Elemente der Lehre von Festkörpern*

Leonhard Euler

§1 Wie die Geometrie in der Betrachtung von ebenen Formen besteht und welche Dinge über Linien und Winkel in ihr angegeben werden, zu ihren Prolegomena zu rechnen sind, so wird die Stereometrie von der Betrachtung eingenommen, und welche Dinge über die Neigung von Ebenen und über räumlicher Winkel dargetan werden, sind auch als ihre Prolegomena zu betrachten.

§2 Ein Festkörper ist eine von allen Seiten begrenzte Erstreckung dreier Dimensionen, genauso wie eine Oberfläche durch eine Erstreckung nur zweier Dimensionen definiert wird. Es sind aber zwei Klassen von Festkörpern festzulegen, je nachdem ob deren Rand von ebenen oder konvexen oder konkaven Formen eingeschlossen wird.

§3 Hier habe ich beschlossen, nur die Klasse von Festkörpern, die von allen Seiten von ebenen Formen eingeschlossen werden, zu betrachten, ebenso wie Geometrie von gradlinigen Formen aus beginnt; und so wie von gradlinigen Formen im Allgemeinen viele vortreffliche Eigenschaften bemerkt worden sind, so werde ich versuchen, von Festkörpern dieser Klasse einige allgemeine Eigenschaften zu finden.

*Originaltitel: „Elementa doctrinae solidorum“, erstmals publiziert in „Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 4, 1758, pp. 109-140“, Nachdruck in „Opera Omnia: Series 1, Volume 26, pp. 71 - 93“, Eneström Nummer E230, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Sascha Zielke, im Ramen des Hauptseminars „Euler“ 2013/14

§4 Obwohl aber die Stereometrie schon hinreichend sorgfältig ausgearbeitet scheint und in ihr außer der Theorie der Neigung von Ebenen und räumlicher Winkel die Bildung vieler Festkörper und hauptsächlich regelmäßiger Körper gelehrt zu werden pflegt, werden dennoch überall solide Fundamente dieser Lehre von Festkörpern vermisst, aus denen die Natur von Festkörpern dieser Art im Allgemeinen verstanden wird.

§5 Also muss die Betrachtung von Festkörpern auf deren Randfläche gerichtet werden: Nachdem also die berandeten Flächen erkannt worden sind, von welchen der Festkörper von allen Seiten her eingeschlossen wird, wird der Festkörper selbst auf die gleiche Weise erkannt, auf welche die natürliche Beschaffenheit jeder ebenen Figur aus ihrem Perimeter zu definiert zu werden pflegt.

§6 Auf die Randfläche jedes von ebenen Formen eingeschlossen Festkörpers beziehen sich:

1. die seinen Rand festlegenden bestimmenden ebenen Formen, die Seitenflächen genannt werden
2. die Zusammenläufe je zweier Seitenflächen gemäß der Seiten, aus welchen gradlinige Grenzen des Festkörpers entspringen. Diese Grenzen, weil ich ja bei den Verfassern der Stereometrie keinen eigenen Namen auffinde, werde ich Kanten oder Grate nennen.
3. Punkte, in denen drei oder mehrere Seitenflächen zusammentreffen, welche Punkte räumliche Winkel oder Raumwinkel genannt werden.

§7 Es sind also Begrenzungen dreier Geschlechter in jedem Festkörper zu betrachten, natürlich erstens die Punkte, zweitens die Linien, drittens die Oberflächen; oder indem die für dieses Unternehmen eigenen Benennungen gebraucht werden: Erstens die Raumwinkel, zweitens die Kanten und drittens die Seitenflächen. Und mit diesen Grenzen dreier Geschlechter wird der ganze Festkörper bestimmt. Aber eine ebene Figur kann nur eine Begrenzung zweier Arten haben, mit welcher sie bestimmt wird: Erstens natürlich Punkte oder Winkel oder zweitens Linien und Seiten.

§8 Als Beispiel sei (Fig1) der keilförmige Körper $ABCDEF$ vorgelegt, von welchem Grenzen erster Art oder Raumwinkel es sechs gibt: A, B, C, D, E, F.

