Betrachtung einer gewissen Progression, welche zum Finden der Quadratur des Kreises geeignet ist*

Leonhard Euler

§1 Nachdem der Tangens eines gewissen Bogens im Kreis, dessen Radius $= 1$ ist, $= t$ gesetzt worden ist, wird der Bogen selbst

$$= \int \frac{dt}{1+tt}$$

sein; wenn nun anstelle der Differentiale dt die freilich endlichen kleinen Stücke des Tangens eingesetzt werden, und anstelle der eigentlichen Integration diese Teilstücke addiert werden, wird ein umso mehr an den vorgelegten Bogen herankommender Ausdruck hervorgehen, umso kleiner die Teilstücke des Tangens genommen werden. Nachdem also der Tangens in n gleiche Teile geteilt worden ist, von denen jeder beliebige $\frac{t}{n}$ den Platz des Differentials dt einzunehmen haben wird, werden anstelle von t nacheinander die Werte $\frac{t}{n}$, $\frac{2t}{n}$, $\frac{3t}{n}$, $\cdots$ bis hin zu $\frac{nt}{n}$ gesetzt werden müssen; danach wird der Bogen, dessen Tangens t ist, dieser Progression gleich werden

$$\frac{nt}{nn+tt} + \frac{nt}{nn+4tt} + \frac{nt}{nn+9tt} + \cdots + \frac{nt}{nn+nntt},$$

*Originaltitel: " Consideratio progressionis cuiusdam ad circuli quadraturam inveniendam idoneae", zuerst publiziert in: *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 11* (1750, geschrieben 1739): pp. 116 – 127, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 14, pp. 350 – 363, Eneström Nummer E125, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

welcher Ausdruck umso weniger vom wahren Wert des Bogens abweichen wird, umso größer die Zahl n angenommen wird. Aber immer wird dieser Ausdruck zu klein sein, wenn nicht für n tatsächlich eine unendlich große Zahl genommen wird.

§2 Weil also für endliches n dieser Ausdruck

$$\frac{nt}{n^2+t^2}+\frac{nt}{n^2+4t^2}+\frac{nt}{n^2+9t^2}+\cdots+\frac{nt}{n^2+n^2t^2}$$

den Bogen, dessen Tangens t ist, umso näher ausdrückt, umso größer die Zahl n war, aber auf diese Weise immer ein zu kleiner Wert hervorgeht, werde ich untersuchen, wie sehr dieser Ausdruck in jedwedem Fall von der wahren Länge des Bogens abweicht. Wenn nämlich diese Abweichung bequem und für Rechnungen passend mit einer schnell konvergierenden Reihe ausgedrückt werden kann, scheint diese Methode die Länge eines gewissen Bogens zu bestimmen überaus leicht und geeignet zu sein.

§3 Um dies zu leisten, löse ich die einzelnen Terme dieses Ausdrucks auf die gewohnte Weise wie folgt in eine geometrische Reihe auf:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\dfrac{nt}{n^2+t^2} & = & \dfrac{t}{n} & - & \dfrac{t^3}{n^3} & + & \dfrac{t^5}{n^5} & - & \dfrac{t^7}{n^7} & + & \text{etc.}\\[2ex]
\dfrac{nt}{n^2+4t^2} & = & \dfrac{t}{n} & - & \dfrac{2^2t^3}{n^3} & + & \dfrac{2^4t^5}{n^5} & - & \dfrac{2^6t^7}{n^7} & + & \text{etc.}\\[2ex]
\dfrac{nt}{n^2+9t^2} & = & \dfrac{t}{n} & - & \dfrac{3^2t^3}{n^3} & + & \dfrac{3^4t^5}{n^5} & - & \dfrac{3^6t^7}{n^7} & + & \text{etc.}\\[2ex]
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\[2ex]
\dfrac{nt}{n^2+n^2t^2} & = & \dfrac{t}{n} & - & \dfrac{n^2t^3}{n^3} & + & \dfrac{n^4t^5}{n^5} & - & \dfrac{n^6t^7}{n^7} & + & \text{etc.}
\end{array}$$

