$S = -qr.$$

Aus diesen Dingen wird daher der folgende Kettenbruch erhalten werden:

$$a = p + 2q - r - \cfrac{2q(p + 2q - r)}{p + 2q + \cfrac{p(p + 2q)}{r + \cfrac{(p + r)(p + 2q + r)}{r + \cfrac{(p + 2r)(p + 2q + 2r)}{r + \text{ etc}}}}}$$

So gehen unzählige Kettenbrüche hervor, die alle denselben Wert a haben, der durch Integralformeln gefunden worden ist als

$$= (p + 2q - r)\frac{\int y^{p+2q-1}dy : \sqrt{1 - y^{2r}}}{\int y^{p-1}dy : \sqrt{1 - y^{2r}}} = (p + 2q - 2r)\frac{\int y^{p+2q-2r-1}dy : \sqrt{1 - y^{2r}}}{\int y^{p-1}dy : \sqrt{1 - y^{2r}}}$$

§28 Bevor wir aber weiter fortschreiten, wollen wir einige Fälle betrachten. Es sei deshalb $r = 2q$ und es wird gelten

$$a = p\frac{\int y^{p+2q-1}dy : \sqrt{1 - y^{4q}}}{\int y^{p-1}dy : \sqrt{1 - y^{4q}}}.$$

Weil also wird

$$\begin{aligned} P &= p^2 + 2mq - m^2, \\ Q &= 4q(p + q - m), \\ R &= p^2 + 2pq + 2qq - mp - mq \end{aligned}$$

und

$$S = 2q(p + q - m)$$

so wird im Allgemeinen gelten

$$a = m - 2q + \cfrac{P}{m + \cfrac{p^2(P+Q)}{4qR + \cfrac{(p+2q)^2 P(P+2Q)}{4q(R+S) + \cfrac{(p+4q)^2(P+Q)(P+3Q)}{4q(R+2S) + \text{ etc}}}}}$$

§29 Wenn wir aber für m jene verschiedenen Werte einsetzen, werden die folgenden bestimmten Kettenbrüche hervorgehen

$$a = p - \cfrac{2pq}{p + 2q + \cfrac{p(p+2q)}{2q + \cfrac{(p+2q)(p+4q)}{2q + \cfrac{(p+4q)(p+6q)}{2q + \text{ etc}}}}}$$

oder anstelle dieses Kettenbruches wegen $r > q$

$$a = \cfrac{p}{1 + \cfrac{2q}{p + \cfrac{p(p+2q)}{2q + \cfrac{(p+2q)(p+4q)}{2q + \cfrac{(p+4q)(p+6q)}{2q + \text{ etc}}}}}}$$

Darauf wird aus §26 für diesen Fall dieser Bruch erhalten

$$a = p - q + \cfrac{qq}{p + q + \cfrac{pp}{4q + \cfrac{(p+2q)^2}{4q + \cfrac{(p+4q)^2}{4q + \text{ etc}}}}}$$

Als drittes wird aber §27 diesen Kettenbruch an die Hand geben

$$a = p - \cfrac{2pq}{p+2q+\cfrac{p(p+2q)}{2q+\cfrac{(p+2q)(p+4q)}{2q+\cfrac{(p+4q)(p+6q)}{2q+\ \text{etc}}}}}$$

der mit dem zuerst hier dargebotenen übereinstimmt, so dass man nur zwei einfachere Kettenbrüche für den Fall $r = 2q$ hat.

§30 Man setze nun weiter $q = p = 1$, dass wird

$$a = \frac{\int yydy : \sqrt{1-y^4}}{\int dy : \sqrt{1-y^4}},$$

es wird zuerst gelten

$$a = 1 - \cfrac{2}{3+\cfrac{1\cdot 3}{2+\cfrac{3\cdot 5}{2+\cfrac{5\cdot 7}{2+\ \text{etc}}}}}$$

Des Weiteren wird man haben

$$a = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{9}{4+\cfrac{25}{4+\cfrac{49}{4+\text{etc}}}}}}$$

Daher folgt, dass gelten wird

$$\frac{\int dy : \sqrt{1-y^4}}{\int yydy : \sqrt{1-y^4}} = 2 + \cfrac{1}{4+\cfrac{9}{4+\cfrac{25}{4+\cfrac{49}{4+\text{etc}}}}}$$

welcher Fall im §16 gegebenen Ausdruck enthalten ist, woraus jene noch nicht bewiesene Formel noch mehr bestätigt wird. Denn setzt man dort $a = 3$, wird werden

$$3\frac{\int x^4dx : \sqrt{1-x^4}}{\int xxdx : \sqrt{1-x^4}} = \frac{\int dx : \sqrt{1-x^4}}{\int xxdx : \sqrt{1-x^4}} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{9}{4 + \cfrac{25}{4 + \cfrac{49}{4 + \text{etc}}}}}$$

so dass nun freilich feststeht, dass jene in §16 dargebotene Formel in den Fällen wahr ist, in denen $a = 2$ und $a = 3$ ist; bald wird aber ihre allgemeine Gültigkeit dargetan werden.

§31 Es sei $q = \frac{1}{2}$ und $p = 1$; wobei $r = 2q = 1$ bleibe; dann wird gelten

$$a = \frac{\int ydy : \sqrt{1-y^2}}{\int dy : \sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi}$$

während π die Peripherie des Kreises bezeichnet, dessen Durchmesser $= 1$ ist. Allgemein wird deshalb gelten

$$P = 1 + m - m^2, \quad Q = 3 - 2m,$$

$$R = \frac{5-3m}{2} \quad \text{und} \quad S = \frac{3-2m}{2}$$

und daher

$$a = m - 1 + \cfrac{1 + m - m^2}{m + \cfrac{1^2(4 - m - m^2)}{5 - 3m + \cfrac{2^2(1 + m - m^2)(7 - 3m - m^2)}{8 - 5m + \cfrac{3^2(4 - m - m^2)(10 - 5m - m^2)}{11 - 7m + \text{ etc}}}}}$$

In den dargelegten Spezialfällen wird aber gelten

$$\frac{\pi}{2} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1 \cdot 2}{1 + \cfrac{2 \cdot 3}{1 + \cfrac{3 \cdot 4}{1 + \text{ etc}}}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1 \cdot 2}{1 + \cfrac{2 \cdot 3}{1 + \cfrac{3 \cdot 4}{1 + \text{ etc}}}}}$$

und

$$\frac{\pi}{2} = \cfrac{1}{\frac{1}{2} + \cfrac{1 : 4}{\frac{3}{2} + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{2^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \text{ etc}}}}}} = 2 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{2^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \text{ etc}}}}}$$

§32 Um den Gebrauch dieser Formeln bei Interpolation einzusehen, sei diese Reihe vorgelegt

$$\frac{2}{1} + \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \text{ etc},$$

deren Term zum Index $\frac{1}{2}$ gefunden werden soll, welcher Term $= A$ sei; es wird also gelten

$$p = 2, r = 1 \quad \text{und} \quad q = -\frac{1}{2}$$

Man setze

$$A = \frac{a}{p + 2q - r},$$

es wird gelten

$$A = \frac{a}{0}$$

woher der Umstand der gegebenen Formeln, wenn $p + 2q - r = 0$ wird, hinreichend eingesehen wird. Dennoch kann indes auch diese Aufgabe bewältigt werden, indem der Term zum Index $\frac{3}{2}$ gesucht wird; wenn dieser $= Z$ war, wird $A = \frac{2}{3}Z$ sein; aber $\frac{1}{2}Z$ wird der Term zum Index $\frac{1}{2}$ zu dieser Reihe sein

$$\frac{4}{3} + \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5} + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \text{ etc},$$

welche mit der allgemeinen verglichen gibt

$$p = 4, \quad r = 1, \quad q = -\frac{1}{2}$$

so dass wird

$$Z = \frac{2\int y^2 dy : \sqrt{1-y^2}}{\int y^3 dx : \sqrt{1-y^2}} = \frac{3\int dy : \sqrt{1-y^2}}{2\int y dy : \sqrt{1-y^2}} = \frac{3}{4}\pi$$

und $A = \frac{\pi}{2}$. Weil also durch §24 gilt

$$Z = a \quad \text{und} \quad A = \frac{2}{3}Z = \frac{2}{3}a,$$

wird zuerst allgemein wegen

$$P = 8 + m - m^2, \quad Q = 7 - 2m,$$

$$R = \frac{23 - 7m}{2} \quad \text{und} \quad S = \frac{7 - 2m}{2}$$

gelten

$$A = \frac{2}{3}a = \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{2(m-1)}{3} + \cfrac{2(8+m-m^2)}{3m + \cfrac{2 \cdot 4 \cdot 3(15-m-m^2)}{23 - 7m + \cfrac{3 \cdot 5(8+m-m^2)(22-3m-m^2)}{30 - 9m + \cfrac{4 \cdot 6(15-m-m^2)(29-5m-m^2)}{37 - 11m + \text{ etc}}}}}$$

§33 Indem aber die Spezialfälle entwickelt werden, wird gelten

$$a = \frac{3}{4}\pi = 4 - \cfrac{12}{5 + \cfrac{2\cdot 5}{1 + \cfrac{3\cdot 6}{1 + \cfrac{4\cdot 7}{1 + \text{ etc}}}}} = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1\cdot 3}{2 + \cfrac{2\cdot 5}{1 + \cfrac{3\cdot 6}{1 + \cfrac{4\cdot 7}{1 + \text{ etc}}}}}}$$

oder auch

$$\frac{3}{4}\pi = 1 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{1\cdot 4}{1 + \cfrac{2\cdot 5}{1 + \cfrac{3\cdot 6}{1 + \cfrac{4\cdot 7}{1 + \text{ etc}}}}}}$$

Auf die gleiche Weise wird man nach §26 haben

$$a = \frac{3}{4}\pi = \frac{5}{2} - \cfrac{3:4}{\frac{7}{2} + \cfrac{2\cdot 4}{2 + \cfrac{3\cdot 5}{2 + \cfrac{4\cdot 6}{2 + \cfrac{5\cdot 7}{2 + \text{ etc}}}}}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1\cdot 3}{2 + \cfrac{2\cdot 4}{2 + \cfrac{3\cdot 5}{2 + \cfrac{4\cdot 6}{2 + \text{ etc}}}}}}$$

schließlich wird der in §27 dargelegte Fall geben

$$a = \frac{3}{4}\pi = 2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3\cdot 4}{1 + \cfrac{4\cdot 5}{1 + \cfrac{5\cdot 6}{1 + \text{ etc}}}}}$$

oder

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1 \cdot 2}{1 + \cfrac{2 \cdot 3}{1 + \cfrac{3 \cdot 4}{1 + \cfrac{4 \cdot 5}{1 + \text{ etc}}}}}}$$

welcher Ausdruck mit dem oberen in §31 dargebotenen übereinstimmt.

