Über die Partition von Zahlen *

Leonhard Euler

§1 Das Problem *über die Partition von Zahlen* ist mir zuerst vom *hochgeehrten Professor Naudé* vorgelegt worden, in welchem er fragte, auf wie viele verschiedene Arten eine gegebene ganze Zahl (hier ist nämlich immer nur von ganzen und positiven Zahlen die Rede) das Aggregat von zwei oder drei oder vier oder im Allgemeinen von so vielen Zahlen wie es beliebt sein kann. Oder, was auf dasselbe zurückgeht, es wird gesucht, auf wie viele Arten eine gegebene Zahl entweder in zwei oder drei oder vier oder im Allgemeinen so viele Teile wie es beliebt zerteilt werden kann, woher diesem Problem sehr passend der Name *Partition von Zahlen* gegeben worden ist. Zweiteilig pflegt aber dieses Problem vom hochgeehrten Herrn vorlgelegt zu werden: Zuerst verlangt er natürlich nur die Partitionsarten, in denen die einzelnen Teile, in welche die vorgelegte Zahl aufgelöst wird, einander ungleich sein sollen; dann aber, nachdem diese Bedingung der Ungleichheit weggelassen worden ist, fordert er ganz und gar die Partitionsarten, ob gewisse Teile einander gleich oder alle ungleich waren. Es ist aber klar, dass in diesem letzten Fall die Anzahl der Partitionen meistens um Vieles größer ist als im Ersten, weil nicht nur alle Partitionen, die dem ersten Fall Genüge leisten, zugleich den Letzteren auflösen, sondern auch meistens mehrere andere hinzukommen, in welchen gleiche Teile enthalten sind.

*Originaltitel: „de partitione numerorum", erstmals publiziert in *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 3, 1753, pp. 125-169"*, Nachdruck in *Opera Omnia: Series 1, Volume 2, pp. 254 - 294"* und *"Commentat. arithm. 1, 1849, pp. 73-101 [E191a]"*, Eneström.Nummer E191, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Christine Veldenzer, im Rahmen des Hauptseminars zu Euler Johannes Gutenberg-Universität Mainz SS2015

§2 Damit die Kraft dieses Problems deutlicher erkannt wird, möchte ich einige einfachere Fälle anführen, die mit tatsächlicher Aufzählung von Partitionen leicht erledigt werden. Wenn gesucht wird, auf wie viele verschiedene Weisen die Zahl 6 in zwei Teile aufgelöst werden kann, ist es sofort klar, dass dies auf drei Weisen geschehen kann, weil ist:

$$6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3$$

wenn freilich die Gleichheit der Teile nicht ausgeschlossen wird. Wenn aber nur ungleiche Teile verlangt werden, ist die letzte Partition $3 + 3$ wegzulassen und in diesem Fall kann die Zahl 6 nur auf zwei Arten in zwei einander ungleiche Teile zerteilt werden. Wenn daher eine ungerade, auf zwei Teile aufzutrennende Zahl, wie 9, vorgelegt wird, werden vier Partitionen hervorgehen, die sind:

$$9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$$

weil dort keine gleichen Teile auftauchen, wird die Zahl 9 auf vier Weisen in vier Teile zerteilt werden, ob gleiche Teile ausgeschlossen werden oder nicht. Wenn mehr als zwei Teile verlangt werden, wie wenn gesucht wird, auf wie viele Arten die Zahl 12 in drei Teile aufgetrennt werden kann, wird dies auf 12 Weisen geschehen können:

$$\begin{array}{lll} 12 = 1 + 1 + 10; & 12 = 1 + 2 + 9; & 12 = 1 + 3 + 8 \\ 12 = 1 + 4 + 7; & 12 = 1 + 5 + 6; & 12 = 2 + 2 + 8 \\ 12 = 2 + 3 + 7; & 12 = 2 + 4 + 6; & 12 = 2 + 5 + 5 \\ 12 = 3 + 3 + 6; & 12 = 3 + 4 + 5; & 12 = 4 + 4 + 4 \end{array}$$

Wenn aber gleiche Teile ausgeschlossen werden, wird zu antworten sein, dass die Zahl 12 nur auf 7 Weisen auf drei Teile aufgeteilt werden kann.

§3 Daher wird leicht eingesehen, wenn die zu zerteilende Zahl größer war und die Anzahl der Teile, in welche sie aufgelöst werden muss, drei oder vier überragt, dass die Anzahl der Partitionen so groß wird, dass sie durch eine tatsächlich durchzuführende Auszählung sehr schwer erhalten werden kann. Und auch ist bei dieser Aufgabe der Induktion nicht sehr zu trauen, die, wie dem den Versuch Unternehmenden leicht klar werden wird, meistens täuscht, wenn sie von der für einfachere Fälle durchgeführte Auszählung aus für Zusammengesetztere Schlussfolgerungen bildet. So wird aus der danach dazulegenden Methode klar zutagetreten, dass die Zahl 50 in 7 Teile, nachdem die Gleichheit der Teile nicht ausgeschlossen worden ist, auf 8946 Weisen zerteilt werden kann; wenn aber gleiche Teile ausgeschlossen werden, werden nur 522 Partitionen zurückbleiben. Weiter kann die Zahl 42 insgesamt auf tausend verschiedene Weisen in 20 Teile aufgelöst werden. Aber wenn gesucht wird, auf wie viele verschiedene Weisen die Zahl 125 auf 12 Teile, die einander alle ungleich seien, aufgeteilt werden kann, wird aufgefunden werden, dass dies auf 64707 Weisen geschehen kann.

§4 Wie hier alle ganzen Zahlen den Platz der Teile einnehmen können, so kann dieses Problem ins Unendliche variiert werden, je nachdem wie die festlegenden Teile eingeschränkt werden. So wird es ein anderes Problem sein, wenn gesucht wird, auf wie viele verschiedene Weisen eine gegebene Zahl n in p Teile, von denen keines eine gegebene Zahl m überschreite, aufgelöst werden kann. Auch kann die Anzahl der Teile weggelassen werden, wie wenn gesucht wird, auf wie viele Weisen die Zahl 6 aus diesen Zahlen $1, 2, 3, 4$ durch Addition hervorgebracht werden kann, was auf die folgenden 9 Weisen geschehen können wird:

$$\begin{array}{ll}
6 = 1+1+1+1+1+1; & 6 = 1+1+1+3 \\
6 = 1+1+1+1+2; & 6 = 1+1+4 \\
6 = 1+1+2+2; & 6 = 1+2+3 \\
6 = 2+2+2; & 6 = 2+4 \\
 & 6 = 3+3
\end{array}$$

Oder es kann auch die Gleichheit der Zahlen vorgeschrieben werden, welche die Teile festlegen; wie wenn die Teile entweder ungerade Zahlen oder Quadratzahlen oder Triagonalzahlen oder Zahlen jeder anderen Art sein müssen. Wenn so gesucht wird, auf wie viele verschiedene Weisen eine gegebene Zahl die Summe vierer Quadratzahlen sein kann, wird sich die Frage auf diese Gattung beziehen. Schon vor langer Zeit ist auch die Partition von allen Zahlen in Teile, die Terme dieser geometrischen Progression $1, 2, 4, 8, 16, 32$, etc. sein sollen, betrachtet worden und jede beliebige Zahl ist beobachtet worden, nur auf eine einzige Weise aus diesen Zahlen $1, 2, 4, 8, 16, 32$, etc. durch Addition zusammengesetzt werden zu können. Von dieser Frage hat Frans van Schooten in seinem Buch *Exercitationum* eine Erwähnung gemacht, wo er zeigt, dass die Gewichte von $1, 2, 4, 8, 16, 32$, etc. Pfund genügen können, um Waren von wie viel Pfund auch immer zu wiegen. Aber in der Tat wird, um dies zu zeigen, keine andere Methode außer der Induktion gebraucht. Deswegen wird es nicht unpassend sein, die Gültigkeit dieses Satzes streng bewiesen zu haben.

§5 Wie also diese und andere ähnliche Probleme aufgelöst werden müssen, möchte ich hier eine gewisse und sichere Methode solcher Art vorlegen, dass Induktion, welcher für gewöhnlich bei der Lösung von Fragen dieser Art sehr viel zugeteilt wird, überhaupt nicht von Nöten ist. Ich gebrauche dafür das folgende altbekannte Lemma:
Wenn dieses Produkt $(1+az)(1+bz)(1+cz)(1+dz)(1+ez)etc.$ *ob die Anzahl der Faktoren entweder endlich oder unendlich ist, durch tatsächliche Mukltiplikation entwickelt wird, dass eine Form von dieser Art hervorgeht;*

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + etc.$$

wird der Koeffizient des zweiten Terms A die Summe aller Größen a, b, c, d, e, etc. sein. Der Koeffizient B wird hingegen die Summe der Produkte aus je zwei ungleichen dieser Größen sein. Der Koeffizient C wird die Summe der Produkte aus je drei ungleichen dieser Größen sein; und der Koeffizient D wird die Summe der Produkte aus je vier ungleichen dieser selben Größen sein, und so weiter. Denn in Produkten dieser Art kann die selbe Größe, beispielsweise a, oder jede andere nie mehr als einmal enthalten sein. Daher verschafft dieses Lemma mir die Grundlage für Partitionen in ungleiche Teile.

§6 Wenn aber die Gleichheit der Teile nicht ausgeschlossen wird, verwende ich dieses Lemma:
Wenn die Formel $\frac{1}{(1-az)(1-bz)(1-cz)(1-dz)(1-ez)}$ *etc. ob die Anzahl der den Nenner festlegenden Faktoren entweder endlich oder unendlich ist, nach der mit Hilfe von Multiplikation durchgeführten Entwicklung des Nenners durch Division in einer Reihe dieser Form erklärt:*

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + etc.$$

dann wird A freilich wie zuvor die Summe der Größen a + b+ c+ d+ e + etc. Aber der Koeffizient B wird die Summe der Produkte aus je Zweien dieser Größen, wobei die Wiederholung derselben Größe nicht ausgeschlossen worden ist, wird natürlich sein:

$$B = aa + ab + bb + ac + bc + cc + ad + bd + cd + dd + ae + etc.$$

Auf die gleiche Weise wird C die Summe der Produkte aus je Dreien von diesen Größen a, b, c, d, e, etc. sein, wobei gleiche Faktoren in jedem Produkt nicht ausgeschlossen worden sind. Und nach Hinzufügen derselben Bedingung wird der Koeffizient D die Summe der Produkte aus je Vieren dieser Größen sein, und so weiter.
Und daher wird dieses Lemma den Weg eröffnen, um Partitionen, in denen die Gleichheit der Teile nicht ausgeschlossen wird, abzuhandeln.

§7 Weil aber im vorgelegten Problem die Frage nicht über Produkte, sondern über die Summen von Zahlen gestellt wird, setze ich anstelle der Größen $a, b, c, d, etc.$ die Potenzen $x^p, x^q, x^r, x^s, x^t, etc.$ an. So werden nämlich in Produkten aus je zweier Art Potenzen solcher Art auftauchen, deren Exponenten die Summen aus je Zweien aus der Reihe $p, q, r, s, t, etc.$ sind. Auf die gleiche Weise bestehen die Produkte aus je Dreien aus Potenzen von solcher Art, deren Exponenten die Summen je dreier Zahlen aus derselben Reihe $p, q, r, s, t, etc.$ sind. Und die Produkte aus je Vieren werden die Potenzen seien, deren Exponenten die Aggregate aus je Vieren dieser Zahlen sind, und so weiter. Und so wird, was zuvor über Produkte angemerkt worden ist, nun auf Summen übertragen und freilich so, dass, wenn das erste Lemma behandelt wird, die Summe aus nur ungleichen Teilen vereinigt werden, wenn aber das zweite Lemma benutzt wird, die Gleichheit der Teile nicht ausgeschlossen wird. Auf diese Weise werden also die beiden Lemmata zur Lösung der zuvor erwähnten Fragen angewendet werden müssen.

§8 Wir wollen also diese erste Frage angehen:
Zu finden, auf wie viele verschiedene Arten die gegebene Zahl N in p Teile zerteilt werden kann, die einander ungleich seien.
Weil ja dafür alle positiven ganzen Zahlen, um die Teile festzulegen, geeignet sind, ist für die Reihe der oberen Exponenten die Reihe der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6, etc.$ anzunehmen. Es werde also gemäß des ersten Lemmas dieser Ausdruck gebildet

$$s = (1 + xz)(1 + x^2z)(1 + x^3z)(1 + x^4z) etc. \text{ins Unendliche}$$

die nach tatsächlichem Ausführen der Multiplikation in diese Reihe entwickelt werde

$$s = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + etc.$$

und es wird sein
$$A = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + etc.$$
welcher das Aggregat der Potenzen von x ist. Weil darauf B die Summe der Produkte aus je zwei ungleichen Termen der Reihe A ist, wird B die Summe aller Potenzen von x sein, deren Exponenten die Aggregate zweier ungleicher Zahlen sind; und weil dieselbe Potenz öfter resultieren kann, wird sie einen numerisch, auf wie viele Weisen die Potenz das Produkt aus zwei Termen der Reihe A oder auf wie viele verschiedene Weisen ihr Exponent die Summe zweier ungleicher Zahlen sein kann, anzeigenden Koeffizienten haben. Indem aber je zwei Terme der Reihe A in der Tat multipliziert werden, wird aufgefunden werden

$$B = x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 3x^8 + 4x^9 + 4x^{10} + etc.$$

Von dieser Reihe zeigt jeder beliebige Koeffizient an, auf wie viele verschiedene Weisen der Exponent der hinzugefügten Potenz von x in zwei ungleiche Teile zerteilt werden kann. Nachdem also diese Reihe ins Unendliche fortgesetzt worden ist, wird mit Hilfe eines später zu findenen Gesetzes der Fall des vorgelegten Problems aufgelöst, in welchem die Partition in zwei Teile verlangt wird.