§4 Wir wollen festlegen, dass der Wert erwähnten Progression

$$\frac{nt}{n^2+t^2}+\frac{nt}{n^2+4t^2}+\frac{nt}{n^2+9t^2}+\cdots+\frac{nt}{n^2+n^2t^2}$$

bereits bestimmt worden ist und er $= s$ ist; und die durchgeführte Transformation wird die folgende Gleichung an die Hand geben

$$s = \begin{cases} + \ \dfrac{t}{n} \ (1^0 + 2^0 + 3^0 + \cdots + n^0) \\ - \ \dfrac{t^3}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \\ + \ \dfrac{t^5}{n^5} (1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4) \\ - \ \dfrac{t^7}{n^7} (1^6 + 2^6 + 3^6 + \cdots + n^6) \\ + \ \dfrac{t^9}{n^9} (1^8 + 2^8 + 3^8 + \cdots + n^8) \\ - \ \dfrac{t^{11}}{n^{11}} (1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \cdots + n^{10}) \\ \\ \qquad \text{etc. bis ins Unendliche} \end{cases}$$

§5 Weil ja in diesem Ausdruck die Koeffizienten der Terme $\frac{t}{n}$, $\frac{t^3}{n^3}$, $\frac{t^5}{n^5}$ etc. die Summen der Progressionen der geraden Potenzen der natürlichen Zahlen sind, sich die Summen aber auf die folgende Weise verhalten:

$$
\begin{aligned}
1^0 + 2^0 + \cdots + n^0 &= n, \\
1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 &= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}, \\
1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 &= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}, \\
1^6 + 2^6 + \cdots + n^6 &= \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42}, \\
1^8 + 2^8 + \cdots + n^8 &= \frac{n^9}{9} + \frac{n^8}{2} + \frac{2n^7}{3} - \frac{7n^5}{15} + \frac{2n^3}{9} - \frac{n}{30},
\end{aligned}
$$

etc.,

setze man diese bestimmten Werte anstelle der unbestimmen ein und es wird die folgende Gleichung hervorgehen

$$
s = \begin{cases}
+t \\
-\frac{t^3}{3} - \frac{t^3}{2n} - \frac{t^3}{6n^2} \\
+\frac{t^5}{5} + \frac{t^5}{2n} + \frac{t^5}{3n^2} - \frac{t^5}{30n^4} \\
-\frac{t^7}{7} - \frac{t^7}{2n} - \frac{t^7}{2n^2} + \frac{t^7}{6n^4} - \frac{t^7}{42n^6} \\
+\frac{t^9}{9} + \frac{t^9}{2n} + \frac{2t^9}{3n^2} - \frac{7t^9}{15n^4} + \frac{2t^9}{9n^6} - \frac{t^9}{30n^8} \\
\text{etc.}
\end{cases}
$$

deren weiteres Fortschreitungsgesetz von den Koeffizienten der allgemeinen Formel Reihen zu summieren abhängen wird. Um diese Reihe fortzusetzen, wird es besonders förderlich sein, die Koeffizienten der letzten Terme in diesem Ausdruck zu erwähnen, welche diese Progression bilden

$$\frac{1}{6}, \quad \frac{1}{30}, \quad \frac{1}{42}, \quad \frac{1}{30}, \quad \frac{5}{66}, \quad \frac{691}{13 \cdot 210}, \quad \frac{7}{6}, \quad \frac{3617}{17 \cdot 30}, \quad \frac{43867}{19 \cdot 42},$$
$$\frac{174611}{330}, \quad \frac{854513}{6 \cdot 23}, \quad \frac{236364091}{5 \cdot 546},$$

welche bis zu diesem Punkt fortgesetzt zu haben ausreichen wird.

§6 Man teile die Terme des gefundenen Ausdrucks gemäß den Spalten von oben nach unten auf und ordne sie nach dem Gesetz, nach welchem die einzelnen Spalten fortschreiten; danach wird gelten

$$\begin{aligned}
s \;=\; & +t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} - \frac{t^{11}}{11} + \text{etc.} \\
& - \frac{t^2}{2n}(t - t^3 + t^5 - t^7 + t^9 - t^{11} + \text{etc.}) \\
& - \frac{t^2}{6n^2}(t - 2t^3 + 3t^5 - 4t^7 + 5t^9 - 6t^{11} + \text{etc.}) \\
& - \frac{t^4}{30n^4}(t - 5t^3 + 14t^5 - 30t^7 + 55t^9 - 91t^{11} + \text{etc.}) \\
& - \frac{t^6}{42n^6}\left(t - \frac{28}{3}t^3 + 42t^5 - 132t^7 + \frac{1001}{2}t^9 - 728t^{11} + \text{etc.}\right) \\
& \text{etc.},
\end{aligned}$$

all welche Reihen diesem Gesetz folgen, dass die Potenzen $\frac{t^m}{Nn^m}$ mit dieser Reihe multipliziert werden müssen

$$t - \frac{(m+1)(m+2)}{2 \cdot 3}t^3 + \frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}t^5 - \text{etc.}$$