§34 Aus dieser Interpolationsmethode haben wir deshalb unzählige Kettenbrüche verlangt, deren Werte durch Quadraturen von Kurven oder Integralformeln angegeben werden können. Weil aber diese Kettenbrüche zu Anfang unregelmäßig sind, schneide man die Anfänge, die die Anomalie enthalten, ab, dass man überall nach demselben Gesetz fortschreitende Kettenbrüche hat. So wird aus §25 durch Setzen von

$$p + 2q - r = f \text{ und } p + r = h$$

die folgende Gleichung hervorgehen

$$r + \cfrac{fh}{r + \cfrac{(f+r)(h+r)}{r + \cfrac{(f+2r)(h+2r)}{r + \text{ etc}}}} =$$
$$\frac{h(f-r)\int y^{h+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}} - f(h-r)\int y^{f+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{f\int y^{f+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}} - h\int y^{h+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

welche Gleichung immer eine reelle ist, wenn nicht $f = h$ wird. Aber im Fall $f = h$ setze man $f = h + dw$ und man wird auffinden

$$\frac{\int y^{h+r+dw-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{h+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}} = 1 - rdw\int \frac{dx}{x^{r+1}} \int \frac{x^{h+2r-1}dx}{1-x^{2r}}$$

wenn nach der Integration $x = 1$ gesetzt wird. Daher wird also gelten

$$r + \cfrac{hh}{r + \cfrac{(h+r)^2}{r + \cfrac{(h+2r)^2}{r + \text{ etc}}}}$$

$$= \frac{r + hr(h-r)\int \frac{dx}{x^{r+1}} \int \frac{x^{h+2r-1}dx}{1-x^{2r}}}{1 - hr\int \frac{dx}{x^{r+1}} \int \frac{x^{h+2r-1}dx}{1-x^{2r}}} = \frac{r(h-r)^2 \int \frac{dx}{x^{r+1}} \int \frac{x^{h-1}dx}{1-x^{2r}}}{1 - r(h-r)\int \frac{dx}{x^{r+1}} \int \frac{x^{h-1}dx}{1-x^{2r}}}$$

Aber aus der Natur der Integrale gilt

$$\frac{dx}{x^{r+1}} \int \frac{x^{h+2r-1}dx}{1-x^{2r}} = \frac{-1}{rx^r} \int \frac{x^{h+2r-1}dx}{1-x^{2r}} + \frac{1}{r}\int \frac{x^{h+r-1}dx}{1-x^{2r}} = \frac{1}{r}\int \frac{x^{h+r-1}dx}{1+x^r}$$

wenn $x = 1$ gesetzt wird. Deshalb wird man haben

$$r + \cfrac{hh}{r + \cfrac{(h+r)^2}{r + \text{ etc}}} = \frac{r + h(h-r)\int \frac{x^{h+r-1}dx}{1+x^r}}{1 - h\int \frac{x^{h+r-1}dx}{1+x^r}} = \frac{1 - (h-r)\int \frac{x^{h-1}dx}{1+x^r}}{\int \frac{x^{h-1}dx}{1+x^r}}$$

welche Form aber mit der übereinstimmt, die in §7 gegeben worden ist.

§35 Indem $p = f$ und $p + 2q - r = h$ gesetzt wird, folgt in gleicher Weise aus §26, dass gelten wird

$$2r + \cfrac{fh}{2r + \cfrac{(f+r)(h+r)}{2r + \cfrac{(f+2r)(h+2r)}{2r + \text{ etc}}}} = \frac{2(r-f)(r-h)\int \frac{y^{f-1}dy}{\sqrt{1-y^{2r}}} - h(f+h-3r)\int \frac{y^{h+r-1}dy}{\sqrt{1-y^{2r}}}}{2h\int \frac{y^{h+r-1}dy}{\sqrt{1-y^{2r}}} - (f+h-r)\int \frac{y^{f-1}dy}{\sqrt{1-y^{2r}}}}$$

Weil ja die Formel unverändert bleibt, wenn f und h miteinander vertauscht werden, ist es offenbar, dass gelten muss

$$\frac{h\int y^{h+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{f-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}} = \frac{f\int y^{f+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{h-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

wenn nach allen Integrationen $y = 1$ gesetzt wird. Dieser Lehrsatz ist aber schon in den Dingen enthalten, die ich in der vorhergehenden Abhandlung über aus unendlich vielen Faktoren bestehende Produkte dargeboten habe; dort habe ich nämlich viele Lehrsätze dieser Gestalt ausgesprochen und bewiesen.

§36 Es verdient aber in gleicher Weise der Fall bemerkt zu werden, in dem $f = h + r$; denn in diesem verschwindet so der Zähler wie der Nenner des gefundenen Bruches. Denn, wenn wie zuvor $f = h + r + dw$ gesetzt und die Rechnung durchgeführt wirde, wird entspringen

$$2r + \cfrac{h(h+r)}{2r + \cfrac{(h+r)(h+2r)}{2r + \cfrac{(h+2r)(h+3r)}{2r + \text{etc}}}} = \frac{h + 2h(r-h)\int \frac{x^{h-r}dx}{1+x^r}}{-1 + 2h\int \frac{x^{h-r}dx}{1+x^r}}$$

Daher wird man, wenn $h = r = 1$ gesetzt wird, haben

$$2 + \cfrac{1\cdot 2}{2 + \cfrac{2\cdot 3}{2 + \cfrac{3\cdot 4}{2 + \cfrac{4\cdot 5}{2 + \text{etc}}}}} = \frac{1}{2\ln(2) - 1}$$

Wenn die Gleichung in §27 in gleicher Weise behandelt wird, wird im Übrigen die Form jener die ich in §25 gefunden habe, vollkommen gleich hervorgehen.

§37 Nachdem diese Dinge dargelegt worden sind, mit denen die Interpolation von Reihen auf Kettenbrüche zurückgeführt wird, kehre ich zu den Brouncker'schen Ausdrücken zurück und werde eine natürliche Methode angeben, nicht nur zu diesen zu gelangen, sondern auch eine von solcher Art, die von Brouncker selbst gebraucht zu worden sein scheint. Aber die bisher gefundenen Kettenbrüche weichen sehr stark von den Brouncker'schen ab, weil die Werte der Buchstaben A, B, C, D etc nach der dargelegten Methode so voneinander abhängen, dass sie leicht miteinander verglichen werden können, mit der Brouncker'schen Methode aber voneinander verschieden hervorgegangen sind, dass deren gegenseitige Relation nicht erkannt wird. Dieser Unterschied selbst hat mich schließlich zum Fund der anderen nun zu eröffnenden Methode geführt.

§38 Bevor ich aber die Interpolationsart selbst darstelle, wird es förderlich sein, das folgende sich sehr weit erstreckende Lemma vorauszuschicken. Wenn es unzählige Größen α,β,γ,δ,ε etc gegeben hat, die so voneinander abghängen, dass gilt

$$\begin{aligned}
&\alpha\beta - m\alpha - n\beta - \chi = 0\\
&\beta\gamma - (m+s)\beta - (n+s)\gamma - \chi = 0\\
&\gamma\delta - (m+2s)\gamma - (n+2s)\delta - \chi = 0\\
&\delta\varepsilon - (m+3s)\delta - (n+3s)\varepsilon - \chi = 0\\
&\text{etc}
\end{aligned}$$

und den Buchstaben α,β,γ,δ etc die folgenden Werte zugeteilt werden

$$\begin{aligned}
\alpha &= m+n-s + \frac{ss-ms+ns+\chi}{a}\\
\beta &= m+n+s + \frac{ss-ms+ns+\chi}{b}\\
\gamma &= m+n+3s + \frac{ss-ms+ns+\chi}{c}\\
\delta &= m+n+5s + \frac{ss-ms+ns+\chi}{d}\\
&\text{etc}
\end{aligned}$$

werden die oberen Gleichungen in die folgenden ähnlichen transformiert werden

$$\begin{aligned}
&ab - (m-s)a - (n+s)b - ss + ms - ns - \chi = 0\\
&bc - mb - (n+2s)c - ss + ms - ns - \chi = 0\\
&cd - (m-s)c - (n+3s)d - ss + ms - ns - \chi = 0\\
&de - (m+2s)d - (n+4s)e - ss + ms - ns - \chi = 0\\
&\text{etc}
\end{aligned}$$

Und daraus selbst, dass ähnliche Formen dieser Art hervorgehen, sind jene Substitutionen entsprungen.

§39 Wenn man auf die gleiche Weise diese letzten Gleichungen mithilfe geeigneter Substitutionen in sich selbst ähnliche verwandelt, werden für a,b,c,d etc die folgenden Substitutionen aufgefunden werden

$$\begin{aligned}
a &= m+n-s \;\; + \frac{4ss-2ms+2ns+\chi}{a_1} \\
b &= m+n+s \;\; + \frac{4ss-2ms+2ns+\chi}{b_1} \\
c &= m+n+3s + \frac{4ss-2ms+2ns+\chi}{c_1} \\
d &= m+n+5s + \frac{4ss-2ms+2ns+\chi}{d_1} \\
& etc
\end{aligned}$$

nach Ausführen von welchen die folgenden Gleichungen hervortreten werden

$$\begin{aligned}
a_1b_1 - (m-2s)a_1 - (n+2s)b_1 - 4ss + 2ms - 2ns - \chi &= 0 \\
b_1c_1 - (m-s)b_1 - (n+3s)c_1 - 4ss + 2ms - 2ns - \chi &= 0 \\
c_1d_1 - mc_1 - (n+4s)d_1 - 4ss + 2ms - 2ns - \chi &= 0 \\
d_1e_1 - (m+s)d_1 - (n+5s)e_1 - 4ss + 2ms - 2ns - \chi &= 0 \\
etc&
\end{aligned}$$

§40 Weiter fortschreitend wird also festgelegt werden müssen

$$\begin{aligned}
a_1 &= m+n-s \;\; + \frac{9ss-3ms+3ns+\chi}{a_2} \\
b_1 &= m+n+s \;\; + \frac{9ss-3ms+3ns+\chi}{b_2} \\
c_1 &= m+n+3s + \frac{9ss-3ms+3ns+\chi}{c_2} \\
& etc
\end{aligned}$$

Und aus diesen Substitutionen werden diese Gleichungen ans Licht treten

$$a_2b_2 - (m-3s)a_2 - (n+3s)b_2 - 9ss + 3ms - 3ns - \chi = 0$$

$$b_2c_2 - (m-2s)b_2 - (n+4s)c_2 - 9ss + 3ms - 3ns - \chi = 0$$

$$c_2d_2 - (m-s)c_2 - (n+5s)d_2 - 9ss + 3ms - 3ns - \chi = 0$$

etc

§41 Wenn diese Substitutionen nun bis ins Unendliche fortgesetzt werden und ununterbrochen die folgenden Werte in den vorhergehenden eingesetzt werden, werden die Werte der Buchstaben α,β,γ,δ etc mit den folgenden Kettenbrüchen ausgedrückt werden

$$\alpha = m+n-s + \cfrac{ss-ms+ns+\chi}{m+n-s+\cfrac{4ss-2ms+2ns+\chi}{m+n-s+\cfrac{9ss-3ms+3ns+\chi}{m+n-s+\cfrac{16ss-4ms+4ns+\chi}{m+n-s+\text{etc}}}}}$$

$$\beta = m+n+s + \cfrac{ss-ms+ns+\chi}{m+n+s+\cfrac{4ss-2ms+2ns+\chi}{m+n+s+\cfrac{9ss-3ms+3ns+\chi}{m+n+s+\cfrac{16ss-4ms+4ns+\chi}{m+n+s+\text{etc}}}}}$$

$$\gamma = m+n+3s + \cfrac{ss-ms+ns+\chi}{m+n+3s+\cfrac{4ss-2ms+2ns+\chi}{m+n+3s+\cfrac{9ss-3ms+3ns+\chi}{m+n+3s+\cfrac{16ss-4ms+4ns+\chi}{m+n+3s+\text{etc}}}}}$$

etc

welche Kettenbrüche denen ähnlich sind, die Brouncker gegeben hat, während die folgenden in den vorhergehenden nicht enthalten sind