§9 Darauf wird die Größe C, weil sie also Produkte enthält, die entspringen, indem je drei ungleiche Terme der Reihe A miteinander multipliziert werden, aus einer Reihe von Potenzen von x bestehen, deren Exponenten die Summe je dreier einander ungleicher Zahlen sind. Und dieselbe Potenz wird sooft in dieser Reihe C auftauchen, wie ihr Exponent aus je drei einander ungleichen Zahlen durch Addition resultieren können wird, und es wird aufgefunden werden

$$C = x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 4x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + 8x^{13} + 10x^{14} + etc.$$

Von dieser Reihe zeigt jeder beliebige Koeffizient an, auf wie viele verschiedene Arten der Exponent der hinzugefügten Potenz von x in drei ungleiche Teile getrennt werden kann; so wird aus dem Term $8x^{13}$ erschlossen, dass die Zahl 13 auf acht verschiedene Weisen in drei ungleiche Teile getrennt werden kann, die sind

$$13 = 1 + 2 + 10; \quad 13 = 2 + 3 + 8$$
$$13 = 1 + 3 + 9; \quad 13 = 2 + 4 + 7$$
$$13 = 1 + 4 + 8; \quad 13 = 2 + 5 + 6$$
$$13 = 1 + 5 + 7; \quad 13 = 3 + 4 + 6$$

Diese Reihe C wird also ins Unendliche fortgesetzt zum Zerteilen aller Zahlen in drei ungleiche Teile dienen.

§10 Weiter wird die Größe D, weil sie alle Produkte aus je vier ungleichen Termen der Reihe $A = x + x^2 + x^3 + x^4 + etc.$ enthält, aus einer Reihe von Potenzen bestehen, deren Exponenten die Aggregate von je vier einander ungleichen Zahlen sind; und in dieser Reihe wird jede beliebige Potenz einen Koeffizienten solcher Art haben, der anzeigt, auf wie viele verschiedene Weisen ihr Exponent durch Addition von je vier einander ungleichen Zahlen resultieren kann. Es wird aber aufgefunden werden

$$D = x^{10} + x^{11} + 2x^{12} + 3x^{13} + 5x^{14} + 10x^{15} + 9x^{16} + 11x^{17} + etc.$$

Diese Reihe wird also ins Unendliche fortgesetzt zeigen, auf wie viele verschiedene Weisen jede Zahl die Summe von vier ungleichen Zahlen sein kann. Aus dem Term $9x^{16}$ wird selbstredend erkannt, dass die Zahl 16 auf neun Arten auf vier einander ungleiche Teile aufgeteilt werden kann.

§11 Wenn wir auf diese Weise fortschreiten, wird klar zutage treten, dass der Buchstabe E eine so beschaffene Reihe von Potenzen von x sein wird, dass der Term jeglichen Koeffizienten anzeigt, auf wie viele verschiedene Arten der Exponent von x in fünf ungleiche Teile zerspalten werden kann. Es wird aber sein

$$E = x^{15} + x^{16} + 2x^{17} + 3x^{18} + 5x^{19} + 7x^{20} + 10x^{21} + 13x^{22} + etc.$$

Auf die gleiche Weise wird der Wert des Buchstaben F eine für Partitionen in sechs ungleiche Teile dienende Reihe sein und die Buchstaben für die Partitionen in sieben, acht, neun ect. Teile anwendbar sein und es werden sein

$$F = x^{21} + x^{22} + 2x^{23} + 3x^{24} + 5x^{25} + 7x^{26} + 11x^{27} + 14x^{28} + etc.;$$

$$G = x^{28} + x^{29} + 2x^{30} + 3x^{31} + 5x^{32} + 7x^{33} + 11x^{34} + 15x^{35} + etc.$$

Daher wird erkannt, dass der Exponent des ersten Terms jeder Reihe eine Dreieckszahl der vorgelegten Anzahl an Teilen ist, dann aber der Koeffizient so dieses wie des zweiten Terms $= 1$ ist. Die Begründung dessen wird freilich leicht eingesehen; denn die kleinste Zahl, die die Summe von sieben einander ungleichen Zahlen ist, ist notwendigerweise $= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 =$ der Triagonalzahl von sieben und diese Zahl kann gleichermaßen wie die Folgende um die Einheit Größere nicht mehr als auf eine Weise in sieben ungleiche Teile zerteilt werden.

§12 Die ganze Aufgabe geht also auf eine bequeme Bildung der Reihen B, C, D, E, F, etc. zurück, damit nicht das selbst, was gesucht wird, natürlich die Anzahl der Partitionen, zur Bildung jeder Reihe verwendet wird. Und zuerst ist freilich das Bildungsgesetz der Progression A und B offenkundig, weil die Koeffizienten der Ersten alle Einheiten sind, von der Zweiten hingegen die Terme der Reihe der natürlichen Zahlen je zweimal; das Bildungsgesetz der folgenden Reihen ist hingegen weniger offenkundig, und so weit wir sie fortgesetzt haben, haben wir sie aus den Partitionen jedes Exponenten selbst bestimmt. Deshalb ist es von Nöten, dass die Werte dieser Buchstaben A, B, C, D, etc. auf eine andere Weise untersucht werden, woher die Frage entspringt: Die Werte der Buchstaben A, B, C, D, etc. finden so, dass die Summe dieser Reihe

$$s = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + etc.$$

diesem Ausdruck gleich wird

$$s = (1 + xz)(1 + x^2z)(1 + x^3z)(1 + x^4z)(1 + x^5z)etc.$$

Für dieses Ziel ist also der Zusammenhang zu betrachten, der zwischen diesen beiden Ausdrücken besteht, und wie der eine verändert werden muss, wenn im anderen eine Veränderung angenommen wird.

§13 Weil der Wert s jeder der beiden Ausdrücke derselbe ist, werden die beiden einander gleich bleiben, wenn in jedem der beiden anstelle von z irgendeine andere Größe z geschrieben wird. Wir werden also in jedem der beiden x z anstelle von z setzen und der auf beiden Seiten resultierende Wert werde t genannt und es wird zuerst sein

$$t = 1 + Axz + Bx^2z^2 + Cx^3z^3 + Dx^4z^4 + etc.$$

dann aber wird der andere Ausdruck in diesen verwandelt werden

$$t = (1 + x^2z)(1 + x^3z)(1 + x^4z)(1 + x^5z)etc.$$

Wenn dieser letzte Wert von t mit dem zweiten Wert von s verglichen wird, in welchem war

$$s = (1 + xz)(1 + x^2z)(1 + x^3z)(1 + x^4z)(1 + x^5z)etc.$$

wird bald klar zutage treten, dass $s = (1 + xz)t$ ist. Wie diese Relation auch bei den anderen Werten von s und t Geltung haben muss, wird sie uns diese Gleichung liefern

$$s = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + etc.$$

$$\begin{aligned}(1 + xz)t = 1 &+ Axz + Bx^2z^2 + Cx^3z^3 + Dx^4z^4 + etc \\ &+xz + Ax^2z^2 + Bx^3z^3 + Cx^4z^4 + Dx^5z^5\end{aligned}$$

Daher, indem die homogenen Teile einander gleichgesetzt werden, wird werden

$$A = \frac{x}{1-x}$$

$$B = \frac{Ax^2}{1-x^2} = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}$$

$$C = \frac{Bx^3}{1-x^3} = \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$D = \frac{Cx^4}{1-x^4} = \frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

$$E = \frac{Dx^5}{1-x^5} = \frac{x^{15}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$$

$$etc.$$

§14 Die Reihen, die oben für die Buchstaben A, B, C, D, E, etc. hervorzugehen beobachtet worden sind, entspringen also aus der Entwicklung der Brüche, welche wir hier gefunden haben, woher feststeht, dass A eine geomtrische Reihe ist, natürlich $A = x + x^2 + x^3 + x^4 + etc.$, die, was freilich sehr klar ist, anzeigt, dass jede Zahl auf eine einzige Weise aus einer ganzen Zahl besteht. Die übrige Reihen B, C, D, E, etc. hingegen sind rekurrent, deren Relationsskala aus dem durch Multiplikation entwickelten Nenner jedes Bruches klar zutage treten werden wird. Um dies zu zeigen, wollen wir solange die Zähler vernachlässigen, die die Potenzen von x sind, deren Exponenten die Trigonalzahlen sind, und wollen anstelle derer die Einheit schreiben. Es sei also

$$\frac{A}{x} = 1 + \alpha^I x + \beta^I x^2 + \gamma^I x^3 + \delta^I x^4 + \epsilon^I x^5 + ... + \nu^I x^n + ... = \mathscr{A}$$

$$\frac{B}{x^3} = 1 + \alpha^{II} x + \beta^{II} x^2 + \gamma^{II} x^3 + \delta^{II} x^4 + \epsilon^{II} x^5 + ... + \nu^{II} x^n + ... = \mathscr{B}$$

$$\frac{C}{x^6} = 1 + \alpha^{III} x + \beta^{III} x^2 + \gamma^{III} x^3 + \delta^{III} x^4 + \epsilon^{III} x^5 + ... + \nu^{III} x^n + ... = \mathscr{C}$$

$$\frac{D}{x^{10}} = 1 + \alpha^{IV} x + \beta^{IV} x^2 + \gamma^{IV} x^3 + \delta^{IV} x^4 + \epsilon^{IV} x^5 + ... + \nu^{IV} x^n + ... = \mathscr{D}$$

$$\frac{E}{x^{15}} = 1 + \alpha^{V} x + \beta^{V} x^2 + \gamma^{V} x^3 + \delta^{V} x^4 + \epsilon^{V} x^5 + ... + \nu^{V} x^n + ... = \mathscr{E}$$

$$\frac{F}{x^{21}} = 1 + \alpha^{VI} x + \beta^{VI} x^2 + \gamma^{VI} x^3 + \delta^{VI} x^4 + \epsilon^{VI} x^5 + ... + \nu^{VI} x^n + ... = \mathscr{F}$$

$$etc.$$

§15 Die Lösung der Frage wird also auf das Finden der Reihen $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}, \mathscr{E}, etc.$ zurückgeführt, welche Einzelnen klar zutagetreten, rekurrent zu sind. Und zuerst ist freilich die Reihe $\mathscr{A}$, weil $\mathscr{A} = \frac{1}{1-x}$ ist, sogar eine Geometrische, und $\alpha^I = 1, \beta^I = 1, \gamma^I = 1, \delta^I = 1, etc.$ was freilich per se klar ist. Aber die Reihe $\mathscr{B}$, weil ist $\mathscr{B} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{1}{1-x-x^2+x^3}$ wird rekurrent sein, während die Relationsskala $+1, +1, -1$ ist; daher wird sein

$$\alpha^{II} = 1$$

$$\beta^{II} = \alpha^{II} + 1$$

$$\gamma^{II} = \beta^{II} + \alpha^{II} - 1$$

$$\delta^{II} = \gamma^{II} + \beta^{II} - \alpha^{II}$$

$$\epsilon^{II} = \delta^{II} + \gamma^{II} - \beta^{II}$$

$$\zeta^{II} = \epsilon^{II} + \delta^{II} - \gamma^{II}$$

$$etc.$$

Auf die gleiche Weise wird die Reihe $\mathscr{C}$ wegen

$$\mathscr{C} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = \frac{1}{1-x-x^2+x^4+x^5-x^6}$$

rekurrent sein und wird die Relationsskala $+1, +1, 0, -1, -1, +1$ haben. Daher wird sein

$$\begin{gathered}
\alpha^{III} = 1 \\
\beta^{III} = \alpha^{III} + 1 \\
\gamma^{III} = \beta^{III} + \alpha^{III} + * \\
\delta^{III} = \gamma^{III} + \beta^{III} + * - 1 \\
\epsilon^{III} = \delta^{III} + \gamma^{III} + * - \alpha^{III} - 1 \\
\zeta^{III} = \epsilon^{III} + \delta^{III} + * - \beta^{III} - \alpha^{III} + 1 \\
\eta^{III} = \zeta^{III} + \epsilon^{III} + * - \gamma^{III} - \beta^{III} + \alpha^{III} \\
\theta^{III} = \eta^{III} + \zeta^{III} + * - \delta^{III} - \gamma^{III} + \beta^{III} \\
etc.
\end{gathered}$$

Auf dieselbe Weise werden die folgenden Reihen erkannt werden Rekurrente zu sein und die Relationsskalen der Einzelnen werden auf diese Weise angegeben werden können. Auch wenn auf diese Weise diese Reihen nicht schwer gebildet werden, werde ich dennoch, nachdem diese Methode außer Acht gelassen worden ist, bald eine um Vieles gefälligere Art beschaffen, jeden Term dieser Reihen aus dem Vorhergehenden zu bilden, nachdem ich eine Beobachtung von größter Bedeutung mitgeteilt haben werde.