§7 Obwohl diese Reihe wegen der positiven ganzen Zahl m ins Unendliche fortschreitet, wird sie dennoch immer eine endliche Summe haben, die auf die folgende Weise gefunden werden wird. Man setze unterdessen die Summe jener Reihe $= v$; es wird gelten

$$mv = \frac{m}{1}t - \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}t^3 + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}t^5$$
$$= \frac{(1 - t\sqrt{-1})^{-m} - (1 + t\sqrt{-1})^{-m}}{2\sqrt{-1}}.$$

Dieser Ausdruck wird aber in den nachstehenden überführt

$$mv = \frac{(1 + t\sqrt{-1})^m - (1 - t\sqrt{-1})^m}{2(1+tt)^m\sqrt{-1}}.$$

Aber nachdem die Binome tatsächlich zur Potenz mit Exponent m erhoben worden sind, wird mit einer anderen Reihe

$$mv = \frac{1}{(1+tt)^m}\left(\frac{mt}{1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}t^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}t^5 - \text{etc.}\right)$$

sein, welche für unser Unterfangen im höchsten Maße geeignet ist, weil sie von selbst abbricht, wannimmer m eine ganze positive Zahl ist.

§8 Also ist die Reihe v, mit welcher der Term $\frac{t^m}{Nn^m}$ multipliziert werden muss, nun in diese überführt worden

$$\frac{1}{m(1+tt)^m}\left(\frac{mt}{1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}t^3 + \text{etc.}\right);$$

deswegen wird man haben

$$
\begin{aligned}
s = t &- \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} - \frac{t^{11}}{11} + \text{etc.}\\
&- \frac{t^3}{2n(1+tt)}\\
&- \frac{t^2}{2\cdot 6n^2(1+tt)^2}\cdot\frac{2t}{1}\\
&- \frac{t^4}{4\cdot 30n^4(1+tt)^4}\left(\frac{4t}{1} - \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}t^3\right)\\
&- \frac{t^6}{6\cdot 42n^6(1+tt)^6}\left(\frac{6t}{1} - \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}t^3 + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}t^5\right)\\
&- \frac{t^8}{8\cdot 30n^8(1+tt)^8}\left(\frac{8t}{1} - \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}t^3 + \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}t^5 - \text{etc.}\right)\\
&- \frac{5t^{10}}{10\cdot 66n^{10}(1+tt)^{10}}\left(\frac{10t}{1} - \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}t^3 + \text{etc.}\right)\\
&- \frac{691t^{12}}{12\cdot 13\cdot 210n^{12}(1+tt)^{12}}\left(\frac{12t}{1} - \frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}t^3 + \text{etc.}\right)\\
&- \frac{7t^{14}}{14\cdot 6n^{14}(1+tt)^{14}}\left(\frac{14t}{1} - \frac{14\cdot 13\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3}t^3 + \text{etc.}\right)\\
&- \frac{3617t^{16}}{16\cdot 17\cdot 30\cdot n^{16}(1+tt)^{16}}\left(\frac{16t}{1} - \frac{16\cdot 15\cdot 14}{1\cdot 2\cdot 3}t^3 + \text{etc.}\right)\\
&\qquad\qquad\text{etc.}
\end{aligned}
$$