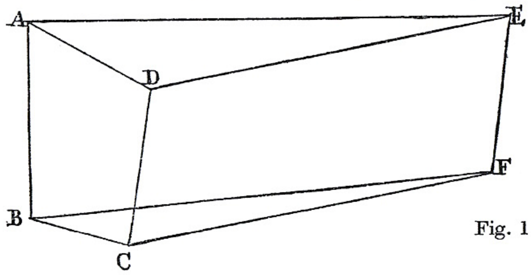


Fig. 1

Die gradlinigen Grenzen zweiter Art oder die an der Zahl neun Grate sind: $AB, BC, CD, DA, AE, DE, BF, CF, EF$. Schließlich gibt es fünf Begrenzungen dirtter Art oder Seitenflächen, natürlich $ABCD, ABFE, ADE, CDEF, BCF$.

§9 Die ganze Diversität von Festkörpern entsprießt also sowohl aus der Anzahl der räumlichen Winkel als auch aus der Anzahl der Kanten sowie in der Tat auch aus der Anzahl der Seitenflächen. Die gebräuchlichen Bezeichnungen von Festkörpern pflegen aber aus der Anzahl der Seitenflächen hergeholt zu werden, woher die Namen Tetraeder, Oktaeder, Dodecaeder und Icosaeder bekannt sind, auch wie sie nur regelmäßigen Körpern zugeteilt zu werden pflegen. Im Allgemeinen wird nämlich mit der Bezeichnung Polyeder irgendein entweder regelmäßiger oder unregelmäßiger Körper angezeigt, welcher von einer gewissen Anzahl an Seitenflächen eingeschlossen wird.

§10 Wenn auf die gleiche Weise die verschiedenen Geschlechter aus der Anzahl der Raumwinkel definiert werden, werden deren Namen Tetragon, Pentagon, Hexagon, Heptagon etc sein. Und der zuvor betrachtete keilförmige Körper wird auf diese Weise Hexagon zu nennen sein, welcher gemäß der Anzahl der Seitenflächen ein Pentaeder ist.

§11 Weil ja Festkörper, die von der gleichen Anzahl von Seitenflächen eingeschlossen werden, sich in der Tat in Bezug auf die Anzahl der räumlichen Winkel voneinander unterscheiden können, wird es passend sein, um sie sorgfältig voneinander zu unterscheiden, die Benennung eines jeden so aus der Anzahl der Seitenflächen wie aus der Anzahl der Raumwinkel herzuholen. So wird der zuvor betrachtete keilförmige Festkörper als hexagonales Pentaeder bezeichnet werden, eine triangulare Pyramide wird ein tetragonaler Tetraeder sein, ein triangulares Prisma ein hexagonaler Pentaeder sein, ein

Parallelepiped hingegen ein orthogonaler Hexaeder und so weiter.

§12 Auch wenn es also ausreicht, um jedes Geschlecht einer gradlinigen ebenen Form zu bezeichnen, die Anzahl der Seiten, von denen sie eingeschlossen wird, mitgeteilt zu haben, weil ja die Anzahl der Raumwinkel immer der Anzahl der Seiten gleich ist, kann dennoch bei Festkörpern die Anzahl der Raumwinkel äußerst von der Anzahl der Seitenflächen verschieden sein, woher es von Nöten ist jeden der beiden Namen zu nennen. So wird eine quadrangulare Pyramide gleichermaßen von 8 Seitenflächen eingeschlossen wie ein triangulares Prisma, aber jenes hat nur fünf Raumwinkel, während dieses sechs hat.

§13 Um aber die Arten von Festkörpern festzulegen, wäre es überflüssig, außer den Anzahlen der Seitenflächen und Raumwinkeln, darüber hinaus die Anzahl der Kanten hinzuzufügen, weil ja, wie ich später zeigen werde, die Anzahl der Grate immer aus der Anzahl der Seitenflächen und räumlichen Winkeln bestimmt wird, so dass, wenn so die Anzahl der Seitenflächen wie die Anzahl der Raumwinkel gegeben war, daher zugleich die Anzahl der Kanten eines jeden Festkörpers bekannt ist.

§14 Weitere Unterschiede von Festkörpern sind aber sowohl aus der natürlichen Beschaffenheit der Seitenflächen wie auch aus der Anzahl der Seiten, von denen gewisse Seitenflächen eingeschlossen werden, also auch in der Tat aus der Gestalt der Raumwinkel, je nachdem ob selbiger entweder aus drei oder mehreren ebenen Winkeln gebildet war, herzuholen. Denn ein räumlicher Winkel kann nicht aus weniger als drei ebenen Winkeln bestehen, es können aber wie viele auch immer mehr, um den Raumwinkel zu bestimmen, zusammenlaufen, solange die Summe all derer kleiner war, als vier rechte.