§16 Weil $\mathscr{B} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ ist, tritt klar zutage, dass in der entwickelten Reihe $\mathscr{B}$ jede Potenz von x so oft auftreten muss, wie sie aus den Potenzen x, x^2 durch Multiplikation entspringen kann oder wie ihr Exponent aus den Zahlen 1 und 2 durch Addition hervorgebracht werden kann. Weil so ist

$$\mathscr{B} = 1 + x + 2^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + ... + \nu^{II}x^n + etc.$$

wird aus dem Term $3x^4$ eingesehen, dass die Zahl 4 auf drei Arten aus den Zahlen 1 und 2 durch Addition entspringen kann, die sind

$$4 = 1+1+1+1; \quad 4 = 1+1+2 \text{ und } \quad 4 = 2+2$$

Im Allgemeinen also, indem der Term $\nu^{II}x^n$ betrachtet wird, wid der Koeffizient ν^{II} anzeigen, auf wie viele Arten der Exponent n aus den Zahlen 1 und 2 durch Addition hervorgebracht werden kann. Weil also $B = \mathscr{B}x^3$ ist, wird man in der Reihe B diesen Term $\nu^{II}x^{n+3}$ haben, welcher anzeigt, dass die Zahl $n+3$ auf so viele verschiedene Arten in ungleiche Teile geteilt werden kann, wie der Koeffizient ν^{II} Einheiten in sich umfasst, ist es offenbar, dass die Zahl $n+3$ auf so viele Weisen in ungleiche Anteile aufgeteilt werden kann, auf wie viele Arten die Zahl n aus den Zahlen 1 und 2 durch Addition hervorgebracht werden kann.

§17 Weil darauf $\mathscr{C} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$ ist, tritt klar zutage, dass in dieser Reihe $\mathscr{C}$ jegliche Potenz von x so oft auftauchen muss, wie sie aus den Potenzen x, x^2, x^3 durch Multiplikation entspringen kann oder, was dasselbe ist, wie ihr Exponent aus den Zahlen $1, 2, 3$ durch Addition hervorgebracht werden kann. Weil so ist

$$\mathscr{C} = 1 + x + 2^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 7x^6 + ... + \nu^{III}x^n + etc.$$

wird aus ihrem Term $5x^5$ erkannt werden, dass der Exponent 5 auf fünf Weisen aus den Zahlen $1, 2, 3$ durch Addition hervorgebracht werden kann, die sind

$$5 = 1+1+1+1+1; \quad 5 = 1+1+1+2; \quad 5 = 1+1+3$$

$$5 = 1+2+2; \quad 5 = 2+3$$

Im Allgemeinen aber, indem der Term $\nu^{III}x^n$ betrachtet wird, zeigt der Koeffizient ν^{III} an, auf wie viele verschiedene Arten die Zahl n aus den Zahlen $1, 2, 3$ durch Addition entspringen kann. Weil also $C = \mathscr{C}x^6$ ist, wird man in der Reihe C diesen Term $\nu^{III}x^{n+6}$ haben, mit welchem angezeigt wird, dass die Zahl $n+6$ auf so viele Weisen, wie Einheiten im Koeffizienten ν^{III} enthalten sind, in drei ungleiche Teile zerteilt werden kann. Daher folgt, dass die Zahl $n+6$ auf genauso viele Weisen in drei ungleiche Teile aufgeteilt werden kann, auf wie viele Arten die Zahl n aus den Zahlen $1, 2, 3$ durch Addition hervorgebracht werden kann.

§18 Es ist nicht vonnöten, dass wir diese Rechnung weiter verfolgen, weil daher schon vollauf erkannt wird, dass jede Zahl $n+10$ auf so viele verschiedene Weisen in vier ungleiche Teile zerteilt werden kann, auf wie viele

Weisen die Zahl n aus diesen vier Zahlen $1, 2, 3, 4$ durch Addition erzeugt werden kann. Auf die gleiche Weise wird jede beliebige Zahl $n + 15$ auf so viele Weisen in fünf ungleiche Teile zerteilt werden können, auf wie viele Weisen die Zahl n aus diesen fünf Zahlen $1, 2, 3, 4, 5$ durch Addition hervorgebracht werden kann. Allgemein wird also die Zahl $n + \frac{m(m+1)}{2}$ auf so viele verschiedene Weisen in m ungleiche Teile zerteilt werden können, auf wie viele verschiedene Weisen die Zahl n aus diesen Zahlen $1, 2, 3, 4, ..., m$ durch Addition hervorgebracht werden kann. Wenn daher also gesucht wird, auf wie viele verschiedene Weisen die Zahl N in m ungleiche Teile zerteilt werden kann, wird die Antwort aufgefunden werden, wenn die Anzahl der Fälle untersucht wird, auf die die Zahl $N - \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}$ aus den Zahlen $1, 2, 3, 4, ..., m$ durch Addition hervorgebracht werden kann.

§19 Auf diese Weise wird also die Auflösung der vorgelegten Frage über die Partition jeder Zahl in so viele Teile wie es beliebt auf die Lösung eines anderen schon oben erwähnten Problems zurückgeführt, in dem gesucht wird, auf wie viele Weisen jede beliebige Zahl aus einigen Termen durch arithmetische Progression $1, 2, 3, 4, 5, etc.$ durch Addition hervorgebracht werden kann. Und nachdem diese letzte Frage aufgelöst worden ist, wird zugleich die Erste aufgelöst werden. Damit wir dies klarer erklären, wollen wir neue Zeichen für einen gefälligeren Ausdruck verwenden. Es bezeichne also dieser Schriftzug:
$n^{(2)}$ die Anzahl der Fälle, in denen die Zahl n aus diesen zwei Zahlen $1, 2$ durch Addition gebildet werden kann;
$n^{(3)}$ bezeichne die Anzahl der Fälle, in denen die Zahl n aus diesen Zahlen $1, 2, 3$ durch Addition gebildet werden kann;
und $n^{(m)}$ bezeichne die Anzahl der Fälle, in denen die Zahl n aus diesen Zahlen $1, 2, 3, ..., m$ durch Addition hervorgebracht werden kann.
Nachdem also die Werte der Charaktere von dieser Art bestimmt worden sind, was wir demnächst leisten werden, wird das vorgelegte Problem so aufgelöst. Wenn nämlich gesucht wird, auf wie viele verschiedene Weisen die Zahl N in m ungleiche Teile zerteilt werden kann, wird die gesuchte Anzahl der Fälle mit diesem Charakter $(N - \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2})^{(m)}$ ausgedrückt werden, mit welchem natürlich angezeigt wird, auf wie viele verschiedene Weisen die Anzahl $N - \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}$ aus diesen Zahlen $1, 2, 3, ..., m$ durch Addition erzeugt werden können.

§20 Auf dieselbe Frage wird auch die Lösung des anderen vom hochgeehrten Professor Naudé vorgelegten Problems zurückgeführt, weswegen es zuträglich sein wird, dass auch dieses Proiblem zuvor aufgelöst wird, bis wir die weitere Entwicklung der gerade angenommenen Charaktere in Angriff nehmen; so werden wir nämlich die Probleme, die zueinander in höchstem Maße verschieden erscheinen mögen, mit ein und derselben Arbeit auflösen. Das Problem verhält sich aber so:
Zu finden, auf wie viele verschiedene Weisen eine gegebene Zahl N in p Teile zerteilt werden kann, wobei die Gleichheit der Teile nicht ausgeschlossen worden ist.
Weil ja hier die Gleichheit der Teile nicht ausgeschlossen wird, werde ich die folgende Form betrachten, die die Lösung dieser Frage in sich enthalten wird,

$$s = \frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)etc.}$$

die nach Potenzen von z entwickelt diese Reihe liefere

$$s = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + etc.$$

und es wird, wie wir oben (§6) angemerkt haben, der Koeffizient A die Summe aller Terme dieser Reihe $x, x^2, x^3, x^4, x^5, etc.$ oder $A = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + etc.$ sein, welche dieselbe Reihe ist, welche wir in der Lösung des vorhergehenden Problems für den Buchstaben A erhalten haben.

§21 Darauf ist aber B die Summe der Produkte aus je zwei Termen der Reihe A, nachdem Quadrate der einzelnen Terme nicht ausgeschlossen wurden. Daher wird B die Summe aller Potenzen von x sein, deren Exponenten die Aggregate zweier entweder gleicher oder ungleicher Zahlen sind; und weil dieselbe Potenz auf diese Weise öfter resultieren kann, wird sie einen numerisch anzeigenden, auf wie viele Arten die Potenz ein Produkt aus je zwei Termen der Reihe A oder auf wie viele Weisen ihr Exponent die Summe zweier gleicher wie ungleicher Zahlen sein kann, Koeffizienten haben. Aus dieser Quelle wird aufgefunden werden

$$B = x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 3x^7 + 4x^8 + 4x^9 + etc.$$

jeder beliebige Koeffizient welcher Reihe anzeigt, auf wie viele verschiedene Weisen der Exponent der hinzugefügten Potenz von x in zwei Teile zerteilt werden kann. Nachdem also diese Reihe ins Unendliche fortgesetzt worden ist, wird der Fall des vorgelegten Problems, in welchem die Partition in zwei Teile verlangt wird, leicht aufgelöst.

§22 Weiter wird die Größe C, weil sie alle Produkte enthält, die entspringen, indem je drei entweder ungleiche oder gleiche Terme der Reihe A miteinander multipliziert werden, aus einer Reihe von Potenzen von x, deren Exponenten die Summen von drei positiven ganzen Zahlen sind. Und dieselbe Potenz x^n wird so oft in C auftreten, wie ihr Exponent aus drei entweder gleichen oder ungleichen Zahlen durch Addition resultieren kann. Es wird aber sein

$$C = x^3 + x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 4x^7 + 5x^8 + 7x^9 + 8x^{10} + 10x^{11} + etc.$$

jeder beliebige Term von welcher Reihe anzeigt, auf wie viele verschiedene Weisen der Exponent der beigefügten Potenz von x in drei entweder gleiche oder ungleiche Teile zerteilt werden kann. So wird aus diesem Term $8x^{10}$ erschlossen, dass die Zahl 10 auf acht verschiedene Weisen in drei Teile aufgetrennt werden kann, welche Partitionen sind

$$\begin{aligned} 10 &= 1+1+8; \quad & 10 &= 2+2+6 \\ 10 &= 1+2+7; \quad & 10 &= 2+3+5 \\ 10 &= 1+3+6; \quad & 10 &= 2+4+4 \\ 10 &= 1+4+5; \quad & 10 &= 3+3+4 \end{aligned}$$

Nachdem also diese Reihe C ins Unendliche fortgesetzt worden ist, wird sie zum Zerteilen aller Teile in drei Teile dienen.

§23 Auf die gleiche Weise wird die Größe D, weil sie alle Produkte aus je vier Termen der Reihe $A = x + x^2 + x^3 + x^4 + etc.$ enthält, wobei die Wiederholung desselben Termes nicht ausgeschlossen worden ist, aus der Reihe der Potenzen von x bestehen, deren Exponenten die Aggregate von vier entweder gleichen oder ungleichen Termen sind. In dieser Reihe wird also jede beliebige Potenz von x einen Koeffizienten solcher Art haben, der anzeigt, auf wie viele verschiedene Weisen ihr Exponent durch Addition von vier Zahlen resultieren kann. Es wird daher aufgefunden werden

$$D = x^4 + x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 5x^8 + 6x^9 + 9x^{10} + 11x^{11} + etc.$$

Diese Reihe wird also ins Unendliche fortgesetzt zeigen, auf wie viele Arten jede beliebige Zahl in vier Teile zerteilt werden kann. So wird aus dem Term $9x^{10}$ gefolgert, dass die Zahl 10 auf neun Arten in vier Teile aufgetrennt werden kann, welche Partitionen sind

$$10 = 1+1+1+7; \quad 10 = 1+2+2+5$$
$$10 = 1+1+2+6; \quad 10 = 1+2+3+4$$
$$10 = 1+1+3+5; \quad 10 = 1+3+3+3$$
$$10 = 1+1+4+4; \quad 10 = 2+2+2+4$$
$$10 = 2+2+3+3$$

§24 Indem auf diese Weise weiter fortgeschritten wird, wird klar zutage treten, dass der Buchstabe E eine so beschaffene Reihe von Potenzen von x sein wird, dass der Koeffizient jedes Termes anzeigt, auf wie viele verschiedene Weisen der Exponent von x in fünf Teile zerteilt werden kann. Es wird aber sein

$$E = x^5 + x^6 + 2x^7 + 3x^8 + 5x^9 + 7x^{10} + 10x^{11} + 13x^{12} + etc.$$

Auf die gleiche Weise wird der Wert des Buchstabens F der für die Partitionen in sechs Teile dienende Reihe sein und die Werte der Buchstaben G, H, I, etc. werden für die Partitionen in sieben, acht, neun, etc. anwendbar sein; es wird sein

$$F = x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 5x^{10} + 7x^{11} + 11x^{12} + 14x^{13} + etc.$$
$$G = x^7 + x^8 + 2x^9 + 3x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + 11x^{13} + 15x^{14} + etc.$$
$$etc.$$

Wenn diese Reihen mit jenen verglichen werden, welche wir in der Lösung des oberen Problems für dieselben Buchstaben gefunden haben, wird bald klar zutage treten, dass der ganze Unterschied nur in den Potenzen von x besteht und die Koeffizienten allein bei beiden gleichermaßen fortschreiten. Damit wir aber hier der Induktion keinen Platz einräumen, werden wir diese Übereinstimmung mit dem folgenden Beweis dartun.