§42 Damit aber der Gebrauch dieser Formeln bei Interpolationen klar zutage tritt, sei diese Reihe vorgelegt

$$\frac{p}{p+2q} + \frac{p(p+2r)}{(p+2q)(p+2q+r)} + \frac{p(p+2r)(p+4r)}{(p+2q)(p+2q+2r)(r+2q+4r)} + \text{etc}$$

deren Term zum Index $\frac{1}{2} = A$ sei, der Term zum Index $\frac{3}{2} = ABC$, der Term zum Index $\frac{5}{2} = ABCDE$ und so weiter. Nach Festlegen dieser wird gelten

$$AB = \frac{p}{p+2q}, \quad CD = \frac{p+2r}{p+2q+2r}, \quad EF = \frac{p+4r}{p+2q+4r} \quad \text{etc}$$

Man setzt nun

$$A = \frac{a}{p+2q-r}, \quad B = \frac{b}{p+2q}, \quad C = \frac{c}{p+2q+r}, \quad D = \frac{d}{p+2q+2r} \quad \text{etc}$$

und es wird gelten

$$\begin{aligned}
ab &= p(p+2q-r) \\
bc &= (p+r)(p+2q) \\
cd &= (p+2r)(p+2q+r) \\
de &= (p+3r)(p+2q+2r) \\
&etc
\end{aligned}$$

Nun werde weiter

$$\begin{aligned}
a &= p+q-r \quad + \frac{g}{\alpha} \\
b &= p+q \qquad\quad + \frac{g}{\beta} \\
c &= p+q+r \quad + \frac{g}{\gamma} \\
d &= p+q+2r + \frac{g}{\delta} \\
&etc
\end{aligned}$$

nach Einsetzen welcher Werte ans Licht treten werden, nachdem $g = q(r-q)$ gesetzt worden ist:

$$\begin{aligned}
\alpha\beta - (p+q-r)\alpha - (p+q \qquad)\beta - q(r-q) = 0 \\
\beta\gamma - (p+q \qquad)\beta - (p+q+r)\gamma - q(r-q) = 0 \\
\gamma\delta - (p+q+r)\gamma - (p+q+2r)\delta - q(r-q) = 0 \\
\delta\varepsilon - (p+q+2r)\delta - (p+q+3r)\varepsilon - q(r-q) = 0 \\
etc.
\end{aligned}$$

§43 Nachdem diese Gleichungen mit denen verglichen worden sind, die wir in §38 angenommen haben, wird aufgefunden werden

$$m = p + q - r, \quad n = p + q, \quad \chi = qr - qq \text{ und } s = v$$

woher werden wird

$$\begin{aligned} ss - \ ms + ns + \chi &= 2rr + qr - qq \\ 4ss - 2ms + 2ns + \chi &= 6rr + qr - qq \\ 9ss - 3ms + 3ns + \chi &= 12rr + qr - qq \\ &etc \end{aligned}$$

Nach Einsetzen all dieser Werte werden die folgenden Kettenbrüche erhalten werden, mit denen die Buchstaben a,b,c,d etc ausgedrückt werden werden:

$$a = p + q - r + \cfrac{qr - qq}{2(p+q-r) + \cfrac{2rr + qr - qq}{2(p+q-r) + \cfrac{6rr + qr - qq}{2(p+q-r) + \cfrac{12rr + qr - qq}{2(p+q-r) + \text{ etc}}}}}$$

$$b = p + q \qquad + \cfrac{qr - qq}{2(p+q) + \cfrac{2rr + qr - qq}{2(p+q) + \cfrac{6rr + qr - qq}{2(p+q) + \cfrac{12rr + qr - qq}{2(p+q) + \text{ etc}}}}}$$

$$c = p + q + r + \cfrac{qr - qq}{2(p+q+r) + \cfrac{2rr + qr - qq}{2(p+q+r) + \cfrac{6rr + qr - qq}{2(p+q+r) + \cfrac{12rr + qr - qq}{2(p+q+r) + \text{ etc}}}}}$$

etc

§44 Weil aber der Term, der den Index n hat, der vorgelegten Reihe dieser ist

$$= \frac{\int y^{p+2q-1} dy (1 - y^{2r})^{n-1}}{\int y^{p-1} dy (1 - y^{2r})^{n-1}}$$

wird gelten

$$A = \frac{a}{p+2q-r} = \frac{\int y^{p+2q-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{p-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

oder

$$a = (p+2q-r)\frac{\int y^{p+2q-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{p-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

Des Weiteren wird wegen $ab = p(p+2q-r)$ gelten

$$b = \frac{p\int y^{p-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{p+2q-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

Weil ja aber nach dem in der vorausgehenden Abhandlung dargelegten Lehrsatz gilt

$$\frac{p\int y^{p-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{f+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}} = \frac{f\int y^{f-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{p+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}} = \frac{(f+r)\int y^{f+2r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{p+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

setze man $f = p+2q-r$; danach wird gelten

$$b = \frac{(p+2q)\int y^{p+2q+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{p+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

Indem aber auf die gleiche Weise weiter fortgeschritten wird, wird gelten

$$c = \frac{(p+2q+r)\int y^{p+2q+2r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{p+2r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

und

$$d = \frac{(p+2q+2r)\int y^{p+2q+3r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{p+3r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

etc

§45 Weil also das Fortschreitungsgesetz dieser Integralformeln bekannt ist, wird ausgeschlossen, dass der Wert dieses allgemeinen Kettenbruches

$$p+q+mr+\cfrac{qr-qq}{2(p+q+mr)+\cfrac{2rr+qr-qq}{2(p+q+mr)+\cfrac{6rr+qr-qq}{2(p+q+mr)+\text{etc}}}}$$

dieser ist

$$= (p+2q+mr)\frac{\int y^{p+2q+(m+1)r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{p+(m+1)r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

Wenn also $p+q+mr = s$ gesetzt wird, sodass $p = s-q-mr$ ist, wird der folgende Kettenbruch hervorgehen

$$s+\cfrac{qr-qq}{2s+\cfrac{2rr+qr-qq}{2s+\cfrac{6rr+qr-qq}{2s+\cfrac{12rr+qr-qq}{2s+\cfrac{20rr+qr-qq}{2s+\text{etc}}}}}}$$

dessen Wert deshalb dieser Ausdruck sein wird

$$(q+s)\frac{\int y^{q+r+s-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{r+s-q-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

§46 Weil auf die gleiche Weise der Wert dieses Kettenbruches

$$s+r+\cfrac{qr-qq}{2(s+r)+\cfrac{2rr+qr-qq}{2(s+r)+\cfrac{6rr+qr-qq}{2(s+r)+\text{etc}}}}$$

dieser ist

$$= (q+r+s)\frac{\int y^{s+2r+q-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{s+2r-q-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

wird das Produkt dieser zwei Kettenbrüche deshalb sein

$$= (s+q)(s+r-q)$$

wie das Produkt der Integralformeln aufzeigt. Es gilt nämlich nach dem in der vorhergehenden Abhandlung angegebenen Lehrsatz

$$\frac{f}{a} = \frac{\int x^{a-1}dx : \sqrt{1-x^{2r}} \cdot \int x^{a+r-1}dx : \sqrt{1-x^{2r}}}{\int x^{f-1}dx : \sqrt{1-x^{2r}} \cdot \int x^{f+r-1}dx : \sqrt{1-x^{2r}}}$$

auf welche Form das Produkt der Integralformeln von selbst zurückgeführt wird.

§47 Der gefundene Kettenbruch kann in eine gefälligere Form gebracht werden, weil die einzelnen Zähler in Produkte aufgelöst werden können; so wird man diesen Kettenbruch haben

$$s+\cfrac{q(r-q)}{2s+\cfrac{(r+q)(2r-q)}{2s+\cfrac{(2r+q)(3r-q)}{2s+\cfrac{(2r+q)(4r-q)}{2s+\text{etc}}}}}$$

dessen Wert somit dieser sein wird

$$=(q+s)\frac{\int y^{r+s+q-1}dx:\sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{r+s-q-1}dx:\sqrt{1-y^{2r}}}$$

Wenn also s zum Kettenbruch hinzuaddiert wird, damit das Fortschreitungsgesetz überall dasselbe ist, wird gelten

$$\frac{(q+s)\int y^{r+s+q-1}dy:\sqrt{1-y^{2r}}+s\int y^{r+s-q-1}dy:\sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{r+s-q-1}dy:\sqrt{1-y^{2r}}}$$

$$=2s+\cfrac{q(r-q)}{2s+\cfrac{(r+q)(2r-q)}{2s+\cfrac{(2r+q)(3r-q)}{2s+\cfrac{(3r+q)(4r-q)}{2s+\text{etc}}}}}$$

§48 Wenn nun $r=2$ und $q=1$ gesetzt wird, werden zusammengenommen alle von Brouncker dargebotenen Kettenbrüche hervorgehen, die alle in diesem Kettenbruch enthalten sein werden

$$s+\cfrac{1}{2s+\cfrac{9}{2s+\cfrac{25}{2s+\cfrac{49}{2s+\cfrac{81}{2s+\text{etc}}}}}}$$

dessen Wert deshalb dieser sein wird

$$= (s+1)\frac{\int y^{s+2}dy : \sqrt{1-y^4}}{\int y^s dy : \sqrt{1-y^4}}$$

welcher Ausdruck in vorzüglicher Weise mit dem übereinstimmt, den wir oben, bevor die Gültigkeit vollkommen feststand, angegeben haben; siehe §16.