§15 Nachdem alle Seitenflächen gegeben worden sind, von denen ein gewisser Festkörper eingeschlossen worden ist, wird sofort die Anzahl aller die gesamten Seitenflächen einschließenden Seiten erkannt werden, welcher Anzahl die Anzahl alle ebenen Winkel gleich ist, die in allen Seitenflächen aufgefunden werden, weil in jeder beliebigen Seitenfläche die Anzahl der Winkel der Anzahl der Seiten gleich ist.

§16 Desweiteren kann sogar die Summe aller ebenen Winkel leicht dargeboten werden, deshalb weil in einer gewissen Seitenfläche die Summe all ihrer Winkel aus der Anzahl der Seiten derselben definiert wird. Wie viele Seiten auch immer nämlich die gewisse Seitenfläche hat, die Summe all ihrer Winkel wird, wie bekannt ist, zweimal so vielen rechten Winkeln, wie es Seiten gibt, nach Wegnehmen von vieren, gleich.

§17 Um also einen Festkörper zu definieren, können außer den Anzahlen der Raumwinkel, der Grate und Seitenflächen, welche Sachen sich eigens auf die Hülle des Festkörpers beziehen, bequem auch sowohl die Anzahl aller Seiten und, welche ihr gleich ist, die Anzahl aller ebenen Winkel, sowie in der Tat auch die Summe all dieser ebenen Winkel verwendet werden.

§18 Aus einem Vergleich dieser fünf Sachen, welche in jedem Festkörper zu betrachtet werden können, können viele vortreffliche allgemeine Eigenschaften von Festkörpern erhalten werden, die den Eigenschaften ähnlich sind, welche über gradlinige ebene Formen im Allgemeinen zum Vorschein gebracht werden. Aber die größere Anzahl dieser Sachen, welche wir bei Festkörpern anschauen, wird auch mehr allgemeine Eigenschaften verschaffen, als bei ebenen Formen Platz finden.

§19 Weil diese Eigenschaften beinahe niemand derer, die die Stereometrie behandelt haben, erwähnt hat, werde ich mir Mühe geben, dass, wenn nicht alle, ich dennoch die vortrefflichsten anführe und mit Beweisen bekräfige. Dies scheint umso größeren Nutzen zu haben, weil ohne die Erkenntnis dieser Eigenschaften die Lehre von Festkörpern in keinster Weise mit Erfolg behandelt werden kann.

20 Umso mehr wird es also berechtigt wundersam scheinen, dass, obwohl die ersten Elemente der ebenen Geometrie schon seit einem so langen Zeitabschnitt mit aller Sorgfalt ausgearbeitet und klar dargelegt worden sind, gleichsam die ersten Elemente der Stereometrie noch in so großen Schatten eingehüllt sind und noch niemand gefunden worden ist, der den Versuch unternommen hat, sie ans Licht zu bringen.

Proposition 1

§21 In jedem Festkörper ist die Anzahl der Grate die Hälfte der Anzahl aller ebenen Winkeln, die in den gesamten, seine Hülle festlegenden, Seitenflächen aufgefunden werden.

Beweis

Jede beliebige Kante auf der Hülle des Festkörpers wird von zwei Seiten zweier Seitenflächen gebildet, und weil unter allen Seiten der gesamten Seitenfläche je zwei verbunden die einzelnen Kanten festlegen, ist es offenbar, dass die Anzahl der Kanten die Hälfte der Anzahl aller Seiten ist. Aber die Anzahl aller Seiten ist gleich der Anzahl aller ebenen Winkel, weil jede Seitenfläche so viele Winkel wie Seiten hat. Also ist die Anzahl aller Grate auch die Hälfte der Anzahl aller ebenen Winkel, die in den gesamten, die Hülle des Festkörpers festlegenden Seitenflächen gefunden werden. Q.E.D.

Korollar 1

§22 Weil die Anzahl der Kanten nicht gebrochen sein kann, ist es klar, dass die Anzahl aller Seiten oder aller ebenen Winkel immer gerade sein muss und die Hälfte dieser Zahl wird die Anzahl der Kanten geben, die in der Hülle des Festkörpers entdeckt werden.