§25 Wir wollen wie oben die zwei Werte von s betrachten, die sind

$$s = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + etc.$$
$$s = \frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)etc.}$$

dieser, wenn anstelle von z überall xz gesetzt wird, gehe in t über und es wird sein

$$t = 1 + Axz + Bx^2z^2 + Cx^3z^3 + Dx^4z^4 + Ex^5z^5 + etc.$$

$$t = \frac{1}{(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z)etc.}$$

Daher, wenn die letzten Werte von s und t miteinander verglichen werden, tritt bald klar zutage, dass $s = \frac{t}{(1-xz)}$ oder $t = (1-xz)s$ ist; weil dieselbe Relation auch zwischen den ersten Werten der Buchstaben s und t Bestand haben muss, wird sein

$$t = 1 + Axz + Bx^2z^2 + Cx^3z^3 + Dx^4z^4 + Ex^5z^5 + etc.$$

$$(1-xz)s = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + etc.$$
$$-xz - Axz^2 - Bxz^3 - Cxz^4 - Dxz^5 - etc.$$

Daher wird durch Gleichsetzen der homogenen Terme gefunden

$$A = \frac{x}{1-x}$$

$$B = \frac{Ax}{1-xx} = \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}$$

$$C = \frac{Bx}{1-x^3} = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$D = \frac{Cx}{1-x^4} = \frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

$$etc.$$

§26 Aus diesen Formeln wird eingesehen, dass diese Reihen nicht nur auch Rekurrente sind wie die Oberen, sondern auch das Bildungsgesetz bei jeder der beiden derselbe ist. Daher, wenn nach Vernachlässigen der Zähler festgelegt wird, dass ist

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \tfrac{1}{1-x}; & A &= \mathscr{A}x \\
\mathscr{B} &= \tfrac{1}{(1-x)(1-x^2)}; & B &= \mathscr{B}x^2 \\
\mathscr{C} &= \tfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}; & C &= \mathscr{C}x^3 \\
\mathscr{D} &= \tfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}; & D &= \mathscr{D}x^4
\end{aligned}$$

hängt die Partition jeder Zahl in wie viele entweder gleiche oder ungleiche Teile auch immer von der Bildung der Reihen $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}, etc.$ ab, die, wie wir zuvor beobachtet haben, anzeigen, auf wie viele verschiedene Weisen jegliche Zahl aus einigen anfänglichen Termen dieser Reihe $1, 2, 3, 4, 5, etc.$ durch Addition hervorgebracht werden kann. So, weil $B = \mathscr{B}x^2$ ist, kann jede Zahl $n + 2$ auf genauso viele Weisen in zwei Teile zerteilt werden, auf wie viele Arten die Zahl n aus den Zahlen 1 und 2 durch Addition erzeugt werden kann. Auf die gleiche Weise, weil $C = \mathscr{C}x^3$ ist, wird die Zahl $n + 3$ auf genauso viele Weisen in drei Teile zerteilt werden, auf wie viele Weisen die Zahl n durch Addition aus den Zahlen $1, 2, 3$ zusammengesetzt werden können wird. Und allgemein kann die Zahl $n + m$ auf so viele Weisen in m entweder geiche oder ungleiche Teile aufgeteilt werden, auf wie viele Weisen die Zahl n aus den Zahlen $1, 2, 3, ..., m$ durch Addition hervorgebracht werden kann.

§27 Es hängt also auch dieses Problem von der Lösung der Frage ab, in welcher gesucht wird, auf wie viele verschiedenen Weisen eine gegebene Zahl aus einigen Anfangstermen dieser Reihe $1, 2, 3, 4, etc.$ durch Addition resultieren kann. Wenn also wie oben (§19) diese Schreibweise $n^{(m)}$ die Anzahl der Arten bezeichnet, auf die die Zahl n aus den Zahlen $1, 2, 3, ..., m$ durch Addition zusammengesetzt werden kann oder auf die die Zahl n in wie viele Teile auch immer aufgeteilt werden kann, von denen keine größer sei als die Zahl m, wird auch dieses vorgelegte Problem mit Charakteren dieser Art aufgelöst werden können. Natürlich wird $n^{(m)}$ anzeigen, auf wie viele verschiedene Weisen die Zahl $n + m$ in m entweder gleiche oder ungleiche Teile zerteilt werden kann. Wenn daher gesucht wird, auf wie viele Arten die Zahl N in m entweder gleiche oder ungleiche Teile aufgeteilt werden kann, wird die gesuchte Anzahl an Arten diese Formel $(N - m)^{(m)}$ anzeigen. Wenn also dieses Problem mit dem Vorhergehenden verglichen wird, wird es klar sein, dass die Zahl $n + m$ auf genauso viele Weisen in m entweder gleiche oder ungleiche Anteile aufgeteilt werden kann, auf wie viele Weisen die Zahl $n + \frac{m(m+1)}{2}$ in m ungleiche Teile zerteilt werden kann.

§28 Die Lösung der beiden vom hochgeehrten Naudé vorgelegten Probleme wird also darauf zurückgeführt, dass bestimmt wird, auf wie viele verschiedenen Weisen irgendeine Zahl n aus diesen Zahlen $1, 2, 3, ..., m$ durch Addition hervorgebracht werden kann, oder dass der Wert des Charakters $n^{(m)}$ untersucht wird. Wie also dieses neue Problem aus den schon zuvor gefundenen Formeln am bequemsten aufgelöst werden kann, wollen wir sehen. Und zuerst wird freilich, weil jede beliebige Zahl auf eine einzige Weise aus lediglich Einheiten durch Addition gefunden werden kann,

$$n^{(1)} = 1$$

sein, welches selbe die erste Formel $\mathscr{A} = \frac{1}{1-x}$ oder die daher gebildete Reihe

$$\mathscr{A} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + etc.$$

selbstredend aufzeigt.

§29 Weil ja die Reihe $\mathscr{B} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ anzeigt, auf wie viele Weisen eine gewisse Zahl aus den Zahlen 1 und 2 durch Addition gebildet werden kann, wird in dieser Reihe der Koeffizient der Potenz $= n^{(2)}$ sein; denn es ist dieser Ausdruck angenommen worden, um zu bezeichnen, auf wie viele Weisen die Zahl n aus den Zahlen 1 und 2 durch Addition gebildet werden kann. Daher wird also sein

$$\mathscr{B} = 1 + 1^{(2)}x + 2^{(2)}x^2 + 3^{(2)}x^3 + 4^{(2)}x^4 + 5^{(2)}x^5 + 6^{(2)}x^6 + etc.$$

und in Form von diesem Ausdruck wird sein

$$\mathscr{A} = 1 + 1^{(1)}x + 2^{(1)}x^2 + 3^{(1)}x^3 + 4^{(1)}x^4 + 5^{(1)}x^5 + 6^{(1)}x^6 + etc.$$

Weil darauf aber $\mathscr{A} = \frac{1}{1-x}$ und $\mathscr{B} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ ist, wird $\mathscr{A} = \mathscr{B}(1-x^2)$ sein, woher zwischen diesen Reihen die folgende Relation entspringt

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= 1 + 1^{(1)}x + 2^{(1)}x^2 + 3^{(1)}x^3 + 4^{(1)}x^4 + 5^{(1)}x^5 + 6^{(1)}x^6 + etc. \\ \mathscr{B} - \mathscr{B}x^2 &= 1 + 1^{(2)}x + 2^{(2)}x^2 + 3^{(2)}x^3 + 4^{(2)}x^4 + 5^{(2)}x^5 + 6^{(2)}x^6 + etc. \\ &\qquad\qquad - x^2 - 1^{(2)}x^3 - 2^{(2)}x^4 - 3^{(2)}x^5 - 4^{(2)}x^6 - etc. \end{aligned}$$

Wenn daher daraus eine Gleichsetzung der homogenen Terme durchgeführt wird, wird sein

$$\begin{array}{lll} 1^{(2)} = 1^{(1)}; & 4^{(2)} = 4^{(1)} + 2^{(2)}; & 7^{(2)} = 7^{(1)} + 5^{(2)} \\ 2^{(2)} = 2^{(1)} + 1; & 5^{(2)} = 5^{(1)} + 3^{(2)}; & 8^{(2)} = 8^{(1)} + 6^{(2)} \\ 3^{(2)} = 3^{(1)} + 1^{(2)}; & 6^{(2)} = 6^{(1)} + 4^{(2)}; & 9^{(2)} = 9^{(1)} + 7^{(2)} \end{array}$$

§30 Allgemein wird also sein

$$n^{(2)} = n^{(1)} + (n-2)^{(2)}$$

Weil also $n^{(1)} = 1$ ist, wird $n^{(2)} = 1 + (n-2)^{(2)}$ sein; und so werden die Koeffizienten der Reihe $\mathscr{B}$ so bestimmt werden, dass jeder letzte Term dem Vorletzten um die Einheit vermehrt gleich ist. Oder weil alle Koeffizienten der Reihe $\mathscr{A}$ Einheiten sind, wird aus der Reihe $\mathscr{A}$ auf die folgende Weise die Reihe $\mathscr{B}$ gebildet werden:

$$\mathscr{A} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + etc.$$

$$1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4$$

$$\mathscr{B} = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 4x^7 + 5x^8 + 5x^9 + etc.$$

Weil die zwei Anfangsterme der Reihe $\mathscr{B}$ aus $1 + x$ bestehen, werden sie unter dem dritten und vierten Term der Reihe $\mathscr{A}$ geschrieben und daher werden durch Addition der dritte und vierte Term der Reihe $\mathscr{B}$ entspringen, die weiter unter dem fünften und sechsten Term der Reihe $\mathscr{A}$ geschrieben und addiert den fünften und sechsten Term der Reihe $\mathscr{B}$ geben werden und auf diese Weise wird die Reihe $\mathscr{B}$, so weit wie es beliebt, sehr leicht fortgesetzt. Es tritt aber klar zutage, dass daher $n^{(2)} = \frac{1}{2}(n{+1 \atop +2})$ ist: wenn natürlich n eine ungerade Zahl ist, wird $n^{(2)} = \frac{1}{2}(n+1)$ sein, wenn aber n eine gerade Zahl ist, wird $n^{(2)} = \frac{1}{2}(n+2)$ sein.

§31 Weil weiter $\mathscr{C} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$ ist, wird $\mathscr{B} = \mathscr{C}(1-x^3)$ sein, woher, weil der allgemeine Term der Reihe $\mathscr{C}$ $n^{(3)}x^n$ ist, die folgende Relation zwischen den Reihen $\mathscr{B}$ und $\mathscr{C}$ entstehen wird:

$$\mathscr{B} = 1 + 1^{(2)}x + 2^{(2)}x^2 + 3^{(2)}x^3 + 4^{(2)}x^4 + 5^{(2)}x^5 + 6^{(2)}x^6 + etc.$$

$$\mathscr{C} - \mathscr{C}x^3 = 1 + 1^{(3)}x + 2^{(3)}x^2 + 3^{(3)}x^3 + 4^{(3)}x^4 + 5^{(3)}x^5 + 6^{(3)}x^6 + etc.$$
$$-1x^3 - 1^{(3)}x^4 - 2^{(3)}x^5 - 3^{(3)}x^6 - etc.$$

Wenn hier eine Gleichung zwischen den homogenen Termen aufgestellt wird, wird sein

$$1^{(3)} = 1^{(2)};\quad 4^{(3)} = 4^{(2)} + 1^{(3)};\quad 7^{(3)} = 7^{(2)} + 4^{(3)}$$
$$2^{(3)} = 2^{(2)};\quad 5^{(3)} = 5^{(2)} + 2^{(3)};\quad 8^{(3)} = 8^{(2)} + 5^{(3)}$$
$$3^{(3)} = 3^{(2)} + 1;\quad 6^{(3)} = 6^{(2)} + 3^{(3)};\quad 9^{(3)} = 9^{(2)} + 6^{(3)}$$

und allgemein

$$n^{(3)} = n^{(2)} + (n-3)^{(3)}$$

Die Reihe $\mathscr{C}$ wird also aus der Reihe $\mathscr{B}$ und ihren vorhergehenden Termen auf die folgende Weise leicht gebildet. Wir wollen aber die Potenz von x weglassen, weil die ganze Aufgabe in den Koeffizienten besteht:

$\mathscr{B} =$	1	+1	+2	+2	+3	+3	+4	+4	+5	+5	+6	+6	*etc.*
				1	+1	+2	+3	+4	+5	+7	+8	+10	*etc.*
$\mathscr{C} =$	1	+1	+2	+3	+4	+5	+7	+8	+10	+12	+14	+16	*etc.*

Natürlich werde unter die Reihe $\mathscr{B}$ die Reihe $\mathscr{C}$ geschrieben, indem der Anfang unter dem vierten Term gemacht wird, und je nachdem wie auf diese Weise die Reihe $\mathscr{C}$ durch Addition entspringt, so wird sie auch unter der Reihe $\mathscr{B}$ fortgesetzt werden.

§32 Weil darauf $\mathscr{D} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$ ist, wird $\mathscr{C} = \mathscr{D}(1-x^4)$ sein. Daher wird auf die gleiche Weise, die wir bisher gebraucht haben, aufgefunden werden:

$$1^{(4)} = 1^{(3)};\quad 4^{(4)} = 4^{(3)} + 1;\quad 7^{(4)} = 7^{(3)} + 3^{(4)}$$
$$2^{(4)} = 2^{(3)};\quad 5^{(4)} = 5^{(3)} + 1^{(4)};\quad 8^{(4)} = 8^{(3)} + 4^{(4)}$$
$$3^{(4)} = 3^{(3)};\quad 6^{(4)} = 6^{(3)} + 2^{(4)};\quad 9^{(4)} = 9^{(3)} + 5^{(4)}$$

und allgemein

$$n^{(4)} = n^{(3)} + (n-4)^{(4)}$$

Indem auf die gleiche Weise weiter fortgeschritten wird, wird erschlossen werden, dass sein wird

$$n^{(5)} = n^{(4)} + (n-5)^{(5)}$$

$$n^{(6)} = n^{(5)} + (n-6)^{(6)}$$

$$n^{(7)} = n^{(6)} + (n-7)^{(7)}$$

Allgemein wird also daher erschlossen werden, dass sein wird

$$n^{(m)} = n^{(m-1)} + (n-m)^{(m)}$$

wo es anzumerken ist, wenn $n < m$ ist, dass der Term $(n-m)^{(m)}$ völlig verschwindet, wenn aber $n = m$ ist, auch wenn $n - m = 0$ ist, dennoch der Term $(n-m)^{(m)}$ die Einheit wert ist. Wenn darauf $n - m = 1$ ist, wird auch $(n-m)^{(m)} = 1$ sein. Es wird also immer so $0^{(m)} = 1$ wie $1^{(m)} = 1$ und $n^{(1)} = 1$ sein.