§49 Weil ich also bisher viele Kettenbrüche gegeben habe, deren Werte mit Integralformeln angegeben werden können, möchte ich nun eine direkte Methode erläutern, mit deren Hilfe es möglich ist, umgekehrt von Integralformeln zu Kettenbrüchen zu gelangen. Diese Methode ist aber auf die Rückführung einer einzigen Integralformel auf zwei andere gestützt, welche Reduktion jener üblichen nicht völlig unähnlich ist, mit welcher die Integration einer gewissen Differentialform auf die Integration einer anderen rückgeführt wird. Es gebe also unendlich viele Integralformeln von dieser Art

$$\int Pdx, \quad \int PRdx, \quad \int PR^2dx, \quad \int PR^3dx, \quad \int PR^4dx \quad \text{etc}$$

die so beschaffen seien, dass, wenn die einzelnen so integriert werden, dass sie für $x=0$ gesetzt verschwinden, und dann $x=1$ gesetzt wird, verhalte es sich wie folgt

$$\begin{aligned}
a\int Pdx &= b\int PRdx &&+ c\int PR^2dx\\
(a+\alpha)\int PRdx &= (b+\beta)\int PR^2dx &&+ (c+\gamma)\int PR^3dx\\
(a+2\alpha)\int PR^2dx &= (b+2\beta)\int PR^3dx &&+ (c+2\gamma)\int PR^4dx\\
(a+3\alpha)\int PR^3dx &= (b+3\beta)\int PR^4dx &&+ (c+3\gamma)\int PR^5dx
\end{aligned}$$

und allgemein

$$(a+n\alpha)\int PR^n dx = (b+n\beta)\int PR^{n+1}dx + (c+n\gamma)\int PR^{n+2}dx$$

§50 Wenn man also Integralformeln von dieser Art hat, werden ohne Mühe aus ihnen Kettenbrüche gebildet werden. Weil nämlich gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\int Pdx}{\int PRdx} &= \frac{b}{a} + \frac{c\int PR^2dx}{a\int PRdx} \\
\frac{\int PRdx}{\int PR^2dx} &= \frac{b+\beta}{a+\alpha} + \frac{(c+\gamma)\int PR^3dx}{(a+\alpha)\int PR^2dx} \\
\frac{\int PR^2dx}{\int PR^3dx} &= \frac{b+2\beta}{a+2\alpha} + \frac{(c+2\gamma)\int PR^4dx}{(a+2\alpha)\int PR^3dx} \\
\frac{\int PR^3dx}{\int PR^4dx} &= \frac{b+3\beta}{a+3\alpha} + \frac{(c+3\gamma)\int PR^5dx}{(a+3\alpha)\int PR^4dx} \\
&\qquad etc
\end{aligned}$$

wird, indem jeder Wert in der vorhergehenden Gleichung eingesetzt wird, gelten

$$\frac{\int Pdx}{\int PRdx} = \frac{b}{a} + \cfrac{c:a}{\cfrac{b+\beta}{a+\alpha} + \cfrac{(c+\gamma):(a+\alpha)}{\cfrac{b+2\beta}{a+2\alpha} + \cfrac{(c+2\gamma):(a+2\alpha)}{\cfrac{b+3\beta}{a+3\alpha} + \cfrac{(c+3\gamma):(a+3\alpha)}{\cfrac{b+4\beta}{a+4\alpha} + \text{etc}}}}}$$

Dieser Ausdruck geht aber invertiert und von Teilbrüchen befreit über in diesen

$$\frac{\int PRdx}{\int Pdx} = \cfrac{a}{b + \cfrac{(a+\alpha)c}{b+\beta + \cfrac{(a+2\alpha)(c+\gamma)}{b+2\beta + \cfrac{(a+3\alpha)(c+2\gamma)}{b+3\beta + \cfrac{(a+4\alpha)(c+3\gamma)}{b+4\beta+\text{etc}}}}}}$$

§51 Wenn nun, während n auch eine negative Zahl bezeichnet, galt

$$(a+n\alpha)\int PR^n dx = (b+n\beta)\int PR^{n+1}dx + (c+n\gamma)\int PR^{n+2}dx$$

wird man die folgenden Gleichungen haben:

$$\begin{aligned}
(a-\alpha)\int\frac{Pdx}{R} &= (b-\beta)\int Pdx + (c-\gamma)\int PRdx\\
(a-2\alpha)\int\frac{Pdx}{R^2} &= (b-2\beta)\int\frac{Pdx}{R} + (c-2\gamma)\int Pdx\\
(a-3\alpha)\int\frac{Pdx}{R^3} &= (b-3\beta)\int\frac{Pdx}{R^2} + (c-3\gamma)\int\frac{Pdx}{R}\\
(a-4\alpha)\int\frac{Pdx}{R^4} &= (b-4\beta)\int\frac{Pdx}{R^3} + (c-4\gamma)\int\frac{Pdx}{R^2}\\
&\qquad etc
\end{aligned}$$

Daher wird in gleicher Weise erhalten werden

$$\begin{aligned}
\frac{\int PRdx}{\int Pdx} &= \frac{-(b-\beta)}{c-\gamma} + \frac{(a-\alpha)\int Pdx : R}{(c-\gamma)\int Pdx}\\
\frac{\int Pdx}{\int Pdx : R} &= \frac{-(b-2\beta)}{c-2\gamma} + \frac{(a-2\alpha)\int Pdx : R^2}{(c-2\gamma)\int Pdx : R}\\
\frac{\int Pdx : R}{\int Pdx : R^2} &= \frac{-(b-3\beta)}{c-3\gamma} + \frac{(a-3\alpha)\int Pdx : R^3}{(c-3\gamma)\int Pdx : R^2}\\
&\qquad etc
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen wird aber hervorgebracht werden

$$\frac{\int PRdx}{\int Pdx} = \frac{-(b-\beta)}{c-\gamma} + \cfrac{(a-\alpha):(c-\gamma)}{\cfrac{-(b-2\beta)}{c-2\gamma} + \cfrac{(a-2\alpha):(c-2\gamma)}{\cfrac{-(b-3\beta)}{c-3\gamma} + \cfrac{(a-3\alpha):(c-3\gamma)}{\cfrac{-(b-4\beta)}{c-4\gamma} + \text{etc}}}}$$

oder nach Wegschaffen der Teilbrüche

$$\frac{(c-\gamma)\int PRdx}{\int Pdx} = -(b-\beta) + \cfrac{(a-\alpha)(c-2\gamma)}{-(b-2\beta) + \cfrac{(a-2\alpha)(c-3\gamma)}{-(b-3\beta) + \cfrac{(a-3\alpha)(c-4\gamma)}{-(b-4\beta) + \text{etc}}}}$$

Man hat also zwei Kettenbrüche, deren beider selber Wert $\frac{\int PRdx}{\int Pdx}$ ist.

§52 Es ist aber bei dieser Aufgabe wesentlich, dass geeignete anstelle von P und R einzusetzende Funktionen von x bestimmt werden, damit gilt

$$(a+n\alpha)\int PR^n dx = (b+n\beta)\int PR^{n+1}dx + (c+n\gamma)\int PR^{n+2}dx$$

zumindest in dem Fall, in welchem nach den Integrationen $x=1$ gesetzt wird. Wir wollen also festlegen, dass allgemein gilt

$$(a+n\alpha)\int PR^n dx + R^{n+1}S = (b+n\beta)\int PR^{n+1}dx + (c+n\gamma)\int PR^{n+2}dx$$

und $R^{n+1}S$ eine Funktion solcher Art von x ist, die so für $x=0$, wie $x=1$ verschwinde. Nach Nehmen von Differentialen und Division durch R^n wird also gelten

$$(a+n\alpha)Pdx + RdS + (n+1)SdR = (b+n\beta)PRdx + (c+n\gamma)PR^2dx$$

welche Gleichung, weil sie immer Geltung haben muss, was auch immer n ist, in diese zwei Gleichungen aufgelöst wird

$$aPdx + RdS + SdR = bPRdx + cPR^2dx$$

und

$$\alpha Pdx + SdR = \beta PRdx + \gamma PR^2dx$$

Aus diesen Gleichungen findet man auf doppelte Weise

$$Pdx = \frac{Rds + SdR}{bR + cR^2 - a} = \frac{SdR}{\beta R + \gamma R^2 - \alpha}$$

woher wird

$$\frac{dS}{S} = \frac{(b-\beta)RdR + (c-\gamma)R^2dR - (a-\alpha)dR}{\beta R^2 + \gamma R^3 - \alpha R}$$

$$= \frac{(a-\alpha)dR}{\alpha R} + \frac{(\alpha b - \beta a)dR + (\alpha c - \gamma a)RdR}{\alpha(\beta R + \gamma R^2 - \alpha)}$$

Aus dieser Gleichung wird also S durch R bestimmt; aber nach Finden von S wird gelten

$$P = \frac{SdR}{(\beta R + \gamma R^2 - \alpha)dx}$$

und daher werden die Formeln $\int Pdx$ und $\int PRdx$ bekannt sein, mit welchen der Wert der oberen Kettenbrüche bestimmt wird.

§53 Weil also die Größe R nicht über x definiert wird, wird für sie irgendeine Funktion von x angenommen werden können. Aber weil die Bedingung der Frage verlangt, dass $R^{n+1}S$ so für $x = 0$ wie $x = 1$ verschwindet, wird damit selbst die Natur der anstelle von R einzusetzenden Funktion bestimmt. Des Weiteren ist aber auch darauf zu achten, dass die Integrale $\int PR^n dx$, wenn nach der Integration $x = 1$ gesetzt wird, einen endlichen Wert erhalten; wenn die Integrale nämlich in diesem Fall entweder 0 oder ∞ werden würden, dann würde der Wert $\frac{\int PRdx}{\int Pdx}$ nur schwer errechnet werden. Der erste Umstand wird am sichersten vermieden, indem R ein Wert solcher Art zugeteilt wird, dass PR^n niemals einen negativen Wert annimmt, solange x innerhalb der Grenzen 0 und 1 liegt. Es wird aber gefällig sein, die Fälle in denen n eine entweder positive oder negative Zahl bezeichnet, voneinander zu trennen, weil oftmals, wenn diesen Bedingungen für eine positive Zahl n Genüge geleistet wird, zugleich den übrigen Fällen nicht Genüge getan werden kann. Wenn aber die vorgeschriebenen Bedingungen nur in den Fällen erfüllt werden, in denen n eine positive Zahl ist, dann kann nur der Wert des ersten Kettenbruches dargeboten werden, der des zweiten hingegen nur, wenn den Bedingungen genügt war, während n eine negative Zahl ist.