Korollar 2

§23 Wenn also alle die Randfläche eines gewissen Festkörpers bestimmenden Seitenflächen Dreiecke waren, wird deren Anzahl notwendigerweise gerade sein. Wenn nämlich die Anzahl dieser Seitenflächen ungerade wäre, dann wäre auch die Anzahl der ebenen Winkel ungerade, was nicht passieren kann. Dasselbe ist über alle Seitenflächen festzuhalten, die Polygone ungerader Seiten sind. Natürlich, wenn die einzelnen Seitenflächen entweder Dreiecke oder Fünfecke oder Siebenecke oder etc waren, muss deren Anzahl immer gerade sein.

KOROLLAR 3

§24 Wenn unter den, die Randfläche eines gewissen Festkörpers festlegenden, Seitenflächen die Anzahl derer, die entweder Tetragone oder Hexagone oder Octagone oder irgendwelche Polygone einer geraden Anzahl von Seiten sind, gleich m war, aber die Anzahl derer, die entweder Trigone oder Pentagone oder Heptagone oder irgendwelche Polygone einer ungerade Seitenanzahl sind, gleich n war, sodass die Anzahl aller Seitenflächen gleich m+n ist, dann muss die Anzahl n gerade sein. Was hingegen die Anzahl m betrifft, ist es egal, ob sie gerade oder ungerade ist.

KOROLLAR 4

§25 Wenn also die Randfläche des ganzen Festkörpers aus a Dreiecken, b Vierecken, c Fünfecken, d Sechsecken, e Siebenecken etc besteht, wird die Anzahl aller Seitenflächen $a + b + c + d + e + ..$ sein. Die Anzahl aller ebenen Winkel oder Seiten wird hingegen gleich $3a + 4b + 5c + 6d + 7e + ..$ sein. Aber die Anzahl aller Kanten an der Hülle des Festkörpers ist $\frac{3a+4b+5c+6d+7e+...}{2}$ woher die Anzahl $a + c + e + ..$ gerade sein muss.

PROPOSITION 2

§26 Die Anzahl aller ebenen Winkel ist entweder gleich der oder größer als die Anzahl aller Seitenflächen dreimal genommen. Oder die Anzahl aller ebenen Winkel kann niemals kleiner sein als das Dreifache der Anzahl der die Randfläche des Festkörpers festlegenden Seitenflächen.

BEWEIS

Alle Seitenflächen sind entweder Dreicke oder Figuren mehrerer Seiten. Wenn alle Seitenflächen Dreiecke sind, wird die Anzahl der Seiten oder der ebenen Winkel dreimal so groß sein wie die Anzahl der Seitenflächen. Wenn aber entweder alle oder einige Seitenflächen mehr als drei Winkel haben, dann wird auch die Anzahl der ebenen Winkel größer sein als das Dreifache der Anzahl der Seitenflächen. Immer also ist die Anzahl der ebenen Winkel entweder gleich der oder größer als die Anzahl der Seitenflächen dreimal genommen und kleiner als selbige kann sie niemals sein. Q.E.D.

KOROLLAR 1

§27 Wenn also alle Seitenflächen triangular waren, wird die Anzahl der ebenen Winkel dem Dreifachen der Anzahl der Seitenflächen gleich sein. Wenn aber nicht alle Seitenflächen triangular sind, sondern es eine Fläche mehrerer Seiten gibt, dann wird die Anzahl der ebenen Winkel größer sein als das Dreifache der Anzahl der Seitenflächen.

KOROLLAR 2

§28 In irgendeinem Festkörper, wenn die Anzahl der Seitenflächen gleich H und die Anzahl der Kanten gleich A gesetzt wird, weil die Anzahl der ebenen Winkel gleich $2A$ ist, wird also entweder $2A = 3H$ oder $2A > 3H$ sein. Unmöglich ist also, dass $2A < 3H$ ist.

KOROLLAR 3

§29 Nachdem diese Benennungen beibehalten worden sind, ist also kein Festkörper gegeben in welchem $A < \frac{3}{2}H$ oder $H > \frac{2}{3}A$ ist. Obwohl aber daher die Relation zwischen der Anzahl der Seitenflächen und der Anzahl der Kanten nicht bestimmt wird, werden dennoch sehr viele Relationen ausgeschlossen, die niemals Geltung haben können.