§33 Nach Anmerken dieser Relationen zwischen den Reihen $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}, etc.$ werden sie sehr leicht gebildet und, so weit wie es beliebt, fortgesetzt, welche Operationen durch das hier angefügte Schema offenbar werden wird:

	$1,$	$x,$	$x^2,$	$x^3,$	$x^4,$	$x^5,$	$x^6,$	$x^7,$	$x^8,$	$x^9,$	$x^{10},$	$x^{11},$	$x^{12},$	$x^{13},$	$x^{14},$
$\mathscr{A} =$	1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
			1	+1	+2	+2	+3	+3	+4	+4	+5	+5	+6	+6	+7
$\mathscr{B} =$	1	+1	+2	+2	+3	+3	+4	+4	+5	+5	+6	+6	+7	+7	+8
				1	+1	+2	+3	+4	+5	+7	+8	+10	+12	+14	+16
$\mathscr{C} =$	1	+1	+2	+3	+4	+5	+7	+8	+10	+12	+14	+16	+19	+21	+24
					1	+1	+2	+3	+5	+6	+9	+11	+15	+18	+23
$\mathscr{D} =$	1	+1	+2	+3	+5	+6	+9	+11	+15	+18	+23	+27	+34	+39	+47
						1	+1	+2	+3	+5	+7	+10	+13	+18	+23
$\mathscr{E} =$	1	+1	+2	+3	+5	+7	+10	+13	+18	+23	+30	+37	+49	+57	+70
							1	+1	+2	+3	+5	+7	+11	+14	+20
$\mathscr{F} =$	1	+1	+2	+3	+5	+7	+11	+14	+20	+26	+35	+44	+60	+71	+90
								1	+1	+2	+3	+5	+7	+11	+15
$\mathscr{G} =$	1	+1	+2	+3	+5	+7	+11	+15	+21	+28	+38	+49	+67	+82	+105
									1	+1	+2	+3	+5	+7	+11
$\mathscr{H} =$	1	+1	+2	+3	+5	+7	+11	+15	+22	+29	+40	+52	+72	+89	+116
										1	+1	+2	+3	+5	+7
$\mathscr{I} =$	1	+1	+2	+3	+5	+7	+11	+15	+22	+30	+41	+54	+73	+94	+123
											1	+1	+2	+3	+5
$\mathscr{K} =$	1	+1	+2	+3	+5	+7	+11	+15	+22	+30	+42	+55	+75	+97	+128
												1	+1	+2	+3
$\mathscr{L} =$	1	+1	+2	+3	+5	+7	+11	+15	+22	+30	+42	+56	+76	+99	+131
													1	+1	+2
$\mathscr{M} =$	1	+1	+2	+3	+5	+7	+11	+15	+22	+30	+42	+56	+77	+100	+133
														1	+1
$\mathscr{N} =$	1	+1	+2	+3	+5	+7	+11	+15	+22	+30	+42	+56	+77	+101	+134

§34 Auf diese Weise ist die hier beigefügte Tabelle allein durch fortwährende Addition konstruiert worden und die Konstruktionsweise ist aus der Betrachtung so klar, dass sie keiner umfassenderen Erklärung bedarf. Mithilfe dieser Tabelle wird also unmittelbar dieses Problem aufgelöst, in welchem gefragt wird, *auf wie viele verschiedene Weisen eine Zahl n aus diesen Zahlen 1, 2, 3, ..., m durch Addition hervorgebracht werden kann.*

Wenn also gefragt wird, auf wie viele Weisen die Zahl 10 aus diesen Zahlen $1, 2$ und 3 durch Addition entspringen kann, wird $n = 10$ und $m = 3$ sein und aus der Tabelle wird die Anzahl der Arten $= 14$ aufgefunden, welche Arten sind

$$
\begin{array}{ll}
10 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1; & 10 = 1+1+1+2+2+3 \\
10 = 1+1+1+1+1+1+1+1+2; & 10 = 1+1+2+2+2+2 \\
10 = 1+1+1+1+1+1+1+3; & 10 = 1+1+2+3+3 \\
10 = 1+1+1+1+1+1+2+2; & 10 = 1+2+2+2+3 \\
10 = 1+1+1+1+1+2+3; & 10 = 1+3+3+3 \\
10 = 1+1+1+1+2+2+2; & 10 = 2+2+2+2+2 \\
10 = 1+1+1+1+3+3; & 10 = 2+2+3+3
\end{array}
$$

Wenn gesucht wird, auf wie viele verschiedene Arten die Zahl 25 aus den Zahlen $1, 2, 3, 4, 5$ durch Addition hervorgebracht werden kann, wird nach Setzen von $n = 25$ und $m = 5$ aus der Tabelle die Anzahl der Arten $= 377$ aufgefunden werden.

Wenn gesucht wird, auf wie viele verschiedenen Weisen die Zahl 50 aus diesen Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ durch Addition resultieren kann, wird nach Festlegen von $n = 50$ und $m = 10$ die Anzahl der Arten $= 72740$ gefunden.

Wenn entweder die vorgelegte Zahl oder die Anzahl der Teile größer ist als in der Tabelle, dan wird nichtsdestoweniger die Anzahl der Fälle aus der Tabelle mit Hilfe der oben gefundenen Formeln erschlossen werden können. Wie wenn gesucht wird, auf wie viele Weisen die Zahl 60 aus diesen Zahlen $1, 2, 3, ..., 20$ durch Addition resultieren kann, wird $n = 60$ und $m = 20$ sein und es wird der Wert der Formel $60^{(20)}$ gesucht. Es ist in der Tat $60^{(20)} = 60^{(19)} + 40^{(20)}$, aber $60^{(19)} = 60^{(18)} + 41^{(19)}$ und weiter $60^{(18)} = 60^{(17)} + 42^{(18)}$ und $60^{(17)} = 60^{(16)} + 43^{(17)}$ und so weiter. Daher wird schließlich sein $60^{(20)} = 40^{(20)} + 41^{(19)} + 42^{(18)} + 43^{(17)} + 44^{(16)} + ... + 59^{(1)}$, welche Zahlen aus der

Tabelle gesammelt 791131 geben; und auf so viele Weisen kann die Zahl 60 aus den Zahlen $1, 2, 3, ..., 20$ durch Addition gefunden werden.

§35 Mit Hilfe dieser Tabelle können darauf die Reihen-Probleme des hochgeehrten Naudé bequem aufgelöst werden. Und wenn freilich zuerst gesucht wird, auf wie viele verschiedene Weisen eine gegebene Zahl N in m einander ungleiche Teile zerteilt werden kann, wird dies, wie wir oben (§19) gezeigt haben, auf so viele Weisen geschehen, wie Einheiten in diesem Ausdruck $(N - \frac{m(m+1)}{2})^{(m)}$ enthalten sind, wie die Tabelle anzeigt.
Den Gebrauch dieser Tabelle wollen wir an einigen Beispielen zeigen.

I. Es werde gesucht, auf wie viele verschiedene Weisen die Zahl 25 in 5 ungleiche Teile zerteilt werden kann.
Es wird also hier $N = 25$ und $m = 5$ sein, woher $\frac{m(m+1)}{2} = 15$ ist, und die Antwort wird die Formel $10^{(5)}$ enthalten, die aus der Tabelle 30 ist, so die Partition auf 30 Arten durchgeführt werden kann.
II. Es werde gesucht, auf wie viele Arten die Zahl 50 in 7 ungleiche Teile zerteilt werden kann.
Hier ist $N = 50$, $m = 7$ und $N - \frac{m(m+1)}{2} = 22$, woher die gesuche Anzahl der Partitionen $22^{(7)} = 522$ ist.
III. Es werde gesucht, auf wie viele verschiedene Weisen die Zahl 100 in 10 ungleiche Teile zerteilt werden kann.
Weil $N = 100$ und $m = 10$ ist, wird $N - \frac{m(m+1)}{2} = 45$ sein und die Anzahl der Partitionen wird $45^{(10)} = 33401$ aufgefunden werden.
IV. Es werde gesucht, auf wie viele verschiedene Weisen die Zahl 256 in 20 ungleiche Teile zerteilt werden kann.
Wegen $N = 256$ und $m = 20$ wird $N - \frac{m(m+1)}{2} = 46$ sein und die Anzahl der Partitionen wird $46^{(20)} = 96271$ werden.
V. Es werde gesucht, auf wie viele verschiedene Weisen die Zahl 270 in 20 ungleiche Teile zerteilt werden kann.
Wegen $N = 270$ und $m = 20$ wird $N - \frac{m(m+1)}{2} = 60$ sein und daher wird die gesuchte Anzahl der Partitionen $60^{(20)}$, deren Wert wir zuvor gefunden haben, $= 791131$ zu sein. Auf so viele verschiedene Weisen kann also die Zahl 270 in 20 ungleiche Teile zerteilt werden.

§36 Auf die gleiche Weise wird aus der Tabelle auch das andere Problem aufgelöst werden, in dem gefragt wurde, auf wie viele verschiedene Arten

die Zahl N in m Teile, nachdem die Gleichheit der Teile nicht ausgeschlossen worden ist, zerteilt werden kann.
Oben (§27) haben wir nämlich gezeigt, dass die gesuchte Anzahl der Partitionen in dieser Formel $(N-m)^{(m)}$ enthalten ist, welcher Wert sich aus der Tabelle entnehmen lässt. Damit die Lösung leichter eingesehen wird, werden wir einige Beispiele hinzufügen.
I. Es werde gesucht, auf wie viele verschiedene Weisen die Zahl 25 in 5 entweder gleiche oder ungleiche Teile zerteilt werden kann.
Hier ist $N = 25$ und $m = 5$, woher $N - m = 20$ ist, und die Anzahl der Partitionen wird $20^{(5)} = 192$ sein.
II. Es werde gesucht, auf wie viele Arten die Zahl 50 in 7 entweder gleiche oder ungleiche Teile zerteilt werden kann.
Wegen $N = 50$ und $m = 7$ wird $N - m = 43$ sein und die gesuche Anzahl an Partitionen wird $43^{(7)} = 8946$ werden.
III. Es werde gesucht, auf wie viele verschiedene Weisen die Zahl 50 in 10 entweder gleiche oder ungleiche Teile zerteilt werden kann.
Wegen $N = 50$ und $m = 10$ wird $N - m = 40$ sein und die Anzahl der Partitionen wird $40^{(10)} = 16928$ sein.
IV. Es werde gesucht, auf wie viele verschiedene Arten die Zahl 60 in 12 entweder gleiche oder ungleiche Teile zerteilt werden kann.
Weil $N = 60$ und $m = 12$ ist, wird $N - m = 48$ sein und die gesuchte Anzahl der Partitionen wird $48^{(12)} = 74287$ sein.
V. Es werde gesucht, auf wie viele verschiedene Weisen die Zahl 80 in 20 entweder gleiche oder ungleiche Teile zerteilt werden kann.
Es wird $N = 80$ und $m = 20$ sein, woher $N - m = 60$ ist, und die Anzahl der Partitionen wird $60^{(20)} = 791131$ sein.

§37 In den horizontalen Reihen, welche die Tabelle darbietet, ist die Übereinstimmung zwischen den Anfangstermen dieser Reihe, des Merkens würdig, die umso weiter fortschreitet, umso größer die Zahl m war. Und so wird die fünfzehnte Reihe ihre fünfzehn Anfangsterme mit allen folgenden Reihen gemeinsam haben. Daher wird die Reihe gefunden werden können, die der Zahl m ins Unendliche vermehrt entspricht, die also die Werte dieser Formel $n^{(\infty)}$ enthalten wird, die bezeichnet, auf wie viele verschiedene Weisen die Zahl n aus vollkommen allen ganzen Zahlen durch Addition erzeugt werden kann. Diese Frage scheint also würdig, dass sie sorgfältig entwickelt wird. Weil $n^{(\infty)}$ ganz und gar die Partitionen der Zahl n für irgendeine Anzahl an

Teilen zugleich genommen umfassen wird, wird $n^{(\infty)}$ das Aggregat aus den Anzahlen der Partitionen in $1, 2, 3, 4, \ldots$ bis hin zu n entweder gleichen oder ungleichen Teilen sein, weil die Zahl n nicht in mehr als n Teile aufgetrennt werden kann. Deswegen wird sein

$$n^{(\infty)} = (n-1)^{(1)} + (n-2)^{(2)} + (n-3)^{(3)} + (n-4)^{(4)} + (n-5)^{(5)} + \ldots + (n-n)^{(n)}$$

In welcher Reihe so der erste Term $(n-1)^{(1)}$, der die Teilung in einem Teil bezeichnet, wie der lezte Term $(n-n)^{(n)}$, der die Teilung in n Teile bezeichnet, die Einheit ist. Daher kann also die Reihe der Zahlen $n^{(\infty)}$, die am Ende der Tabelle dargeboten wird, durch Addition der Terme aus den oberen Reihen gefunden werden. So wird sein

$$6^{(\infty)} = 5^{(1)} + 4^{(2)} + 3^{(3)} + 2^{(4)} + 1^{(5)} + 0^{(6)} = 1 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 = 11$$

welche Zahl man in der untersten Reihe unter der Zahl 6 hat.