§54 Wir wollen die Entwicklung dieser Methode Kettenbrüche zu finden, mit den schon zuvor behandelten Beispielen beginnen, und es sie freilich zuerst dieser Kettenbruch vorgelegt

$$r + \cfrac{fh}{r + \cfrac{(f+r)(h+r)}{r + \cfrac{(f+2r)(h+2r)}{r + \text{etc}}}}$$

dessen Wert oben in §34 als dieser angegeben worden ist

$$\frac{h(f-r)\int y^{h+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}} - f(h-r)\int y^{f+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{f\int y^{f+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}} - h\int y^{h+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

Man vergleiche also diesen Kettenbruch mit diesem allgemeinen

$$\frac{a\int Pdx}{\int PRdx} = b + \cfrac{(a+\alpha)c}{b+\beta + \cfrac{(a+2\alpha)(c+\gamma)}{b+2\beta + \cfrac{(a+3\alpha)(c+2\gamma)}{b+3\beta + \text{etc}}}}$$

und es wird gelten

$$b = r, \quad \beta = 0, \quad \alpha = r, \quad \gamma = r, \quad a = f - r, \quad c = h$$

Nach Einsetzen dieser Werte wird entspringen

$$\frac{dS}{S} = \frac{rRdR + (h-r)R^2dR - (f-2r)dR}{rR^3 - rR} = \frac{(f-2r)dR}{rR} + \frac{rdR + (h-f+r)RdR}{r(R^2-1)}$$

und durch Integration

$$\ln(S) = \frac{f-2r}{r}\ln(R) + \frac{h-f}{2r}\ln(R+1) + \frac{h-f+2r}{2r}\ln(R-1) + \ln(C)$$

oder

$$S = CR^{\frac{f-2r}{r}}(R^2-1)^{\frac{h-f}{2r}}(R-1)$$

Daher wird also gelten

$$R^{n+1}S = CR^{\frac{f+(h+1)r}{r}}(R^2-1)^{\frac{h-f}{2r}}(R-1)$$

sowie

$$Pdx = \frac{CR^{\frac{f-2r}{r}}(R^2-1)^{\frac{h-f}{2r}}dR}{r(R+1)}$$

§55 Weil aber $R^{n+1}S$ in zwei Fällen verschwinden muss, so für $x = 0$ wie $x = 1$, welche positive Zahl auch immer anstelle von n eingesetzt wird (auf negative Werte von n zu achten ist nicht nötig), wollen festlegen, dass f, h und r positive Zahlen sind und $h > f$ ist, was sicher angenommen werden darf, wenn nicht $f = h$ ist, des Weiteren sei auch $f > r$. Nach Festlegen dieser Dinge ist es offenbar, dass die Formel $R^{n+1}S$ in zwei Fällen verschwindet, natürlich wenn $R = 0$ und $R = 1$ ist; und dies hat auch Geltung, wenn $f = h$ ist. Solange also $f > r$ ist, wird $R = x$ gesetzt werden können und gelten

$$Pdx = \frac{x^{\frac{f-2r}{r}}(1-x^2)^{\frac{h-f}{2r}}dx}{1+x}$$

nach Bestimmen der Konstante C. Aus diesen wird deshalb der Wert des vorgelegten Kettenbruches dieser sein

$$= (f-r)\frac{\int \frac{x^{\frac{f-2r}{r}}(1-x^2)^{\frac{h-f}{2r}}dx}{1+x}}{\int \frac{x^{\frac{f-r}{r}}(1-x^2)^{\frac{h-f}{2r}}dx}{1+x}}$$

Für $x = y^r$ gesetzt, wird aber der gesuchte Wert dieser sein

$$= \frac{(f-r)\int y^{f-r-1}(1-y^{2r})^{\frac{h-f}{2r}}dy : (1+y^r)}{\int y^{f-1}(1-y^{2r})^{\frac{h-f}{2r}}dy : (1+y^r)}$$

§56 Wir haben also einen anderen den Wert dieses Kettenbruches

$$r + \cfrac{fh}{r + \cfrac{(f+r)(h+r)}{r + \text{etc}}}$$

enthaltenen Ausdruck erhalten, der, auch wenn er Integralformeln in sich umfasst, dennoch vom zuvor gefundenen Ausdruck abweicht. Denn dieser letzte Ausdruck hat nur Geltung, wenn $f > r$ ist; für h muss aber die größere der zwei Größen f und h angenommen werden, wenn sie freilich gleich waren. Aber wenn dennoch auch f kleiner war als r, kann der Wert des Kettenbruches dargeboten werden, indem dieser betrachtet wird

$$r + \cfrac{(f+r)(h+r)}{r + \cfrac{(f+2r)(h+2r)}{r + \text{etc}}}$$

deren Wert sein wird

$$= \frac{f\int y^{f-1}(1-y^{2r})^{\frac{h-f}{2r}}dy : (1+y^r)}{\int y^{f+r-1}(1-y^{2r})^{\frac{h-f}{2r}}dy : (1+y^r)}$$

der keiner Einschränkung bedarf. Denn, nachdem dieser Wert $= V$ gesetzt worden ist, wird der Wert des vorgelegten Kettenbruches $= r + \frac{fh}{V}$ sein.

§57 Jener Fall, in dem $f = h$ ist, der zuvor auf eigene Art gefunden worden war und sein Wert in §34 gefunden worden war als

$$= \frac{1-(h-r)\int x^{h-1}dx : (1+x^r)}{\int x^{h-1}dx : (1+x^r)} = \frac{(h-r)\int x^{h-r-1}dx : (1+x^r)}{\int x^{h-1}dx : (1+x^r)}$$

entspringt aus diesem letzten Ausdruck von selbst; denn für $f = h$ wird der in §55 gefundene Ausdruck in diesen übergehen

$$\frac{(h-r)\int y^{h-r-1}dy : (1+y^r)}{\int y^{h-1}dy : (1+y^r)}$$

- ganz und gar denselben, woher die Übereinstimmung jener beiden allgemeinen Ausdrücke zur Genüge erkannt wird. Hier lässt sich aber schon annehmen, dass $h > r$ ist, weil die Fälle, in denen dies nicht passiert, sehr leicht auf die zurückgeführt werden, wie es gerade bewiesen worden ist.

§58 Damit aber die Übereinstimmung in jedem Fall eingesehen wird, haben wir dieses Lemma vorauszuschicken, was von anderen schon bewiesen worden ist. Wenn aber galt

$$1 + \frac{p}{q+s} + \frac{p(p+s)}{(q+s)(q+2s)} + \frac{p(p+s)(p+2s)}{(q+s)(q+2s)(q+3s)} + \text{etc}$$

in welcher die Größen p,q und s positiv und $q > p$ ist, wird die Summe dieser ins Unendliche fortgesetzten Reihe $= \frac{q}{q-p}$ sein. Die Gültigkeit dieses Lemmas kann aber durch meine allgemeine Methode Reihen zu summieren, dargetan werden. Man betrachte nämlich diese Reihe

$$x^q + \frac{p}{q+s}x^{q+s} + \frac{p(p+s)}{(q+s)(q+2s)}x^{q+2s} + \text{etc}$$

deren Summe man z nenne, und es wird durch Differenzieren gelten

$$\frac{dz}{dx} = qx^{q-1} + px^{q+s-1} + \frac{p(p+s)}{q+s}x^{q+2s-1} + \text{etc}$$

sowie

$$x^{p-q-s}dz = qx^{p-s-1}dx + px^{p-1}dx + \frac{p(p+s)}{q+s}x^{p+s-1}dx + \text{etc}$$

welche Gleichung integriert gibt

$$\int x^{p-q-s}dz = \frac{qx^{p-s}}{p-s} + x^p + \frac{px^{p+s}}{q+s} + \text{etc} = \frac{qx^{p-s}}{p-s} + x^{p-q}z$$

Aus dieser Gleichung wird differenziert diese hervorgehen

$$x^{p-q-z}dz = qx^{p-s-1}dx + x^{p-q}dz + (p-q)x^{p-q-1}zdx$$

oder

$$dz(1-x^s) + (q-p)x^{s-1}zdx = qx^{q-1}dx$$

oder

$$dz + \frac{(q-p)x^{s-1}zdx}{1-x^s} = \frac{qx^{q-1}dx}{1-x^s}$$

deren Integral dieses ist

$$\frac{z}{(1-x^s)^{\frac{q-p}{s}}} = q\int \frac{x^{q-1}dx}{(1-x^s)^{\frac{q-p+s}{s}}} = \frac{qx^q}{(q-p)(1-x^s)^{\frac{q-p}{s}}} - \frac{qp}{q-p}\int \frac{x^{q-1}dx}{(1-x^s)^{\frac{q-p}{s}}}$$

woher gelten wird

$$z = \frac{qx^q}{q-p} - \frac{pq(1-x^s)^{\frac{q-p}{s}}}{q-p}\int \frac{x^{q-1}dx}{(1-x^s)^{\frac{q-p}{s}}}$$

Daher wird für $x = 1$ gelten

$$z = \frac{q}{q-p} = 1 + \frac{p}{q+s} + \frac{p(p+s)}{(q+s)(q+2s)} + \text{etc}$$

welches der Beweis des gegebenen Lemmas ist, aus welchem zugleich eingesehen wird, dass die Gültigkeit des Lemmas nur besteht, wenn $q > p$.

§59 Weil wir also den Wert dieses Kettenbruches

$$r + \cfrac{fh}{r + \cfrac{(f+r)(h+r)}{r + \cfrac{(f+2r)(h+2r)}{r + \text{etc}}}}$$

auf doppelte Weise ausgedrückt haben, von denen der eine dieser ist

$$= \frac{h(f-r)\int y^{h+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}} - f(h-r)\int y^{f+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{f\int y^{f+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}} - h\int y^{h+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

der andere hingegen, der in §56 gefunden worden ist

$$= r + \frac{h\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f}{2r}} : (1+y^r)}{\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f}{2r}} : (1+y^r)}$$

wird es der Mühe wert sein, die Übereinkunft aufzuzeigen. Weil also gilt

$$\frac{1}{1+y^r} = \frac{1-y^r}{1-y^{2r}}$$

wird gelten

$$\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f}{2r}} : (1+y^r) = \int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}} - \int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}}$$

sowie

$$\begin{aligned} &\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f}{2r}} : (1+y^r) \\ &= \int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}} - \int y^{f+2r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}} \\ &= \int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}} - \frac{f}{h}\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}} \end{aligned}$$

Man setze

$$\frac{\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}}}{\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}}} = V$$

der Wert des letzten Kettenbruches wird dieser sein

$$= r + \frac{hV-f}{1-V}$$

Man setze außerdem

$$\frac{\int y^{h+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{f+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}} = W$$

der erste Wert wird dann dieser sein

$$= \frac{h(f-r)W - f(h-r)}{f-hW}$$

aus deren Gleichheit folgt, dass gelten wird

$$V = \frac{f}{hW}$$

so dass gilt

$$\frac{\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}}}{\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}}} = \frac{f\int y^{f+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{h\int y^{h+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

die Begründung welcher Gleichheit mit den in der vorhergehenden Dissertation dargebotenen Lehrsätze feststeht; es gilt nämlich nach einem aus jenen Lehrsätzen

$$\frac{\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}}}{\int y^{f+2r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}}} = \frac{\int y^{f+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{h+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

§60 Wir wollen nun diesen Kettenbruch betrachten

$$2r+\cfrac{fh}{2r+\cfrac{(f+r)(h+r)}{2r+\cfrac{(f+2r)(h+2r)}{2r+\text{etc}}}}$$

dessen Wert oben in §35 gefunden worden ist als

$$=\frac{2(f-r)(h-r)\int y^{f-1}dy:\sqrt{1-y^{2r}}-h(f+h-3r)\int y^{h+r-1}dy:\sqrt{1-y^{2r}}}{2h\int y^{h+r-1}dy:\sqrt{1-y^{2r}}-(f+h-r)\int y^{f-1}dy:\sqrt{1-y^{2r}}}$$

Wenn nun dieser Kettenbruch mit diesem verglichen wird

$$\frac{a\int Pdx}{\int PRdx}=b+\cfrac{(a+\alpha)c}{b+\beta+\cfrac{(a+2\alpha)(c+\gamma)}{b+2\beta+\cfrac{(a+3\alpha)(c+2\gamma)}{b+3\beta}}}\text{etc}$$

wird gelten

$$b=2r,\quad \beta=0,\quad \alpha=r,\quad \gamma=r,\quad a=f-r,\quad \text{und}\quad c=h$$

Daher wird man also aus §52 haben

$$\frac{dS}{S}=\frac{(f-2r)dR}{rR}+\frac{2rdR+(h-f+r)RdR}{r(R^2-1)}$$

und durch integrieren

$$S=CR^{\frac{f-2r}{2r}}(R^2-1)^{\frac{h-f-r}{2r}}(R-1)^2$$

woher wird

$$Pdx=\frac{C}{r}R^{\frac{f-2r}{r}}(R^2-1)^{\frac{h-f-3r}{2r}}(R-1)^2dR$$

und

$$R^{n+1}S=CR^{\frac{f+(n+1)r}{r}}(R^2-1)^{\frac{h-f-r}{2r}}(R-1)^2$$

welcher Ausdruck in zwei Fällen verschwindet, einmal für $R=0$ einmal $R=1$, es sei nur $f>r$ und $h-3r>f$, welchen Bedingungen immer Genüge geleistet werden kann.