§9 Weil nun die erste Reihe dieses Ausdrucks

$$t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \text{etc.}$$

den Kreisbogen, dessen Tangens t ist, selbst bezeichnet, den wir zu suchen unternehmen, sei z dieser Bogen und während

$$s = \frac{nt}{n^2+t^2} + \frac{nt}{n^2+4t^2} + \frac{nt}{n^2+9t^2} + \cdots + \frac{nt}{n^2+n^2t^2}$$

bleibt, wird man den Bogen z finden als

$$
\begin{aligned}
&= s + \frac{t^3}{2n(1+tt)}\\
&\quad + \frac{1}{6}\cdot\frac{tt}{2nn(1+tt)^2}\cdot 2t\\
&\quad + \frac{1}{30}\cdot\frac{t^4}{4n^4(1+tt)^4}(4t-4t^3)\\
&\quad + \frac{1}{42}\cdot\frac{t^6}{6n^6(1+tt)^6}(6t-20t^3+6t^5)\\
&\quad + \frac{1}{30}\cdot\frac{t^8}{8n^8(1+tt)^8}(8t-56t^3+56t^5-8t^7)\\
&\quad + \frac{5}{66}\cdot\frac{t^{10}}{10n^{10}(1+tt)^{10}}(10t-120t^3+252t^5-120t^7+10t^9)\\
&\quad + \frac{691}{13\cdot 210}\cdot\frac{t^{12}}{12n^{12}(1+tt)^{12}}(12t-220t^3+792t^5-792t^7+220t^9-12t^{11})\\
&\quad + \frac{7}{6}\cdot\frac{t^{14}}{14n^{14}(1+tt)^{14}}(14t-364t^3+2002t^5-3432t^5+2002t^9-364t^{11}+14t^{13})\\
&\quad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

§10 Dieser Ausdruck wird überaus angenehm auf den Fall angewandt werden, in welchem $t = 1$ ist, weil dann jeder zweite Term der Reihe verschwindet und darüber hinaus der Bogen z in den vierten Teil des halben Kreisumfanges übergeht; nachdem also der Halbumfang des Kreises $= \pi$ gesetzt worden ist, sodass $z = \frac{\pi}{4}$ ist, und eine beliebige positive ganze Zahl für n genommen worden ist, wird

$$
\begin{gathered}
\frac{\pi}{4} = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \frac{n}{n^2+16} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}\\
+\frac{1}{4n} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2\cdot 2n^2} - \frac{1}{42}\cdot\frac{1}{2^3\cdot 6n^6} + \frac{5}{66}\cdot\frac{1}{2^5\cdot 10n^{10}} - \frac{7}{6}\cdot\frac{1}{2^7\cdot 14n^{14}}\\
+\frac{43867}{19\cdot 42}\cdot\frac{1}{2^9\cdot 18n^{18}} - \frac{854513}{6\cdot 23}\cdot\frac{1}{2^{11}\cdot 22n^{22}} + \text{etc.}
\end{gathered}
$$

sein. Daher wird also

$$\pi = \frac{4n}{n^2+1} + \frac{4n}{n^2+4} + \frac{4n}{n^2+9} + \frac{4n}{n^2+16} + \cdots + \frac{4n}{n^2+n^2}$$
$$+\frac{1}{n} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1n^2} - \frac{1}{42}\cdot\frac{1}{2^2\cdot 3n^6} + \frac{5}{66}\cdot\frac{1}{2^4\cdot 5n^{10}} - \frac{7}{6}\cdot\frac{1}{2^6\cdot 7n^{14}}$$
$$+\frac{43867}{19\cdot 42}\cdot\frac{1}{2^8\cdot 9n^{18}} - \frac{854513}{6\cdot 23}\cdot\frac{1}{2^{10}\cdot 11n^{22}} + \text{etc.}$$

sein, welche Reihe umso mehr konvergiert, je größer die Zahl n angenommen wird.

§11 Obwohl aber diese Reihe umso schneller zu konvergieren scheint, umso größer die Zahl n ist, konvergiert sie dennoch immer nur bis hin zu einem gewissen Term, nach welchem die Terme wiederum wachsen; und dieses Grundes wegen hilft es nicht, die Reihe bis dorthin zu verwenden, bis die Terme zu divergieren beginnen, sondern es wird notwendig sein, die Operation dort abzubrechen, wo die größte Konvergenz festgestellt wird. Denn wenn derjenige der Brüche

$$\frac{1}{6},\quad \frac{1}{30},\quad \frac{1}{42},\quad \frac{1}{30},\quad \frac{5}{66}\quad \text{etc.},$$