§38 Die Operation kann aber mit Hilfe des oben (§32) gefunden Lemmas $n^{(m)} = n^{(m-1)} + (n-m)^{(m)}$ zusammengezogen werden, woher wird

$$n^{(m)} - n^{(m-1)} = (n-m)^{(m)}.$$

Weil nämlich ist

$$n^{(\infty)} = (n-1)^{(1)} + (n-2)^{(2)} + (n-3)^{(3)} + (n-4)^{(4)} + (n-5)^{(5)} + (n-6)^{(6)} + etc.$$

wird, wenn überall anstelle von n $n-1$ geschrieben wird, sein

$$(n-1)^{(\infty)} = (n-1)^{(0)} + (n-2)^{(1)} + (n-3)^{(2)} + (n-4)^{(3)} + (n-5)^{(4)} + (n-6)^{(5)} + etc.$$

wo der Gleichmäßigkeit wegen der Term $(n-1)^{(0)}$ vorangestellt wird, dessen Wert $= 0$ ist. Wenn also die untere Reihe von der Oberen subtrahiert wird, wird mit Hilfe des Lemmas hervorgehen

$$n^{(\infty)} - (n-1)^{(\infty)}$$

$$= (n-2)^{(1)} + (n-4)^{(2)} + (n-6)^{(3)} + (n-8)^{(4)} + (n-10)^{(5)} + (n-12)^{(6)} + etc.$$

und wo wird jeder Term $n^{(\infty)}$ mit Hilfe des Vorhergehenden durch Addition von doppelt so wenigen Termen wie zuvor gefunden werden. Es wird also eines Beispiels wegen sein

$$12^{(\infty)} = 11^{(\infty)} + 10^{(1)} + 8^{(2)} + 6^{(3)} + 4^{(4)} + 2^{(5)} + 0^{(6)}$$

oder

$$12^{(\infty)} = 56 + 1 + 5 + 7 + 5 + 2 + 1 = 77$$

welche Zahl auch für den Wert von $12^{(\infty)}$ in der Tabelle aufgefunden wird.

§39 Auf die gleiche Weise kann diese Operation weiter zusammengezogen werden; weil nämlich ist

$$n^{(\infty)} - (n-1)^{(\infty)} = (n-2)^{(1)} + (n-4)^{(2)} + (n-6)^{(3)} + (n-8)^{(4)} + (n-10)^{(5)} + etc.$$

werden wir, wenn wir anstelle von n $n-2$ setzen, haben

$$(n-2)^{(\infty)} - (n-3)^{(\infty)}$$
$$= (n-2)^{(0)} + (n-4)^{(1)} + (n-6)^{(2)} + (n-8)^{(3)} + (n-10)^{(4)} + etc.$$

wo wir der Gleichmäßigkeit wegen den Term $(n-2)^{(0)} = 0$ vorausschicken. Indem nun diese Reihe von der Oberen subtrahiert wird, werden wir mit Hilfe des Lemmas erhalten

$$n^{(\infty)} - (n-1)^{(\infty)} - (n-2)^{(\infty)} + (n-3)^{(\infty)}$$
$$= (n-3)^{(1)} + (n-6)^{(2)} + (n-9)^{(3)} + (n-12)^{(4)} + (n-15)^{(5)} + etc.$$

Wenn also diese Reihe $= P$ genann wird, wird sein

$$n^{(\infty)} = (n-1)^{(\infty)} + (n-2)^{(\infty)} - (n-3)^{(\infty)} + P$$

Es ist also in der gesuchten Reihe vonnöten, um den Term $n^{(\infty)}$ zu bestimmen, außer dem Wert von P die drei vorhergehenden Terme zu kennen. Indem auf diese Weise fortgeschritten wird, wird die Größe P schließlich verschwinden und jeder beliebige Term dieser Reihe wird allein durch die Vorhergehenden bestimmt werden, welches die Eigenschaft von rekurrenten Reihen ist.

§40 Dass aber diese Reihe tatsächlich rekurrent ist, ist aus ihrer Entstehung offenbar, weil sie aus der Entwicklung dieses Bruches entspringt

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)etc.}$$

Man wird also die Relationsskala dieser Reihe haben, wenn dieser Nenner tatsächlich durch Multiplikation entwickelt wird. Nachdem aber diese Multiplikation durchgeführt worden ist, wird der Nenner auf die folgende Weise ausgedrückt gefunden werden:

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + x^{57} - x^{70} - x^{77} + etc.$$

Welchem Bildungsgesetz diese Potenzen von x folgen, scheint aus der Bildung selbst kaum bestimmt werden zu können; dannoch tritt indess aus der Betrachtung bald klar zutage, dass abwechselnd je zwei Terme positiv und negativ sind. Und nicht weniger werden die Exponenten von x beobachtet, einem gewissen Bildungsgesetz zu folgen, woher ihr allgemeiner Term erschlossen wird, $x^{\frac{n(3n\pm1)}{2}}$ zu sein. Es tauchen natürlich keine anderen Potenzen auf, außer denen deren Exponenten in dieser Formel $\frac{3nn\pm n}{2}$ enthalten sind, und zwar so, dass die Potenzen, die aus ungeraden für n angenommenen Zahlen entspringen, das Vorzeichen $-$ haben, welche hingegen aus geraden Zahlen gebildet werden, das Vorzeichen $+$ haben.

§41 Diese Form verschafft uns also die Relationsskala der gesuchten Reihe, mit welcher feststeht, dass sein wird

$$n^{(\infty)} = (n-1)^{(\infty)} + (n-2)^{(\infty)} - (n-5)^{(\infty)} - (n-7)^{(\infty)} + (n-12)^{(\infty)} + (n-15)^{(\infty)}$$
$$-(n-22)^{(\infty)} - (n-26)^{(\infty)} + (n-35)^{(\infty)} + (n-40)^{(\infty)} - (n-51)^{(\infty)} - (n-57)^{(\infty)} + etc.$$

Dass aber dieses Bildungsgesetz der Progression Geltung hat, wird dem es Ausprobierenden leicht klarwerden. Ist nämlich $n = 30$; wird aufgefunden werden, dass sein wird

$$30^{(\infty)} = (29)^{(\infty)} + (28)^{(\infty)} - (25)^{(\infty)} - (23)^{(\infty)} + (18)^{(\infty)} + (15)^{(\infty)} - (8)^{(\infty)} - (4)^{(\infty)}$$

es ist nämlich, nachdem diese Zahlen aus der Tabelle entnommen worden sind

$$5604 = 4565 + 3718 - 1958 - 1255 + 385 + 176 - 22 - 5$$

Und auf diese Weise kann diese Reihe, so weit wie es beliebt, fortgesetzt werden.

§42 Weil ja aber die Reihe für den Wert $m = 20$ schon gebildet worden ist, wird aus ihr um einiges leichter die gesuchte Reihe für den Wert $m = \infty$ gefunden werden können. Weil nämlich die Reihe $n^{(20)}$ aus der Entwicklung dieses Bruches gebildet wird

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)...(1-x^{20})}$$

die Reihe $n^{(\infty)}$ hingegen aus der Entwicklung dieses Bruches

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)...(1-x^{\infty})}$$

ist es offenbar, wenn diese Reihe mit dieser multipliziert wird

$$(1-x^{21})(1-x^{22})(1-x^{23})(1-x^{24})(1-x^{25})etc.$$

oder mit

$$1-x^{21}-x^{22}-x^{23}-x^{24}-x^{25}-x^{26}-x^{27}-etc.$$
$$+x^{43}+x^{44}+2x^{45}+2x^{46}+3x^{47}+3x^{48}+4x^{49}+4x^{50}+etc.$$
$$-x^{66}-x^{67}-2x^{68}-3x^{69}-4x^{70}-5x^{71}-7x^{72}-8x^{73}-10x^{74}-etc.$$
$$+x^{90}+x^{91}+2x^{92}+3x^{93}+5x^{94}+6x^{95}+9x^{96}+11x^{97}+15x^{98}+etc.$$
$$-x^{115}-x^{116}-2x^{117}-3x^{118}-5x^{119}-7x^{120}-10x^{121}-13x^{122}-18x^{123}-etc.$$
$$etc.$$

dass dann die Erste hervorgehen muss. Daher wird gefolgert, dass sein wird

$$n^{(20)}=n^{(\infty)}-(n-21)^{(\infty)}-(n-22)^{(\infty)}-(n-23)^{(\infty)}-(n-24)^{(\infty)}-etc.$$
$$+(n-43)^{(\infty)}+(n-44)^{(\infty)}+2(n-45)^{(\infty)}+2(n-46)^{(\infty)}+3(n-47)^{(\infty)}+etc.$$
$$-(n-66)^{(\infty)}-(n-67)^{(\infty)}-2(n-68)^{(\infty)}-3(n-69)^{(\infty)}-4(n-70)^{(\infty)}-etc.$$
$$+(n-90)^{(\infty)}+(n-91)^{(\infty)}+2(n-92)^{(\infty)}+3(n-93)^{(\infty)}+5(n-94)^{(\infty)}+etc.$$
$$-(n-115)^{(\infty)}-(n-116)^{(\infty)}-2(n-117)^{(\infty)}-3(n-118)^{(\infty)}-5(n-119)^{(\infty)}-etc.$$
$$etc.$$

die Koeffizienten welcher Reihen nach der Oberen für die Partition der Zahlen in $2,3,4,5,6,etc.$ Teile dienenden Reihen fortschreiten.

§43 Es bezeichne $\int(n-21)^{(\infty)}$ die Summe aller Terme der Reihe $n^{(\infty)}$, die ist

$$1+1+2+3+5+7+11+15+22+30+etc.$$

einschließlich bis hin zum Term $(n-21)^{(\infty)}$; und auf die gleiche Weise sei allgemein $\int p^{(\infty)}$ die Summe aller Terme derselben Reihe einschließlich bis hin zum Term $p^{(\infty)}$; weil diese Reihe nacheinander leicht gebildet werden, wird sein

$$n^{(20)}=n^{(\infty)}-\int(n-21)^{(\infty)}+\int(n-43)^{(\infty)}+\int(n-45)^{(\infty)}+\int(n-47)^{(\infty)}+etc.$$
$$-\int(n-66)^{(\infty)}-\int(n-68)^{(\infty)}-\int(n-69)^{(\infty)}-\int(n-70)^{(\infty)}-etc.$$

$$+\int(n-90)^{(\infty)}+\int(n-92)^{(\infty)}+\int(n-93)^{(\infty)}+2\int(n-94)^{(\infty)}+etc.$$

$$etc.$$

Und daher wird also sein

$$n^{(\infty)}=n^{(20}+\int(n-21)^{(\infty)}-\int(n-43)^{(\infty)}-\int(n-45)^{(\infty)}-\int(n-47)^{(\infty)}-etc.$$

$$+\int(n-66)^{(\infty)}+\int(n-68)^{(\infty)}+\int(n-69)^{(\infty)}+\int(n-70)^{(\infty)}+etc.$$

$$-\int(n-90)^{(\infty)}-\int(n-92)^{(\infty)}-\int(n-93)^{(\infty)}-2\int(n-94)^{(\infty)}-etc.$$

Mit Hilfe dieser Formel, wenn nicht n eine sehr große Zahl ist, wird aus der für die Partition in 20 Teile dienenden Reihe die Reihe $n^{(\infty)}$ selbst leicht bestimmt und auf diese Weise wird sie in der konstruierten Tabelle dargeboten, weil überall der Übertrag der Terme $n^{(\infty)}$ über die Terme $n^{(20)}$ angegeben ist.

§44 Nachdem also diese Reihe konstruiert worden ist, wird nach Vorlegen irgendeiner Zahl bestimmt werden können, auf wie viele Weisen sie ganz und gar in Teile zerteilt werden kann. So tritt es klar zutage, dass die Zahl 10 insgesamt auf 42 Arten aus einer Addition resultieren kann; und die Zahl 50 wird auf so viele Weisen, wie es die Zahl 831820 anzeigt, durch Addition erzeugt werden können. Wenn aber größere Zahlen vorgelegt werden, dann muss diese hier dargebotene Tabelle weiter fortgesetzt werden oder für jeden Fall die gewünschte Zahl durch die hier angegebenen Vorschriften untersucht werden. In diesen Teilen wird aber die Gleichheit der Teile nicht ausgeschlossen. Daher entspringt das neue Problem, in dem für jegliche vorgelegte Zahl die Anzahl aller Partitionen in einander ungleiche Teile gesucht wird, welches Problem mit Hilfe dieses Ausdrucks aufgelöst werden wird

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)etc.$$

Nachdem nämlich die Faktoren miteinander multipliziert worden sind, wird die Reihe entspringen, in welcher jeder beliebige Term zeigen wird, auf wie viele verschiedene Arten der Exponent von x in einander ungleiche Teile zerteilt werden kann.

§45 Wenn daher aber dieses Produkt tatsächlich entwickelt wird, wird diese Reihe aufgefunden werden

$$1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+8x^9+10x^{10}+12x^{11}+15x^{12}$$

$$+18x^{13}+22x^{14}+27x^{15}+32x^{16}+38x^{17}+46x^{18}+54x^{19}+64x^{20}+76x^{21}+89x^{22}+etc.$$

Weil diese das Produkt aus unendlich vielen, einem so einfachen Gesetz folgenden Faktoren ist, scheint es der ganzen Aufmerksamkeit würdig. Und zuerst ist es freilich offenbar, dass die Koeffizienten dieser Terme meistens gerade sind und allein die ungerade sind, die mit Potenzen solcher Art von x verbunden sind, deren Exponenten in dieser Form $\frac{3nn\pm n}{2}$ enthalten sind; die Begründung dieses Phänomens ist diesselbe, wie dies jenes, welches wir über die Exponenten derselben Form $\frac{3nn\pm n}{2}$ in der Entwicklung des Produktes $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)etc.$ beobachtet haben. Weil aber ist

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)etc. = \frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)etc.}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)etc.}$$

ist es klar, dass die zuvor gefundene Reihe mit diesem Bruch ausgedrückt wird

$$\frac{1-x^2-x^4+x^{10}+x^{14}-x^{24}-x^{30}+x^{44}+x^{52}-x^{70}-x^{80}+etc.}{1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+v^{26}-x^{35}-x^{40}+etc.}$$

woher sie zur Art der rekurrenten Reihen umgestaltet werden können wird.