§61 Es sei also $R = x$ und nach Bestimmung der Konstante C wird gelten

$$Pdx = x^{\frac{f-2r}{r}} dx(1-x^2)^{\frac{h-f-3r}{2r}}(1-x)^2$$

oder für $R = x = y^r$ wird gelten

$$Pdx = y^{f-r-1} dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-3r}{2r}}(1-y^r)^2$$

aus welchem der Wert des vorgelegten Kettenbruches

$$\frac{a\int Pdx}{\int PRdx} = \frac{(f-r)\int y^{f-r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-3r}{2r}}(1-y^r)^2}{\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-3r}{2r}}(1-y^r)^2}$$

welcher durch die Lehrsätze der oberen Abhandlung auf die erste Form rückgeführt werden wird, indem das Quadrat $(1-y^r)^2$ entwickelt wird, wonach jeder der beiden Integralformeln in zwei einfachere aufgelöst werden wird. Diese Reduktion selbst werde ich aber am folgenden sich weiter erstreckenden Beispiel aufzeigen.

§62 Wenn man diese Integralformel hat

$$\int y^{m-1}dy(1-y^{2r})^{\chi}(1-y^r)^n$$

und $(1-y^r)^n$ in diese Reihe aufgelöst

$$1 - ny^r + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}y^{2r} - \text{etc}$$

wird, indem man alle zweiten Terme dieser nimmt, wird die vorgelegte Integralformel auf die zwei folgenden zurückgeführt werden

$$\int y^{m-1}dy(1-y^{2r})^{\chi}\left(1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{m}{p} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{m(m+2r)}{p(p+2r)} + \text{etc}\right)$$

$$-\int y^{m+r-1}dy(1-y^{2r})^{\chi}\left\{\begin{array}{c} n + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\dfrac{m+r}{p+r} \\ +\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\dfrac{(m+r)(m+3r)}{(p+r)(p+3r)} + \text{etc}\end{array}\right\}$$

nachdem der Kürze wegen festgelegt worden ist

$$m + 2\chi r + 2r = p$$

Daher, wenn wie im vorhergehenden Fall $n = 2$ war, wird sein

$$\int y^{m-1}dy(1-y^{2r})^{\chi}(1-y^r)^2 = \frac{m+p}{p}\int y^{m-1}dy(1-y^{2r})^{\chi} - 2\int y^{m+r-1}dy(1-y^{2r})^{\chi}$$

Daher wird man haben

$$\frac{a\int Pdx}{\int PRdx} = \frac{\frac{(f-r)(f+h-3r)}{h-2r}\int y^{f-r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-3r}{2r}} - 2(f-r)\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-3r}{2r}}}{\frac{f+h+r}{h-r}\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-3r}{2r}} - 2\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-3r}{2r}}}$$
$$= \frac{h(f+h-3r)\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-r}{2r}} - 2(f-r)(h-r)\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-r}{2r}}}{(f+h-r)\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-r}{2r}} - 2h\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-r}{2r}}}$$

welcher Ausdruck, weil er jenem gleich sein muss, der oben in §35 gefunden worden ist, diese Gleichung gibt

$$\frac{\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-r}{2r}}}{\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-r}{2r}}} = \frac{\int y^{h+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{f-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

die Begründung für welches Verhältnis freilich in den Lehrsätzen der oberen Dissertation enthalten ist.

§63 Wir wollen nun umgekehrt für P und R gegebene Werte nehmen und aus ihnen Kettenbrüche bilden und wollen festlegen

$$P = x^{m-1}(1-x^r)^n(p+qx^r)^{\chi} \quad \text{und} \quad R = x^r$$

Weil aber gelten muss

$$(a+\nu\alpha)\int PR^{\nu}dx = (b+\nu\beta)\int PR^{\nu+1}dx + (c+\nu\gamma)\int PR^{\nu+2}dx$$

und daher wegen der gegebenen P und R aus §52 wird

$$S = \frac{1}{r}x^{m-r}(1-x^r)^n(p+qx^r)^{\chi}(\gamma x^{2r}+\beta x^r-\alpha)$$

wird gelten

$$\frac{dS}{S} = \frac{(m-r)dx}{x} + \frac{nrx^{r-1}dx}{-1+x^r} + \frac{\chi qrx^{r-1}dx}{p+qx^r} + \frac{2\gamma rx^{2r-1}dx+\beta rx^{r-1}dx}{\gamma x^{2r}+\beta x^r-\alpha}$$
$$= \frac{(a-\alpha)rdx}{\alpha x} + \frac{(\alpha b-\beta a)rx^{r-1}dx + (\alpha c-\gamma a)rx^{2r-1}dx}{\alpha(\gamma x^{2r}+\beta x^r-\alpha)}$$

Es sei nun

$$(p + qx^r)(x^r - 1) = \gamma x^{2r} + \beta x^r - \alpha$$

es wird gelten

$$\gamma = q, \quad \beta = p - q \quad \text{und} \quad \alpha = p$$

Es sei außerdem

$$\frac{(a - \alpha)r}{\alpha} = m - r$$

es wird gelten

$$a = \frac{mp}{r}$$

Daher wird weiter gelten müssen

$$nqr + \chi qr + 2qr = \frac{cpr - mpq}{p}$$

oder

$$c = \frac{mq}{r} + nq + (\chi + 2)q$$

und schließlich

$$b = \frac{m(p - q)}{r} + (n + 1)p - (\chi + 1)q$$

Solange also m und $m + 1$ positive Zahlen waren, damit $R^{\nu+1}S$ so für $x = 0$ wie $x = 1$ verschwindet, wird der folgende Ausdruck hervorgehen

$$\frac{\int x^{m+r-1}dx(1 - x^r)^n(p + qx^r)^\chi}{\int x^{m-1}dx(1 - x^r)^n(p + qx^r)^\chi} = \frac{\int PRdx}{\int Pdx}$$

der deshalb diesem Kettenbruch gleich sein wird

$$\cfrac{mp}{m(p - q) + (n + 1)pr - (\chi + 1)qr + \cfrac{pq(m + r)(m + nr + (\chi + 2))r}{m(p - q) + (n + 2)pr - (\chi + 2)qr + \cfrac{pq(m + 2r)(m + (n + 1)r + (\chi + 2))r}{m(p - q) + (n + 3)pr - (\chi + 3)qr + \text{etc}}}}$$

§64 Damit aber dieser Kettenbruch eine einfachere Form annimmt, setze man

$$m + nr + r = a, \quad m + \chi r + r = b \quad \text{und} \quad m + nr + \chi r + r$$

wird werden

$$\chi = \frac{c-a}{r}, \quad n = \frac{c-b}{r} \quad \text{und} \quad m = a + b - c - r$$

und daher wird gelten

$$\cfrac{p(a+b-c-r)}{ap - bq + \cfrac{pq(a+b-c)(c+r)}{(a+r)p - (b+r)q + \cfrac{pq(a+b-c+r)(c+2r)}{(a+2r)p - (b+2r)q + \cfrac{pq(a+b-c+2r)(c+3r)}{(a+3r)p - (b+3r)q + \text{etc}}}}}$$

$$= \frac{\int x^{a+b-c-1}dx(1-x^r)^{\frac{c-b}{r}}(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}{\int x^{a+b-c-r-1}dx(1-x^r)^{\frac{c-b}{r}}(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}$$

wenn nach jeder der beiden Integrationen $x = 1$ gesetzt wird. Es wird aber verlangt, dass

$$a + b - c - r \quad \text{und} \quad c - b + r$$

positive Zahlen sind. Wenn aber der Kürze wegen festgelegt wird

$$a + b - c - r = g$$

wird gelten

$$\frac{\int x^{g+r-1}dx(1-x^r)^{\frac{c-b}{r}}(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}{\int x^{g-1}dx(1-x^r)^{\frac{c-b}{r}}(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}$$

$$= \cfrac{pg}{ap - bq + \cfrac{pq(c+r)(g+r)}{(a+r)p - (b+r)q + \cfrac{pq(c+2r)(g+2r)}{(a+2r)p - (b+2r)q + \text{etc}}}}$$

welche Gleichung sich sehr weit erstreckt und bisher gefundenen Kettenbrüche in sich umfasst.

§65 Wenn die Größen c und g miteinander vertauscht werden, wird der folgende Kettenbruch hervorgehen

$$\cfrac{pc}{ap-bq+\cfrac{pq(c+r)(g+r)}{(a+r)p-(b+r)q+\cfrac{pq(c+2r)(g+2r)}{(a+2r)p-(b+2r)q+\text{etc}}}}$$

dessen Wert daher dieser sein wird

$$=\frac{\int x^{c+r-1}dx(1-x^r)^{\frac{g-b}{r}}(p+qx^r)^{\frac{g-a}{r}}}{\int x^{c-1}dx(1-x^r)^{\frac{g-b}{r}}(p+qx^r)^{\frac{g-a}{r}}}$$

Daher weil diese Kettenbrüche ein gegebenes Verhältnis haben, natürlich g zu c, wird daher der folgende Lehrsatz entspringen, nachdem anstelle von g wieder sein Wert eingesetzt worden ist,

$$\frac{c\int x^{a+b-c-1}dx(1-x^r)^{\frac{c-b}{r}}(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}{\int x^{a+b-c-r-1}dx(1-x^r)^{\frac{c-b}{r}}(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}$$

$$=\frac{(a+b-c-r)\int x^{c+r-1}dx(1-x^r)^{\frac{a-c-r}{r}}(p+qx^r)^{\frac{b-c-r}{r}}}{\int x^{c-1}dx(1-x^r)^{\frac{a-c-r}{r}}(p+qx^r)^{\frac{b-c-r}{r}}}$$

In dieser sehr umfassenden Form sind sehr viele besondere Reduktionen enthalten. Es sei eines Beispiels wegen $b=c+r$; es wird gelten

$$\frac{c\int x^{a+r-1}dx(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}:(1-x^r)}{\int x^{a-1}dx(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}:(1-x^r)}=\frac{a\int x^{c+r-1}dx(1-x^r)^{\frac{a-c-r}{r}}}{\int x^{c-1}dx(1-x^r)^{\frac{a-c-r}{r}}}=c$$

woher folgt, dass gelten wird

$$\int\frac{x^{a+r-1}dx(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}{1-x^r}=\int\frac{x^{a-1}dx(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}{1-x^r}$$

Man wird also diesen sich sehr weit erstreckenden Lehrsatz haben

$$\int\frac{x^{m-1}dx(p+qx^r)^{\chi}}{1-x^r}=\int\frac{x^{n-1}dx(p+qx^r)^{\chi}}{1-x^r}$$

wo immer, nachdem die Integrationen so ausgeführt worden sind, dass die Integrale für $x=0$ verschwinden, verstanden wird, dass $x=1$ wird. Es ist aber allein der Fall ausgenommen, in dem $q+p=0$ ist, in welchem die Unannehmlichkeit auftritt.