welcher den Index ν habe, $=X$ gesetzt wird und der folgende $=Y$, wird immer $\frac{Y}{X} > \frac{(\nu-1)(2\nu-1)}{2\pi^2}$ und für ins Unendliche wachsendes ν entsprechend $\frac{Y}{X} = \frac{\nu^2}{\pi^2}$ werden. Daraus ist es ersichtlich, dass die Terme dieser Reihe ununterbrochen wachsen und keine noch so sehr konvergierende geometrische Progression mit ihr zusammengeführt sie konvergent werden lassen kann. Daher wird jedoch gefolgert, dass in der Reihe des vorherigen Paragraphen sich nicht mehr Terme nehmen lassen als $\frac{\pi n}{\sqrt{2}}$, das heißt ungefähr $2n$; auch wenn man nämlich mehr Terme nähme, würde man keine an die tatsächliche näher herankommende Summe finden.

§12 Daher ergibt sich ein Hilfsmittel, mithilfe der Reihe aus Paragraph 10 den Wert von π näherungsweise zu finden. Wir wollen nämlich festlegen, dass von der Reihe

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1n^2} - \frac{1}{42}\cdot\frac{1}{2^2\cdot 3n^6} + \frac{5}{66}\cdot\frac{1}{2^4\cdot 5n^{10}} - \text{etc.}$$

schon tatsächlich μ Terme addiert worden sind und der folgende Term $= P$ ist; anstelle all dessen nehme man den Ausdruck

$$\frac{\pi^4 n^4 P}{\pi^4 n^4 + 4\mu^4}$$

und addiere oder subtrahiere ihn anstelle aller übrigen, je nachdem ob der Term P das Vorzeichen $+$ oder $-$ hatte. Es ist aber näherungsweise $\pi^4 = 97,40909$, woher man anstelle des Terms P

$$\frac{P}{1 + \frac{16\mu^4}{363n^4}}$$

setzen können wird. Und auf diese Weise wird man umso näher an den wahren Wert von π herankommen, umso größer die Zahl μ war, das heißt, je mehr Terme tatsächlich schon addiert worden sind.

§13 Nichtsdestoweniger gibt die im zehnten Paragraphen angegebene Reihe immer einen zu großen Wert für π, was auch immer für n eingesetzt wird; sie kommt aber umso näher heran, umso größer die Zahl n angenommen wird. Denn für $n = 1$ geht

$$\pi = 3,1646+$$

hervor, welcher Ausdruck schon an der zweiten Stelle vom wahren Wert $3,1415926535897932$ abweicht. Wenn man $n = 3$ setzt, wird

$$\pi = 3,1415927216+$$

hervorgehen, welcher an der achten Stelle vom wahren Wert abweicht. Aber wenn $n = 5$ gesetzt wird, wird man mit derselben Methode finden

$$\begin{array}{rl} \pi = & 3,1415926535900726+, \\ & \underline{3,1415926535897932} \\ & 0,0000000000002794 \end{array}$$

der Übertrag welcher Zahl über den tatsächlichen Wert erst an der dreizehnten Stelle ausgemacht wird. Und diese Abweichung von der Wahrheit ist umso bemerkenswerter, umso weniger ihre Ursache in der durchgeführten

Rechnung entdeckt werden kann. Damit es sich zuträgt, dass diese Formel der Abweichung zum Trotz bequem zum Finden des Wertes von π herangezogen werden kann, sind natürlich größere Zahlen für n einzusetzen.

§14 Aus diesen Beispielen, in denen wir 1, 3 und 5 anstelle von n eingesetzt haben, scheint mit Induktion geschlossen werden können, dass der Wert von π in Dezimalzahlen auf das Dreifache an Ziffern richtig gefunden werden kann wie n Einheiten enthält, wenn freilich 3 als die erste Stelle gerechnet wird; aber diese Stelle nicht mitgezählt scheint die Anzahl der richtigen Stellen $= 2\frac{1}{2}n$ zu sein. Wenn etwa $n = 2$ gesetzt wird, findet man

$$\pi = 3,141635,$$

dessen fünfte Stelle um vier zu groß ist. Und für $n = 4$ geht

$$\pi = 3,14159265374+$$

hervor, dessen zehnte Stelle um zwei größer ist als die wahre. Aber für $n = 6$ findet man

$$\pi = 3,141592653589793558+,$$

von welchem Wert erst die sechzehnte Stelle von der Wahrheit abkommt.