§46 Diese Reihe wird aber ohne Zweifel am Leichtesten aus ihrer natürlichen Beschaffenheit selbst konstruiert, nach welcher der Koeffizient jedes beliebigen Termes anzeigen muss, auf wie viele verschiedene Weisen der Exponent von x in ungleiche Teile zerteilt werden kann. Es sei N der Koeffizient der Potenz x^n in dieser Reihe und es wird sein

$$N=(n-1)^{(1)}+(n-3)^{(2)}+(n-6)^{(3)}+(n-10)^{(4)}+(n-15)^{(5)}+(n-21)^{(6)}+etc.$$

denn $(n-1)^{(1)} = 1$ zeigt an, dass die Zahl n auf eine einzige Weise aus einem Teil besteht, $(n-3)^{(2)}$ zeigt, auf wie viele Weisen die Anzahl n in zwei ungleiche Teile, $(n-6)^{(3)}$ zeigt, auf wie viele Weisen die Zahl n in drei ungleiche Teile aufgeteilt werden kann, un so weiter; daher kann auch diese Reihe mit Hilfe der gegebenen Tabelle, so weit wie es beliebt, fortgesetzt werden. Im Übrigen ist hier des Merkens würdig, wenn die Anzahlen der

Partitionen in Bezug auf die Anzahl gerade Teile negativ genommen werden, dass dieser resultierende Ausdruck

$$(n-1)^{(1)} - (n-3)^{(2)} + (n-6)^{(3)} - (n-10)^{(4)} + (n-15)^{(5)} - (n-21)^{(6)} + etc.$$

immer $= 0$ ist, wenn nicht n eine in dieser Form enthaltene Zahl $\frac{3zz \pm z}{2}$ war, wenn aber n in dieser Form enthalten ist, dass dann der Wert jenes Ausdrucks entweder $+1$ oder -1 ist, je nachdem ob z eine entweder gerade oder ungerade Zahl war.

§47 So wie wir bisher alle ganzen Zahlen, um die Teile festzulegen, angenommen haben, so könnte, indem die Bedingung der Teile eingeschränkt wird, die Anzahl der Fragen ins Unendliche vermehrt werden; mit dieser Aufgabe, weil eine sichere Methode, um Fragen dieser Art aufzulösen, angegeben worden ist, werden wir uns nicht weiter aufhalten. Es soll genügen, aus dem Vorhergehenden eine hervorstechende Eigenschaften der Partition in ungerade Teile angemerkt zu haben. Weil ist

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)etc. = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)(1-x^9)etc.}$$

welche Formel aus der in §45 dargebotenen Gleichung von selbst fließt, folgt daher, dass jegliche Zahl auf genau so viele Weisen aus lediglich ungeraden Zahlen durch Addition hervorgebracht werden kann, auf wie viele Weisen dieselbe Zahl insgesamt in einander ungleiche Teile zerteilt werden kann. Weil so die Zahl 10 auf zehn Arten in ungleiche Teile zerteilt werden kann, welche Weisen sind

$$\begin{array}{ll} 10 = 10; & 10 = 1+2+7 \\ 10 = 1+9; & 10 = 1+3+6 \\ 10 = 2+8; & 10 = 1+4+5 \\ 10 = 3+7; & 10 = 2+3+5 \\ 10 = 4+6; & 10 = 1+2+3+4 \end{array}$$

kann dieselbe Zahl 10 auch auf zehn Arten lediglich aus ungeraden Zahlen auf diese Weise erzeugt werden

$$10 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1; \quad 10 = 1+3+3+3$$
$$10 = 1+1+1+1+1+1+1+3; \quad 10 = 1+1+1+1+3+3$$
$$10 = 1+1+1+1+1+5; \quad 10 = 1+1+3+5$$
$$10 = 1+1+1+7; \quad 10 = 3+7$$
$$10 = 1+9; \quad 10 = 5+5$$

§48 Nachdem aber diese Betrachtungen verlassen worden sind, schreite ich dazu voran zu untersuchen, auf welche Weise jede Zahl aus den Termen der geometrischen Progression $1, 2, 4, 8, 16, 32, etc.$ durch Addition gebildet werden kann. Und wenn freilich zuerst all diese Teile einander ungleich sein müssen, wird die Frage durch Entwicklung des Ausdrucks aufgelöst werden

$$s = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})etc.$$

Nachdem nämlich die Multiplikation tatsächlich ausgeführt worden ist, wird der Koeffizient jeden Termes anzeigen, auf wie viele Weisen der Exponent der beigefügten Potenz von x aus den Zahlen der geometrischen Progression $1, 2, 4, 8, 16, etc.$ durch Addition hervorgebracht werden kann. Weil also jede Zahl auf eine Weise so aufgelöst werden zu können beobachtet worden ist, ist zu zeigen, dass in dieser Reihe alle Potenzen von x auftauchen und der Koeffizient von allen derselbe, die Einheit, ist.

§49 Damit wir dies beweisen, wollen wir festlegen, dass ist

$$s = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \epsilon x^5 + \zeta x^6 + \eta x^7 + \theta x^8 + etc.$$

und, um die Werte der Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, etc.$ zu finden, wollen wir xx anstelle von x setzen und es sei der auf diese Weise für s resultierende Wert $= t$; es wird sein

$$t = (1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})etc.$$

und daher wird $s = (1+x)t$ werden. Nachdem diese Relation in den Reihen beobachtet worden ist, wird man wegen

$$t = 1 + \alpha x^2 + \beta x^4 + \gamma x^6 + \delta x^8 + \epsilon x^{10} + etc.$$

haben

$$(1+x)t = 1 + x + \alpha x^2 + \alpha x^3 + \beta x^4 + \beta x^5 + \gamma x^6 + \gamma x^7 + \delta x^8 + \delta x^9 + etc.$$

weil diese der Reihe s gleich sein muss, wird der Koeffizientenvergleich geben

$$\begin{array}{llll} \alpha = 1; & \delta = \beta; & \eta = \gamma; & \kappa = \epsilon \\ \beta = \alpha; & \epsilon = \beta; & \theta = \delta; & \lambda = \epsilon \\ \gamma = \alpha; & \zeta = \gamma; & \iota = \delta; & \mu = \zeta \end{array}$$

$$etc.$$

woher es offenbar ist, dass die einzelnen Koeffizienten der Einheit gleich sind und deshalb ist

$$s = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + etc. = \frac{1}{1-x}$$

dieses freilich ist per se klar, weil ist

$$(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}) = 1$$

§50 Wenn aber gesucht wird, auf wie viele Weisen jede Zahl aus den Termen der geometrischen Progression $1, 2, 4, 6, 8, 16, etc.$, wobei die Gleichheit der Teile nicht weiter beseitigt worden ist, durch Addition erzeugt werden kann, wird die Lösung aus der Entwicklung dieses Bruches herzuholen sein

$$s = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{16})(1-x^{32})etc.}$$

nachdem nämlich dieser in eine Reihe entwickelt worden ist, wird der Koeffizient jeden Termes aufzeigen, auf wie viele verschiedene Weisen der Exponent der beigefügten Potenz von x aus den Termen der vorgelegten geometrischen Progression durch Addition resultieren kann. Wir wollen xx anstelle von x setzen und der Wert von s gehe in t über; es wird sein

$$t = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{16})etc.} = (1-x)s$$

es sei also

$$s = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \epsilon x^5 + \zeta x^6 + \eta x^7 + \theta x^8 + \iota x^9 + etc.$$

es wird sein

$$(1-x)s = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \epsilon x^5 + \zeta x^6 + \eta x^7 + \theta x^8 + etc.$$

$$-1-\alpha-\beta-\gamma-\delta-\epsilon-\zeta-\eta-\theta-etc.$$
$$=t=1+\alpha x^2+\beta x^4+\gamma x^6+\delta x^8+etc.$$

woher aus der Gleichheit der homogenen Terme erhalten werden wird

$$\begin{array}{lll}
\alpha=1=1; & \eta=\zeta=6; & \nu=\eta=20 \\
\beta=\alpha+\kappa=2; & \theta=\eta+\delta=10; & \xi=\nu+\eta=26 \\
\gamma=\beta=2; & \iota=\theta=10; & o=\xi=26 \\
\delta=\gamma+\beta=4; & \kappa=\iota+\epsilon=14; & \pi=o+\theta=36 \\
\epsilon=\delta=4; & \lambda=\kappa=14; & \rho=\pi=36 \\
\zeta=\epsilon+\gamma=6; & \mu=\lambda+\zeta=20; & \sigma=\rho+\iota=46 \\
 & etc. &
\end{array}$$

§51 Des Merkens würdig ist diese Reihe, weil sowohl je zwei Terme überall gleich sind als auch sie sehr leicht, so weit wie es beliebt, fortgesetzt wird. Weiter fortgesetzt wird sie sich aber so verhalten:

$$1+x+2x^2+2x^3+4x^4+4x^5+6x^6+6x^7+10x^8+10x^9+14x^{10}+14x^{11}$$
$$+20x^{12}+20x^{13}+26x^{14}+26x^{15}+36x^{16}+36x^{17}+46x^{18}+46x^{19}+60x^{20}+60x^{21}$$
$$+74x^{22}+74x^{23}+94x^{24}+94x^{25}+114x^{26}+114x^{27}+140x^{28}+140x^{29}+166x^{30}$$
$$+166x^{31}+202x^{32}+202x^{33}+238x^{34}+238x^{35}+284x^{36}+284x^{37}+etc.$$

Aus dieser Reihe tritt es also klar zutage, dass eines Beispiels wegen 30 auf hundertsechsundsechzig Weisen aus den Termen der doppelten geometrischen Progression durch Addition hervorgebracht werden kann. Im Übrigen wird dem Aufmerksamen leicht klar werden, dass das Bildungsgesetz dieser Progression auf keine Weise durch einen allgemeinen Term ausgedrückt werden kann, weil die Reihe in Wahrheit eine Rekurrente ist, deren Relationsskala ins Unendliche erstreckt wird. Es wird aber dieses unendiche Produkt

$$(1-x)(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{16})(1-x^{32})etc.$$

wenn es entwickelt wird, die Relationsskala geben. Um diese zu finden, werde dieses Produkt $=p$ gesetzt, welches in q übergeht, wenn anstelle von x x^2 gesetzt wird, und es wird sein

$$q=(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{16})etc.=\frac{p}{1-x}$$

oder $p = (1-x)q$. Es wurde also festgesetzt

$$p = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \epsilon x^5 + \zeta x^6 + \eta x^7 + \theta x^8 + \iota x^9 + \kappa x^{10} + etc.$$

und es wird sein

$$(1-x)q = 1 - x + \alpha x^2 - \alpha x^3 + \beta x^4 - \beta x^5 + \gamma x^6 - \gamma x^7 + \delta x^8 - \delta x^9 + \epsilon x^{10} - etc.$$

woher durch Gleichsetzen gleicher Terme erhalten wird

$$\begin{array}{lll}
\alpha = -1 = -1; & \theta = \delta = -1; & o = -\eta = 1 \\
\beta = \alpha = -1; & \iota = -\delta = 1; & \pi = \theta = -1 \\
\gamma = -\alpha = -1; & \kappa = \epsilon = -1; & \rho = -\theta = 1 \\
\delta = \beta = -1; & \lambda = -\epsilon = -1; & \sigma = \iota = 1 \\
\epsilon = -\beta = 1; & \mu = \zeta = 1; & \tau = -\iota = -1 \\
\zeta = \gamma = 1; & \nu = -\zeta = -1; & \upsilon = \kappa = 1 \\
\eta = -\gamma = -1; & \xi = \eta = -1; & \phi = -\kappa = -1
\end{array}$$

etc.

§52 Die Koeffizienten der Reihe p, die aus der Entwicklung dieses Produktes

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{16})(1-x^{32})etc.$$

entstehen, sind also alle entweder $+1$ oder -1 und dennoch erhalten sie kein auf gewöhnliche Weise abgebbares Gesetz; es wird nämlich sein

$$p = 1 - x^1 - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 + x^6 - x^7 - x^8 + x^9 + x^{10} - x^{11} + x^{12} - x^{13} - x^{14}$$
$$+x^{15} - x^{16} + x^{17} + x^{18} - x^{19} + x^{20} - x^{21} - x^{22} + x^{23} + x^{24} - x^{25} - x^{26} + x^{27} - x^{28} + x^{29}$$
$$+x^{30} - x^{31} - x^{32} + x^{33} + x^{34} - x^{35} + x^{36} - x^{37} - x^{38} + x^{39} + x^{40} - x^{41} - x^{42} + x^{43} - x^{44} etc.$$

Wo anzumerken ist, dass jede beliebige ungerade Potenz der ungeraden Exponenten x^{2n+1} das entgegengesetzte Vorzeichen zu dem hat, was die Potenz x^{2n} hat, und dass das Vorzeichen von diesem immer mit dem Vorzeichen der Potenz x^n übereinstimmt; daher wird das Vorzeichen jeglicher Potenz leicht angegeben werden. Wie wenn das Vorzeichen dieser Potenz x^{1745} gesucht wird, wird unter alleiniger Beachtung der Vorzeichen sein

$$x^{1745} = -x^{1744} = -x^{872} = -x^{436} = -x^{218} = -x^{109} = +x^{108} =$$

$$+x^{54} = +x^{27} = -x^{26} = -x^{13} = +x^{12} = +x^{6} = +x^{3} = -x^{2} = -x^{1}$$

das Vorzeichen der Potenz x^{1745} ist also dem Vorzeichen der Potenz x^1 entgegengesetzt; weil dieses $-$ ist, wird das $+$ sein.