PROPOSITION 3

§30 Die Anzahl aller ebenen Winkel, die es auf der Randfläche jedes Festkörpers gibt, ist entweder gleich der oder größer als die Anzahl der Raumwinkel dreimal genommen. Oder die Anzahl der ebenen Winkel kann niemals kleiner sein als das Dreifache der Anzahl der Raumwinkel.

BEWEIS

Jeder beliebige Raumwinkel wird entweder von drei oder mehreren ebenen Winkeln gebildet, weniger als drei ebene Winkel können nämlich keinen räumlichen Winkel festlegen. Daher, wenn alle Raumwinkel von drei ebenen gebildet werden, muss die Anzahl der ebenen Winkeln dreimal so groß sein wie die Anzahl der räumlichen Winkel, wenn aber, um gewisse Raumwinkel festzulegen, mehrere ebene Winkel verbunden werden, wird die Anzahl der ebenen Winkel auch größer sein als das Dreifache der Anzahl der räumlichen Winkel, kleiner kann sie aber niemals sein. Q.E.D

KOROLLAR 1

§31 Wenn die Anzahl der Raumwinkel gleich S gesetzt wird, die Anzahl der Kanten hingegen gleich A, wird für irgendeinen Festkörper, weil die Anzahl aller ebenen Winkel gleich $2A$ ist, immer entweder $2A = 3S$ oder $2A > 3S$ sein.

KOROLLAR 2

§32 Es kann also nicht geschehen, dass jemals $2A < 3S$ oder $A < \frac{3}{2}S$ oder $S > \frac{2}{3}A$ ist. Daher, wenn zusätzlich die Anzahl der Seitenflächen gleich H gesetzt wird, kann weder die Anzahl H noch die Anzahl S größer sein als $\frac{2}{3}A$.

PROPOSITION 4

§33 In jedem von ebenen Seitenflächen eingeschlossenen Festkörper überschreitet das Aggregat aus der Anzahl der Raumwinkel und aus der Anzahl der Seitenflächen um zwei die Anzahl der Kanten.

BEWEIS

Natürlich, wenn wie bisher festgelegt wird:

- Die Anzahl der Raumwinkel $= S$
- Die Anzahl der Kanten $= A$
- Die Anzahl der Seitenflächen $= H$

So ist zu beweisen, dass gilt $S + H = A + 2$

Ich bin freilich gezwungen zu gestehen, dass ich einen strengen Beweis dieses Lehrsatzes bis jetzt nicht habe finden können; dennoch wird seine Gültigkeit für alle Geschlechter von Festkörpern, für welche er geprüft werden wird, nicht schwer erkannt werden, so dass die folgende Induktion den Platz eines Beweises einnehmen kann.

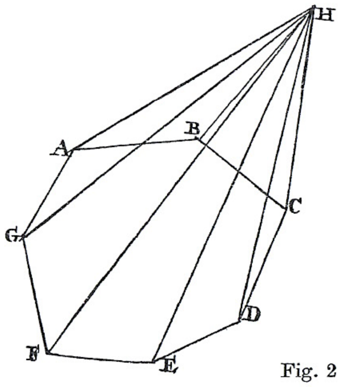


Fig. 2

1. Wir wollen also zuerst irgendeine über der Basis $ABCDEFG$ wie vieler Seiten auch immer aufgestellte und in die Spitze H auslaufende Pyramide (Fig 2) betrachten. Es sei die Anzahl der Seiten der Basis gleich m, und ebenso viele Dreiecke werden von der Basis aus bis hin zur Spitze aufsteigen. Also wird diese Pyramide von $m + 1$ Seitenflächen eingeschlossen, von welchen m Dreiecke sind, eine hingegen ein Polygon von m Winkeln oder Seiten ist. Es wird deshalb die Anzahl der Seitenfläche $H = m + 1$ sein, und die Anzahl der räumlichen Winkel ist in gleicher Weise $S = m + 1$. Darauf ist die Anzahl aller ebenen Winkel gleich $3m + m = 4m$, woher die Anzahl der Kanten $A = 2m$ sein wird. Weil also $H + S = 2m + 2$ ist, wird in diesem Fall natürlich $H + S = A + 2$ sein.