§66 Aber die Kettenbrüche, die wir bisher mithilfe von Interpolationen gefunden haben, gehen darauf zurück, dass die Teilnenner konstant sind. Um also die nun gefundene allgemeine Form auf sie zu übertragen, setze man $q = p = 1$ und es wird dieser Kettenbruch hervorgehen

$$\cfrac{cg}{a-b+\cfrac{(c+r)(g+r)}{a-b+\cfrac{(c+2r)(g+2r)}{a-b+\cfrac{(c+3r)(g+3r)}{a-b+\text{etc}}}}} = \frac{c\int x^{g+r-1}dx(1-x^r)^{\frac{c-b}{r}}(1+x^r)^{\frac{c-a}{r}}}{\int x^{g-1}dx(1-x^r)^{\frac{c-b}{r}}(1+x^r)^{\frac{c-a}{r}}}$$

oder der Wert desselben wird auch dieser sein

$$= \frac{g\int x^{c+r-1}dx(1-x^r)^{\frac{g-b}{r}}(1+x^r)^{\frac{g-a}{r}}}{\int x^{c-1}dx(1-x^r)^{\frac{g-b}{r}}(1+x^r)^{\frac{g-a}{r}}}$$

mit $g = a + b - c - r$. Man setze

$$a - b = s$$

wegen

$$a + b = c + g + r$$

wird gelten

$$a = \frac{c+g+r+s}{2} \quad \text{und} \quad b = \frac{c+g+r-s}{2}$$

woher werden wird

$$\cfrac{cg}{s+\cfrac{(c+r)(g+r)}{s+\cfrac{(c+2r)(g+2r)}{s+\text{etc}}}}$$

$$= \frac{c\int x^{g+r-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{c-g-r-s}{2r}}(1-x^r)^{\frac{s}{r}}}{\int x^{g-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{c-g-r-s}{2r}}(1-x^r)^{\frac{s}{r}}} = \frac{g\int x^{c+r-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{g-c-r-s}{2r}}(1-x^r)^{\frac{s}{r}}}{\int x^{c-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{g-c-r-s}{2r}}(1-x^r)^{\frac{s}{r}}}$$

§67 Wir wollen, um zur Form in §47 zu gelangen, $2s$ anstelle von s setzen und es sei $c = q$ und $g = r - q$; man wird diesen Kettenbruch haben

$$\cfrac{q(r-q)}{2s + \cfrac{(q+r)(2r-q)}{2s + \cfrac{(q+2r)(3r-q)}{2s + \text{etc}}}}$$

dessen Wert also dieser sein wird

$$= \frac{q \int x^{2r-q-1} dx (1-x^{2r})^{\frac{q-r-s}{r}} (1-x^r)^{\frac{2s}{r}}}{\int x^{r-q-1} dx (1-x^{2r})^{\frac{q-r-s}{r}} (1-x^r)^{\frac{2s}{r}}}$$

oder

$$= \frac{(r-q) \int x^{q+r-1} dx (1-x^{2r})^{\frac{-q-s}{r}} (1-x^r)^{\frac{2s}{r}}}{\int x^{q-1} dx (1-x^{2r})^{\frac{-q-s}{r}} (1-x^r)^{\frac{2s}{r}}}$$

Der Wert desselben Kettenbruches ist aber zuvor gefunden worden als

$$= \frac{(q+s) \int y^{r+s+q-1} dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{r+s-q-1} dy : \sqrt{1-y^{2r}}} - s$$

Deswegen werden diese Integralformeln einander gleich sein; dieser Lehrsatz ist keineswegs zu verachten.

§68 Es sei, wie wir in §48 festgelegt haben, $r = 2$ und $q = 1$; es wird gelten

$$\frac{(1+s) \int y^{s+2} dy : \sqrt{1-y^4}}{\int y^s dy : \sqrt{1-y^4}} - s = \frac{\int x^2 dx (1-x^4)^{\frac{-s-1}{2}} (1-x^2)^s}{\int dx (1-x^4)^{\frac{-s-1}{2}} (1-x^2)^s}$$

welche Gleichheit ersichtlich ist, wenn $s = 0$ ist; aber auch in den Fällen, in denen s eine ganze ungerade Zahl ist, wird die Gleichheit nicht schwer gezeigt. Wie wenn $s = 1$ war, wird die zweite Formel werden

$$\frac{\int xxdx : (1+xx)}{\int dx : (1+xx)} = \frac{x - \int dx : (1+xx)}{\int dx : (1+xx)} = \frac{4-\pi}{\pi}$$

nachdem $x = 1$ gesetzt wird. Die erste Formel wird hingegen geben

$$\frac{2 \int y^3 dy : \sqrt{1-y^4}}{\int y dy : \sqrt{1-y^4}} - 1 = \frac{4}{\pi} - 1 = \frac{4-\pi}{\pi}$$

völlig wie die vorhergehende. Aber wenn s eine ungerade Zahl ist, wird durch Vereinfachen der Potenz $(1-xx)^s$ die Übereinkunft der beiden Ausdrücke leicht erkannt werden.

§69 Außer den bisher gefundenen Kettenbrüchen umfasst die gefundene allgemeine Form unzählige andere in sich, von welchen es gefällig sein wird einige zu entwickeln. Es sei also $g = c$ und der Wert dieses Kettenbruches

$$\cfrac{c^2}{s + \cfrac{(c+r)^2}{s + \cfrac{(c+2r)^2}{s + \text{etc}}}}$$

wird dieser sein

$$\frac{c\int x^{c+r-1}dx(1-x^r)^{\frac{s}{r}} : (1-x^{2r})^{\frac{r+s}{2r}}}{\int x^{c-1}dx(1-x^r)^{\frac{s}{r}} : (1-x^{2r})^{\frac{r+s}{2r}}}$$

Man setze $c = 1$ und $r = 1$ und es wird gelten

$$\cfrac{1}{s + \cfrac{4}{s + \cfrac{9}{s + \cfrac{16}{s + \text{etc}}}}} = \frac{\int xdx(1-x)^s : (1-xx)^{\frac{s+1}{2}}}{\int dx(1-x)^s : (1-xx)^{\frac{s+1}{2}}}$$

die Werte welches Ausdruckes, welche er für die verschiedenen Bedeutungen von s annimmt, wir ausfindig machen wollen. Nachdem also der Wert dieses Ausdruckes $= V$ gesetzt worden ist, wird es sich verhalten wir folgt:
ist $s = 0$,

$$V = \frac{\int xdx : \sqrt{1-xx}}{\int dx : \sqrt{1-xx}} = \frac{1}{2\int dy : (1+yy)}$$

ist $s = 2$,

$$V = \frac{2\int dx : \sqrt{1-xx} - 3\int xdx : \sqrt{1-xx}}{2\int xdx : \sqrt{1-xx} - \int dx : \sqrt{1-xx}} = \frac{1}{2\int y^2dx : (1+yy)} - 2$$

ist $s = 4$,

$$V = \frac{19\int xdx : \sqrt{1-xx} - 12\int dx : \sqrt{1-xx}}{3\int dx : \sqrt{1-xx} - 4\int xdx : \sqrt{1-xx}} = \frac{1}{2\int y^4dy : (1+yy)} - 4$$

Allgemein wird aber gelten

$$V = \frac{1}{2\int y^s dy : (1+yy)} - s$$

aus welcher Form klar wird, wenn s eine gerade ganze Zahl war, dass sie die Quadratur des Kreises involviert, andernfalls, für ungerades s, Logarithmen.

§70 Es sei uns nun dieser Kettenbruch vorgelegt

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{4}{3+\cfrac{9}{4+\cfrac{16}{5+\cfrac{25}{6+\text{etc}}}}}}$$

Man vergleiche diesen mit der in §64 dargebotenen Form und es wird werden

$$\begin{aligned} pqcg &= 1 \\ pq(c+r)(g+r) &= 4 \\ pq(c+2r)(g+2r) &= 9 \\ qp-bq=2 \quad &\text{und} \quad (p-q)r=1 \end{aligned}$$

woher gelten wird

$$c=g=r$$

$$p=\frac{\sqrt{5}+1}{2r}, \quad q=\frac{\sqrt{5}-1}{2r}$$

$$a=\frac{r(1+3\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad b=\frac{r(3\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{5}}$$

nach Einsetzen welcher Werte des vorgelegten Kettenbruches dieser sein wird

$$=1+\frac{(\sqrt{5}-1)\int x^{2r-1}dx(1-x^r)^{\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}(1+\sqrt{5}+(\sqrt{5}-1)x^r)^{\frac{-\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}}{2\int x^{r-1}dx(1-x^r)^{\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}(1+\sqrt{5}+(\sqrt{5}-1)x^r)^{\frac{-\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}}$$

Aus welchem Ausdruck wegen der rardischen Exponenten nichts Bemerkenswertes gefolgert werden kann.

§71 Weil in diesen Kettenbrüchen die Teilbrüche aus je zwei Faktoren zusammengesetzt sind, so möchte ich nun zu Kettenbrüchen solcher Art voranschreiten, in denen diese Teilzähler eine arithmetische Progression festlegen.

Es sein nun, zu §50 zurückkehrend, $\gamma = 0$ und $c = 1$; es wird gelten

$$\frac{\int PRdx}{\int Pdx} = \cfrac{a}{b + \cfrac{a+\alpha}{b+\beta + \cfrac{a+2\alpha}{b+2\beta + \cfrac{a+3\alpha}{b+3\beta+\text{etc}}}}}$$

Es muss aber angenommen werden

$$\frac{dS}{S} = \frac{(a-\alpha)dR}{\alpha R} + \frac{(\alpha b - \beta a)dR + \alpha R dR}{\alpha(\beta R - \alpha)} = \frac{(a-\alpha)dR}{\alpha R} + \frac{dR}{\beta} + \frac{(\alpha^2 + \alpha\beta b - \beta^2 a)dR}{\alpha\beta(\beta R - \alpha)}$$

woher wird

$$S = Ce^{\frac{R}{\beta}} R^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} (\beta R - \alpha)^{\frac{\alpha^2 + \alpha\beta b - \beta^2 a}{\alpha\beta\beta}}$$

Man setze

$$R = \frac{\alpha x}{\beta}$$

es wird gelten

$$S = Ce^{\frac{\alpha x}{\beta\beta}} x^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} (1-x)^{\frac{\alpha^2 \alpha\beta b - \beta^2 a}{\alpha\beta\beta}}$$

und $R^{n+1}S$ verschwindet in zwei Fällen, so für $x = 0$ wie für $x = 1$, es sei nur

$$\alpha^2 + \alpha\beta b > \beta^2 a$$

Daher wird also gelten

$$Pdx = e^{\frac{\alpha x}{\beta\beta}} x^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} dx(1-x)^{\frac{\alpha^2 + \alpha\beta b - \alpha\beta^2 - \beta^2 a}{\alpha\beta\beta}}$$

und der Wert des vorgelegten Kettenbruches

$$= \frac{\int PRdx}{\int Pdx} = \frac{\alpha \int e^{\frac{\alpha x}{\beta\beta}} x^{\frac{a}{\alpha}} dx(1-x)^{\frac{\alpha^2 + \alpha\beta b - \alpha\beta^2 - \beta^2 a}{\alpha\beta\beta}}}{\beta \int e^{\frac{\alpha x}{\beta\beta}} x^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} dx(1-x)^{\frac{\alpha^2 + \alpha\beta b - \alpha\beta^2 - \beta^2 a}{\alpha\beta\beta}}}$$

wenn nach der Integration $x = 1$ gesetzt wird.