§15 Wenn wir nun nach dem Grund der Abweichung dieser Rechnung von der Wahrheit suchen, können wir keinen anderen entdecken als den der Divergenz der in § 10 erwähnten Reihe; denn alles Übrige wird festgestellt, sich völlig richtig zu verhalten. Wenn nämlich t die Einheit überschreitet, wird eine umso größere Abweichung von der Wahrheit aufgefunden werden, umso kleiner die Zahl n angenommen wird; das wird sich am deutlichsten zeigen, wenn t als unendlich groß festgelegt wird und zugleich $n =$ einer unendlichen Zahl angenommen wird. Wir wollen nämlich $t = \infty$ setzen, in welchem Fall die Reihe z aus § 9 in den vierten Teil der Peripherie des Kreis übergehen und daher $z = \frac{\pi}{2}$ sein wird. Es sei darüber hinaus $n = pt$, während p irgendeine ganze oder gebrochene positive Zahl bezeichnet, und deswegen wird $z = \frac{\pi}{2} = s + \frac{1}{2p}$ sein und alle übrigen Terme scheinen verworfen werden zu können, was dennoch in den infinitesimalen Termen unrichtig wird, welche schließlich zu einer endlichen Größe anwachsen können.

§16 Indes verdient es dennoch eine Erwähnung, dass der Fehler hinreichend klein ist, wenn p keine Zahl kleiner als die Einheit ist, und ein umso größerer Wert p zugeteilt wird, umso kleiner wird die Abweichung von der Wahrheit sein. Weil nämlich in diesem Fall

$$s = \frac{p}{p^2+1} + \frac{p}{p^2+4} + \frac{p}{p^2+9} + \frac{p}{p^2+16} + \frac{p}{p^2+25} + \text{etc. ins Unendliche}$$

ist, scheint die Summe dieser Reihe durch die Quadratur des Kreises bestimmt werden zu können, was sich jedoch nicht so verhält. Durch die letzte Gleichung wäre nämlich

$$s = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2p}$$

oder

$$\frac{\pi}{2p} - \frac{1}{2pp} = \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+4} + \frac{1}{p^2+9} + \frac{1}{p^2+16} + \text{etc.},$$

die Unrichtigkeit welcher Gleichung sich sofort erhellt, wenn $p = 0$ ist. Aber für $p = 1$ ist

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \frac{1}{26} + \text{etc.} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$$

Jedoch findet man die Summe mittels anderer Regeln als

$$= \frac{\pi}{2} - 0,4941222793,$$

sodass jene Summe kleiner ist als die erwähnte und das um den Betrag $0,005877720$; wenn aber $p = 2$ gesetzt wird, wird man diese Reihe haben

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{13} + \frac{1}{20} + \text{etc.}$$

deren Summe auf diesem fehlerbehafteten Weg als

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4} - 0,125$$

hervorgeht, obwohl bekannt ist, dass die tatsächliche Summe

$$= \frac{\pi}{4} - 0,124994522076$$

ist, sodass jene Abweichung lediglich $= 0{,}000005477924$ ist. Der Fehler wird aber noch kleiner sein, wenn größere Zahlen für p angenommen werden; so wird, wenn $p = 3$ ist, erst an der neunten Stelle eine Abweichung auftreten, und welche Zahl auch immer für p genommen wird, die Summe wird bis auf $3p$ Stellen richtig hervorgehen.

§17 Aus diesen Erläuterungen ist schon hinreichend ersichtlich, wie sorgsam man bei der Summation von divergenten Reihen verfahren muss, besonders wenn unendliche divergente Reihen von solcher Art wie hier auftreten. Es scheint ratsam hierfür noch ein Beispiel vorzustellen, aus welchem die Notwendigkeit der höchsten Umsicht deutlicher zutage treten wird. Es sei eine beliebige Reihe