Tabelle, die anzeigt, auf wie viele Arten eine beliebige Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, 4,..., m durch Addition hervorgebracht werden kann, oder die die Werte der Formel $n^{(m)}$ darbietet.

	Werte der Zahl n																
m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	0 1	1 2	1 2	2 3	2 3	3 4	3 4	4 5	4 5	5 6	5 6	6 7	6 7	7 8	7 8	8 9
3	1	1	2	1 3	1 4	2 5	3 7	4 8	5 10	7 12	8 14	10 16	12 19	14 21	16 24	19 27	21 30
4	1	1	2	3	1 5	1 6	2 9	3 11	5 15	6 18	9 23	11 27	15 34	18 39	23 47	27 54	34 64
5	1	1	2	3	5	1 7	1 10	2 13	3 18	5 23	7 30	10 37	13 47	18 57	23 70	30 84	37 101
6	1	1	2	3	5	7	1 11	1 14	2 20	3 26	5 35	7 44	11 58	14 71	20 90	26 110	35 136
7	1	1	2	3	5	7	11	1 15	1 21	2 28	3 38	5 49	7 65	11 82	15 105	21 131	28 164
8	1	1	2	3	5	7	11	15	1 22	1 29	2 40	3 52	5 70	7 89	11 116	15 146	22 186
9	1	1	2	3	5	7	11	15	22	1 30	1 41	2 54	3 73	5 94	7 123	11 157	15 201
10	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	1 42	1 55	2 75	3 97	5 128	7 164	11 212
11	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	1 56	1 76	2 99	3 131	5 169	7 219

	Werte der Zahl n																
m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
12	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	1 77	1 100	2 133	3 172	5 224
13	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	1 101	1 134	2 174	3 227
14	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	1 135	1 175	2 229
15	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	1 176	1 230
16	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	1 231
17	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231
18	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231
19	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231
20	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231
∞	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231

Werte der Zahl n													
m	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	8 9	9 10	9 10	10 11	10 11	11 12	11 12	12 13	12 13	13 14	13 14	14 15	14 15
3	24 33	27 37	30 40	33 44	37 48	40 52	44 56	48 61	52 65	56 70	61 75	65 80	70 85
4	39 72	47 84	54 94	64 108	72 120	84 136	94 150	108 169	120 185	136 206	150 225	169 249	185 270
5	47 72	57 84	70 94	84 108	101 120	119 136	141 150	164 169	192 185	221 206	255 225	291 249	333 270
6	47 163	57 199	70 235	84 282	101 331	119 391	163 454	199 532	235 612	282 709	331 811	391 931	454 1057
7	38 201	49 248	65 300	82 364	105 436	131 522	164 618	201 733	248 860	300 1009	364 1175	436 1367	522 1579
8	29 230	40 288	52 352	70 434	89 525	116 638	146 764	186 919	230 1090	288 1297	352 1527	434 1801	525 2104
9	22 252	30 318	41 393	54 488	73 598	94 732	123 887	157 1076	201 1291	252 1549	318 1845	393 2194	488 2592
10	15 267	22 340	30 423	42 530	55 653	75 807	97 984	128 1204	164 1455	212 1761	267 2112	340 2534	423 3015
11	11 278	15 355	22 445	30 560	42 695	56 863	76 1060	99 1303	131 1586	169 1930	219 2331	278 2812	355 3370

Werte der Zahl n													
m	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
12	7 285	11 366	15 460	22 582	30 725	42 905	56 1116	77 1380	100 1686	133 2063	172 2503	224 3036	285 3655
13	5 290	7 373	11 471	15 597	22 747	30 935	42 1158	56 1436	77 1763	101 2164	134 2637	174 3216	227 3882
14	3 293	5 378	7 478	11 608	15 762	22 957	30 1188	42 1478	56 1819	77 2241	101 2738	135 3345	175 4057
15	2 295	3 381	5 483	7 615	11 773	15 972	22 1210	30 1508	42 1861	56 2297	77 2815	101 3446	135 4192
16	1 296	2 383	3 486	5 620	7 780	11 983	15 1225	22 1530	30 1891	42 2330	56 2871	77 3521	101 4293
17	1 297	1 384	2 488	3 628	5 785	7 990	11 1236	15 1545	22 1913	30 2369	42 2913	56 3579	77 4370
18	297	1 385	1 489	2 625	3 788	5 995	7 1243	11 1556	15 1928	22 2391	30 2943	42 3621	56 4426
19	297	385	1 490	1 626	2 790	3 998	5 1248	7 1563	11 1939	15 2406	22 2965	30 3651	42 4468
20	297	385	490	1 627	1 791	2 1000	3 1251	5 1568	7 1946	11 2417	15 2980	22 3673	30 4408
∞	297	385	490	627	1 792	1 1002	2 1255	3 1575	5 1958	7 2436	11 3010	15 3718	22 4565

Werte der Zahl n											
m	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	15 16	15 16	16 17	16 17	17 18	17 18	18 19	18 19	19 20	19 20	20 21
3	75 91	80 96	85 102	91 108	96 114	102 120	108 127	114 133	120 140	127 147	133 154
4	206 297	225 321	249 351	270 378	297 411	321 441	351 478	378 511	411 551	441 588	478 632
5	377 674	427 74	480 831	540 918	603 1014	678 1115	748 1226	831 1342	918 1469	1014 1602	1115 1747
6	532 1206	612 1360	709 1540	811 1729	931 1945	1057 2172	1206 2412	1360 2702	1540 3009	1729 3331	1945 3692
7	618 18241	733 2093	860 2400	1009 2738	1175 3120	1367 3539	1579 4011	1824 4526	2093 5102	2400 5735	2738 6430
8	638 2462	764 2857	919 3319	1090 3828	1297 4417	1527 5066	1801 5812	2104 6630	2402 7564	2857 8588	3319 9749
9	598 3060	732 3589	887 4206	1076 4904	1291 5708	1549 6615	1845 7657	2194 8824	2592 10156	3060 11648	3589 13338
10	530 3590	653 4242	807 5013	984 5888	1204 6912	1455 8070	1761 9418	2112 10936	2534 12690	3015 14663	3590 16928
11	445 4035	560 4802	695 5708	863 6751	1060 7972	1303 9373	1586 11004	1930 12866	2331 15021	2812 17475	3370 20298

Werte der Zahl n											
m	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
12	336 4401	460 5262	582 6290	725 7476	905 8877	935 10489	1158 12384	1436 14552	1763 17084	2164 19978	2637 23334
13	290 4691	373 5635	471 6761	597 8073	747 9624	935 11424	1158 13542	1436 15988	1763 18847	2164 22142	2637 25971
14	229 4930	295 5928	378 7135	478 8551	608 10232	762 12186	957 14499	1188 17176	1478 20325	1819 23961	2241 28212
15	176 5096	230 6158	295 7434	381 8932	483 10715	615 12801	773 15272	972 18148	1210 21535	1508 25469	1861 30073
16	135 5231	171 6334	231 7665	296 9228	383 11098	486 133287	620 15892	780 18928	983 22518	1225 26694	1530 31603
17	101 5332	135 6469	176 7841	231 9459	297 11395	384 137761	488 16280	623 19551	785 23303	990 27684	1236 32839
18	77 5409	101 6570	135 7976	176 9635	231 11636	297 13968	385 16765	489 20040	625 23928	788 28472	995 33834
19	56 5465	77 6647	101 8077	135 9770	176 11802	231 14199	297 17062	385 20425	490 24412	626 29092	790 34624
20	42 5507	56 6703	77 8154	101 9811	135 11937	176 14375	231 17293	297 20722	385 24801	490 29588	627 35251
∞	97 5604	139 6842	195 8349	272 10143	373 12310	508 14883	684 17977	915 21637	1212 26015	1597 31185	2087 37338

Werte der Zahl n										
m	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	20 21	21 22	21 22	22 23	22 23	23 24	23 24	24 25	24 25	25 26
3	140 161	147 169	154 176	161 184	169 192	176 200	184 208	192 217	200 225	208 234
4	511 672	551 720	588 764	632 816	672 864	720 920	764 972	816 1033	864 1089	920 1154
5	1226 1898	1342 2062	1469 2233	1602 2418	1747 2611	1898 2818	2062 3034	2233 3266	2418 3507	2611 3765
6	2172 4070	2432 4494	2702 4935	3009 5427	3331 5942	3692 6510	4070 7104	4494 7760	4935 8442	5427 9192
7	3120 7190	3539 8033	4011 8946	4526 9953	5102 11044	5731 12241	6430 13434	7190 14950	8033 16475	8946 18134
8	3828 11081	4417 12450	5066 14012	5812 15765	6630 17670	7564 19805	8588 22122	9749 24699	11018 27493	12450 30588
9	4206 15224	4904 17354	5708 19720	6615 22380	7657 25331	8824 28629	10156 32278	11648 36347	13338 40831	15224 45812
10	4242 19466	5013 22367	5888 25608	6912 29292	8070 33401	9418 38047	10936 43214	12690 49037	14663 55494	16928 62740
11	4035 23501	4802 27169	5708 31316	6751 36043	7972 41373	9373 47420	11004 54218	12866 61903	15021 70515	17475 80215

Werte der Zahl n										
m	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
	3655	4401	5262	6290	7476	8877	10489	12384	14552	17084
12	27156	31570	36578	42333	48849	56297	64707	74287	85067	97299
	3210	3882	4691	5635	6761	8073	9624	11424	13542	15988
13	30366	35452	41269	47968	55610	64370	74331	85711	98609	113287
	2738	3345	4057	4920	5928	7139	8551	10232	12186	14499
14	33104	38797	45326	52888	61538	71509	82882	95943	110795	127786
	2297	2815	3446	4192	5096	6158	7434	8932	10715	12801
15	45401	41612	48772	57080	66634	77667	90316	104875	121510	140587
	1891	2339	2871	3523	4293	5231	6334	7665	9228	11098
16	37292	43951	51643	60603	70927	82898	96650	112540	130738	151685
	1545	1913	2369	2913	3579	4370	5332	6469	7841	9459
17	38837	45464	54012	63516	74506	87268	101982	119009	138579	161144
	1243	1556	1928	2391	2943	3621	4426	5409	6570	7976
18	40080	47420	55940	65907	77449	90889	106408	124418	145149	169120
	998	1248	1563	1939	2406	2965	3651	4468	5465	6647
19	41078	48668	57503	67846	79855	93854	110059	128886	150614	175767
	791	1000	1251	1568	1946	2417	2980	3673	4498	5507
20	41869	49668	58754	69414	81801	96271	113039	132559	155112	181274
	2714	3506	4507	5761	7333	9287	11715	14714	18413	22952
∞	44583	53174	63261	75175	89134	105558	124754	147273	173525	204226

Werte der Zahl n									
m	51	52	53	54	55	56	57	58	59
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	25 26	26 27	26 27	27 28	27 28	28 29	28 29	29 30	29 30
3	217 243	225 252	234 261	243 271	252 280	261 290	271 300	280 310	290 320
4	972 1215	1033 1285	1089 1350	1154 1425	1215 1495	1285 1575	1350 1650	1425 1735	1495 1815
5	2818 4033	3034 4319	3266 4616	3507 4932	3765 5260	4033 5608	4319 5069	4616 6351	4932 6747
6	5942 9975	6510 10829	7104 11720	7760 12692	8442 13702	9192 14800	9975 15944	10829 17180	11720 18467
7	9953 19928	11044 21873	12241 23961	13534 26226	14950 28652	16475 31275	18138 34082	19928 37108	21873 40340
8	14012 33640	15765 37638	17674 41635	19805 46031	22122 50774	24699 55974	27493 61575	30588 67696	33940 74280
9	17354 51294	19720 57358	22380 64015	25331 71362	28629 79403	32278 88252	36347 97922	40831 108527	45812 120092
10	19466 70760	22367 79725	25608 89623	29292 100654	33401 112804	38047 126299	43214 141136	49037 157564	55494 175586
11	20298 91058	23501 103226	27169 116792	31316 131970	36043 148847	41373 167672	47420 188556	54218 211782	61903 237489

Werte der Zahl n									
m	51	52	53	54	55	56	57	58	59
12	19978 111036	23334 126560	27156 143948	31570 163540	36578 185425	42333 210005	48849 237405	56297 268079	64707 302196
13	18847 129883	22142 148702	25971 169919	30366 193906	35452 220877	41269 251274	47968 285373	55610 323689	64370 366566
14	17176 147059	20325 169027	23961 193880	28212 222118	33104 253981	38797 290071	45326 330699	52888 376577	61538 428104
15	15272 162331	18148 187175	21535 215415	25469 247587	30075 284054	35403 325472	41612 372311	48772 425349	57080 485184
16	13287 175618	15892 203067	18928 234343	22518 270105	26694 310748	31603 357075	37292 409603	43951 469300	51643 536827
17	11395 187013	13671 216738	16380 250723	19551 289056	23303 334051	27684 384759	32839 442442	38837 508137	45864 582691
18	9635 196648	11626 228364	13968 264691	16765 306421	20040 354091	23928 408687	28472 470914	33834 541971	40080 622771
19	8077 204725	9770 238134	11802 276493	14199 320620	17062 371153	20425 429112	24418 495332	29098 571069	34624 657395
20	6703 211528	8154 246288	9871 286364	11937 332557	14375 385528	17293 446405	20722 516054	24803 595872	29588 686983
∞	28515 239943	35301 281589	43567 320931	53598 386155	65748 451276	80418 526823	98100 614154	119348 715220	144837 831820