§72 Um diesen Fall an einem Beispiel zu beleuchten, sei

$$a = 1, \quad \alpha = 1 \quad \text{und} \quad \beta = 1$$

man wird diesen Kettenbruch haben

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \text{etc}}}}}$$

dessen Wert also dieser sein wird

$$\frac{\int e^x x dx}{\int e^x dx} = \frac{e^x x - e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{1}{e - 1}$$

wenn $x = 1$ gesetzt wird. Daher wird gelten

$$e = 2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{5}{6 + \text{etc}}}}}$$

mit welchem Ausdruck hinreichend schnell zum Wert der Zahl e, deren Logarithmus $= 1$ ist, gelangt wird.

§73 Wir wollen nun festlegen, dass in dem oberen in §71 gegebenen Kettenbruch $\beta = 0$ ist, dass gilt

$$\frac{\int PRdx}{\int Pdx} = \cfrac{a}{b + \cfrac{a + \alpha}{b + \cfrac{a + 2\alpha}{b + \cfrac{a + 3\alpha}{b + \text{etc}}}}}$$

Es wird gelten

$$\frac{dS}{S} = \frac{(a - \alpha)dR}{\alpha R} - \frac{bdR}{\alpha} - \frac{RdR}{\alpha}$$

und daher

$$S = CR^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} e^{\frac{-2bR-RR}{2\alpha}}$$

Nun verschwindet $R^{n+1}S$ in zwei Fällen, von denen der eine der ist, wenn $R = 0$ ist, der andere der, wenn $R = \infty$ ist, es seien a und α positive Zahlen. Man setze also

$$R = \frac{x}{1-x}$$

und es wird gelten

$$S = Cx^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} : (1-x)^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} e^{\frac{2bx-(2b-1)xx}{2\alpha(1-x)^2}}$$

Wegen

$$dR = \frac{dx}{(1-x)^2}$$

wird gelten

$$\int Pdx = \int \frac{x^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} dx}{(1-x)^{\frac{a+\alpha}{\alpha}} e^{\frac{2bx-(2b-1)xx}{2\alpha(1-x)^2}}}$$

sowie

$$\int PRdx = \int \frac{x^{\frac{a}{\alpha}} dx}{(1-x)^{\frac{a+2\alpha}{\alpha}} e^{\frac{2bx-(2b-1)xx}{2\alpha(1-x)^2}}}$$

§74 Es sei schließlich in §50

$$a = 1, \quad c = 1, \quad \alpha = 0, \quad \gamma = 0$$

es wird gelten

$$\frac{\int PRdx}{\int Pdx} = \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \beta + \cfrac{1}{b + 2\beta + \cfrac{1}{b + 3\beta + \text{etc}}}}}$$

sowie

$$\frac{dS}{S} = \frac{R^2 dR - (b-\beta)RdR - dR}{\beta R^2}$$

woher werden wird

$$S = e^{\frac{RR+1}{\beta R}} R^{\frac{b-\beta}{\beta}} \quad \text{und} \quad Pdx = e^{\frac{RR+1}{\beta R}} R^{\frac{b-2\beta}{\beta}} dR$$

sowie

$$PRdx = e^{\frac{RR+1}{\beta R}} R^{\frac{b-\beta}{\beta}} dR$$

R muss aber eine solche Funktion von x sein, dass R^{n+1} so für $x = 0$ wie $x = 1$ verschwindet. Eine Funktion solcher Art anzugeben, ist aber um vieles schwieriger als für die übrigen Fälle. Daher werde ich auch nicht versuchen diesen Fall mit derselben Methode aufzulösen, sondern verwahre ihn für eine andere nun darzustellende Methode.

§75 Diese Methode zu Kettenbrüchen zu gelangen habe ich freilich schon vor einiger Zeit erwähnt, aber weil ich damals ja nur einen speziellen Fall behandel habe, wird es gefällig sein, diese Methode hier gründlicher darzulegen. Sie ist aber nicht wie die vorausgehende in Integralformeln enthalten, sondern in der Auflösung einer Differentialgleichung, ähnlich der, die der gefreite Graf Riccati vorgelegt hat. Ich betrachtet natürlich diese Gleichung

$$ax^m dx + bx^{m-1} y dx + cy^2 dx + dy = 0$$

die durch Setzen von

$$x^{m+3} = z \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{cx} + \frac{1}{xxz}$$

in diese übergeht

$$\frac{-c}{m+3} t^{\frac{-m-4}{m+3}} dt - \frac{b}{m+3} t^{\frac{-1}{m+3}} z dt - \frac{ac+b}{(m+3)c} z^2 dt + dz = 0$$

die der ersten ähnlich ist. Diese Gleichung werde aber in gleicher Weise auf eine andere ihr ähnliche zurückgeführt, indem festgelegt wird

$$t^{\frac{2m+5}{m+3}} = u \quad \text{und} \quad z = \frac{-(m+3)c}{(ac+b)t} + \frac{1}{t+v}$$

und Reduktionen von dieser Art setze man dann bis ins Unendlich fort; danach, wenn alle letzteren Werte in den vorhergehenden eingesetzt werden, wird y auf folgende Weise ausgedrückt werden

$$y = Ax^{-1} + \cfrac{1}{-Bx^{-m-1} + \cfrac{1}{Cx^{-1} + \cfrac{1}{-Dx^{-m-1} + \cfrac{1}{Ex^{-1} + \cfrac{1}{-Fx^{-m-1} + \text{etc}}}}}}$$

die Buchstaben A,B,C,D etc werden aber die folgenden Werte erhalten

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{c} \\
B &= \frac{(m+3)c}{ac+b} \\
C &= \frac{(2m+5)(ac+b)}{c(ac-(m+2)b)} \\
D &= \frac{(3m+7)c(ac-(m+2)b)}{(ac+b)(ac+(m+3)b)} \\
E &= \frac{(4m+9)(ac+b)(ac+(m+3)b)}{c(ac-(m+2)b)(ac-(2m+4)b} \\
F &= \frac{(5m+11)c(ac-(m+2)b)(ac-(2m+4)b)}{(ac+b)(ac+(m+3)b)(ac+(2m+5)b)} \\
etc
\end{aligned}$$

welche Bestimmungen leichter mit den folgenden Gleichungen erfasst werden:

$$\begin{aligned}
AB &= \frac{m+3}{ac+b}\\
BC &= \frac{(m+3)(2m+5)}{ac-(m+2)b}\\
CD &= \frac{(2m+5)(3m+7)}{ac-(m+3)b}\\
DE &= \frac{(3m+7)(4m+9)}{ac-(2m+4)b}\\
EF &= \frac{(4m+9)(5m+11)}{ac+(2m+5)b}\\
FG &= \frac{(5m+11)(6m+13)}{ac-(3m+6)b}\\
etc
\end{aligned}$$

§76 Wenn nun diese Werte im gefundenen Kettenbruch eingesetzt werden , wird aufgefunden werden

$$cxy = 1 + \cfrac{(ac+b)x^{m+2}}{-(m+3) + \cfrac{(ac-(m+2)b)x^{m+2}}{(2m+5) + \cfrac{(ac+(m+3)b)x^{m+2}}{-(3m+7) + \cfrac{(ac-(2m+4)b)x^{m+2}}{(4m+9)+\text{etc}}}}}$$

Aus diesem Ausdruck tritt es klar zutage, dass die vorgelegte Gleichung uneingeschränkt integrierbar in den Fällen ist, in denen b einem bestimmten Term dieser Progression gleich wird

$$-ac\,, \quad \frac{-ac}{m+3}, \quad \frac{-ac}{2m+5}, \quad \frac{-ac}{3m+7}, \dots \frac{-ac}{im+2i+1}$$

des Weiteren auch in den Fällen, in denen b ein Term dieser Progression ist

$$\frac{ac}{m+2}, \quad \frac{ac}{2(m+2)}, \quad \frac{ac}{3(m+2)}, \quad \dots \frac{ac}{im+2i}$$

Aber dieser Kettenbruch der vorgelegten Gleichung bietet das Integral der vorgelegten Gleichung nur unter der Bedingung dar, dass für $x = 0$ $cxy = 1$ wird, wenn freilich $m+2 > 0$ ist; aber wenn $m+2 < 0$ ist, dann gilt für das Integral, dass für $x = \infty$ $cxy = 1$ wird.

§77 Wir wollen festlegen, dass $b = 0$ und $a = nc$ und nach der Integration $x = 1$ gesetzt wird; aus dieser Gleichung

$$ncx^m dx + cy^2 dx + dy = 0$$

wird der folgende Kettenbruch hervorgehen, mit welchem der Wert von y in dem Fall bestimmt wird, in dem $x = 1$ gesetzt wird,

$$y = \frac{1}{c} + \cfrac{n}{\frac{-(m+3)}{c} + \cfrac{n}{\frac{2m+5}{c} + \cfrac{n}{\frac{-(3m+7)}{c} + \cfrac{n}{\frac{4m+9}{c} + \text{etc}}}}}$$

oder man setze $c = \frac{1}{\chi}$; aus der Gleichung

$$nx^m dx + y^2 dx + \chi dy = 0$$

wird sich der Wert von y im Fall $x = 1$ so verhalten

$$y = \chi + \cfrac{n}{-(m\chi + 3\chi) + \cfrac{n}{2m\chi + 5\chi + \cfrac{n}{-(3m\chi + 7\chi) + \text{etc}}}}$$

oder

$$y = \chi - \cfrac{n}{m\chi + 3\chi - \cfrac{n}{2m\chi + 5\chi - \cfrac{n}{3m\chi + 7\chi - \cfrac{n}{4m\chi + 9\chi - \text{etc}}}}}$$

§78 Wenn also dieser Kettenbruch vorgelegt ist

$$b + \cfrac{1}{b + \beta + \cfrac{1}{b + 2\beta + \cfrac{1}{b + 3\beta + \cfrac{1}{b + 4\beta + \text{etc}}}}}$$

wird gelten

$$\chi = b, \quad n = -1, \quad (m+2)b = \beta$$

oder

$$m = \frac{\beta}{b} - 2$$

Daher wird der Wert dieses Kettenbruches der Wert von y in dem Fall sein, in dem $x = 1$ ist, aus dieser Gleichung sein

$$x^{\frac{\beta - 2b}{b}} dx = y^2 dx + b dy$$

wenn die Integration so durchgeführt wird, dass für $x = 0$ $xy = b$ wird, weil gilt

$$m + 2 > 0$$

wenn freilich $\frac{\beta}{b}$ eine positive Zahl ist.