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ a & +b & +c & +d & +e & +f & +g & +h + \text{etc.} \end{array}$$

vorgelegt, von welcher bekannt ist, dass der Term zum Index x

$$= a + \frac{x-1}{1}(b-a) + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2}(c-2b-a)$$
$$+ \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(d-3c+3b-a) + \text{etc.}$$

sein wird. Aus dieser Form bestimme man alle zu linker Seite hin unendlich vielen vorausgehenden Terme und es wird sich verhalten wie folgt

$$\begin{array}{llllll} \text{Term mit Index} & 0 = a + & (a-b) + & (a-2b+c) + & (a-3b+3c-d) & + \text{etc.} \\ \text{Term mit Index} & -1 = a + & 2(a-b) + & 3(a-2b+c) + & 4(a-3b+3c-d) & + \text{etc.} \\ \text{Term mit Index} & -2 = a + & 3(a-b) + & 6(a-2b+c) + & 10(a-3b+3c-d) & + \text{etc.} \\ \text{Term mit Index} & -3 = a + & 4(a-b) + & 10(a-2b+c) + & 20(a-3b+3c-d) & + \text{etc.} \\ & & \text{etc.} & & & \end{array}$$

§18 Man sammle all diese unendlich vielen vorhergehenden Terme und man wird die Summe aller als

$$= \frac{a}{1-1} + \frac{a-b}{(1-1)^2} + \frac{a-2b+c}{(1-1)^3} + \frac{a-3b+3c-d}{(1-1)^4} + \text{etc.}$$

finden, welche in unzählige gemäß den Buchstaben a, b, c, d, e etc. aufgelöst in diese Form übergehen wird:

$$\begin{aligned}
&+a\left(\frac{1}{1-1}+\frac{1}{(1-1)^2}+\frac{1}{(1-1)^3}+\frac{1}{(1-1)^4}+\text{etc.}\right)\\
&-b\left(\frac{1}{(1-1)^2}+\frac{2}{(1-1)^3}+\frac{3}{(1-1)^4}+\frac{4}{(1-1)^5}+\text{etc.}\right)\\
&+c\left(\frac{1}{(1-1)^3}+\frac{3}{(1-1)^3}+\frac{6}{(1-1)^4}+\frac{10}{(1-1)^6}+\text{etc.}\right)\\
&-d\left(\frac{1}{(1-1)^4}+\frac{4}{(1-1)^5}+\frac{10}{(1-1)^6}+\frac{20}{(1-1)^6}+\text{etc.}\right)\\
&\qquad\text{etc.}
\end{aligned}$$

§19 Diese einzelnen Reihen lassen aber eine Summation zu, und nachdem anstelle derer ihre Summen eingesetzt worden sind, wird das Aggregat aller bis ins Unendliche zur linken Seite hin vorausgehenden Terme sich wie folgt verhalten

$$\begin{aligned}
+a\cdot\frac{1}{(1-1)-1} &= -a,\\
-b\cdot\frac{1}{((1-1)-1)^2} &= -b,\\
+c\cdot\frac{1}{((1-1)-1)^3} &= -c,\\
-d\cdot\frac{1}{((1-1)-1)^4} &= -d,\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Daher scheint es, dass die Summe aller vorgehenden Terme

$$= -a-b-c-d-\text{etc.}$$

sein wird. Wenn also eine beliebige unendliche Reihe

$$a+b+c+d+e+\text{etc.}$$

auch zur linken Seite hin ins Unendliche fortgesetzt werden würde, würde die Summe der ganzen zu beiden Seiten hin ins Unendliche laufenden Reihe immer $= 0$ sein; wenn diese Begründung freilich richtig wäre.

§20 Aber diese Rechnung ist in der Tat nicht immer unwahr, sondern wird in unendlich vielen Fällen mit der Wahrheit verträglich entdeckt. Denn zuerst erfreuen sich alle geometrischen Progression dieser Eigenschaft, dass sie zu beiden Seiten hin ins Unendliche fortschreitend eine Summe $= 0$ haben. Natürlich ist die Summe der Reihe

$$n + n^2 + n^3 + n^4 + \text{etc.}$$

bekanntlich

$$= \frac{n}{1-n},$$

aber die Summe der vorherigen Summanden

$$1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \text{etc.}$$

ist

$$= \frac{n}{n-1},$$

welche mit jener zusammengebracht Null ergibt. Bei anderen unendlichen Reihen kommt diese Rechnung sehr von der Wahrheit ab; eine Reihe von dieser Art ist

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \text{etc.},$$

welche rückwärts fortgesetzt sich selbst ähnlich und gleich ist, natürlich

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{etc.},$$

deren ganze Summe daher nicht 0 ist, sondern das Doppelte der vorgelegten. Diese Dinge vorgestellt zu haben halte ich dennoch für nicht weniger nützlich als die mit höchster Strenge bewiesene Wahrheiten.