2. Es sei der keilförmige Festkörper (Fig 1) der von irgendeiner Basis der Seiten $ABCD$ aus in die Kante EF auslaufende. Es sei die Basis ein Polygon von m Seiten, es wird $S = m + 2$ sein. Darauf werden außer der Basis selbst so viele Seitenflächen da sein, wie die Basis Seiten hat, woher die Anzahl aller Seitenflächen $H = m + 1$ sein wird, aus diesen Seitenflächen ist natürlich einzig die Basis ein Polygon von m Seiten, die übrigen werden Dreiecke sein, nachdem die zwei ausgenommen worden sind, die vierseitig sein müssen und mit ihrem Zusammenlauf die Kante

EF festlegen. Außer der Basis von m Seiten hat man also $m-2$ Dreiecke und 2 Vierecke, woher die Anzahl aller Seiten oder ebenen Winkel sein wird:

$$m + 3(m-2) + 2 * 4 = 4m + 2$$

und daher geht die Anzahl der Kanten als $A = 2m + 1$ hervor. Weil also $H + S = 2m + 3$ ist, wird $H + S = A + 2$ sein.

3. Es sei der Festkörper (Fig 3) einem Kasten oder einer Kiste ähnlich, innerhalb der zwei Basen $ABCD$ und $EFGH$ enthalten, jede der beiden Basen habe aber die Anzahl der Seiten gleich m und die Anzahl der Raumwinkel wird $S = 2m$ sein.

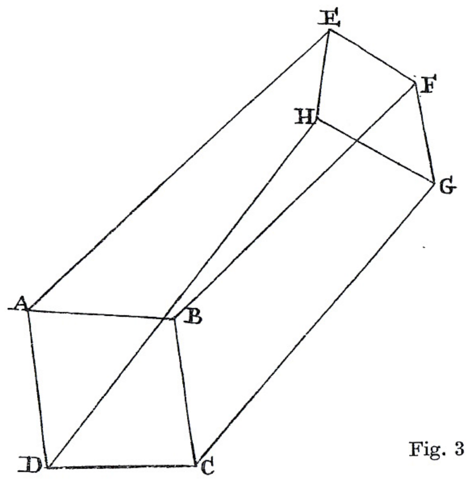


Fig. 3

Darauf werden außer diesen zwei Basen die übrigen Seitenflächen vierseitig und deren Anzahl gleich m sein, woher die Anzahl aller Seitenflächen sein wird

$$H = m + 2$$

Aber die Anzahl der ebenen Winkel, wegen der zwei Seitenflächen von m Seiten und der m vierseitigen Seitenflächen, wird gleich $2m + 4m = 6m$ sein, und daher wird die Anzahl der Kanten $A = 3m$ gefolgert. Daher, weil ist

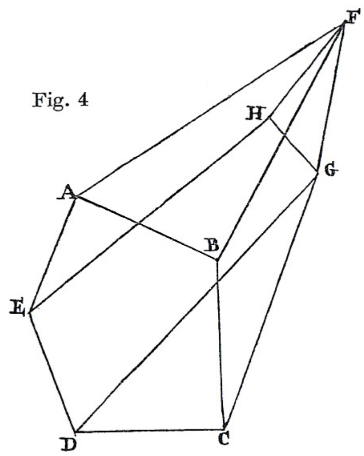
$$H + S = 3m + 2$$

wird erneut sein

$$H + S = A + 2$$

4. Es habe erneut der Festkörper (Fig 4) die zwei Basen $ABCDE$ und FGH, die sich aber nicht derselben Anzahl an Seiten erfreuen.

Fig. 4



Es sei also für die eine Basis $ABCDE$ die größere Anzahl der Seiten gleich $m+n$, für die andere Basis FGH hingegen sei die Anzahl der Seiten gleich m, und die Anzahl der Raumwinkel wird gleich $m+n+m$ oder $S = 2m+n$ sein. Dann wird es außer den zwei Basen so viele Seitenflächen geben, wie die eine Basis Seiten hat, die sich der größeren Anzahl an Seiten erfreut, natürlich $m+n$, woher die Anzahl aller Seitenflächen $H = m+n+2$ ist. Weil von diesen die eine Basis $m+n$ Seiten, die andere m hat, es zwischen den übrigen Seitenflächen, deren Anzahl $m+n$ ist, hingegen so viele vierseitige gegen muss, wie die Basis FGH Seiten hat, natürlich m, die übrigen aber, deren Anzahl n ist, dreieckig sind, ist die Anzahl aller ebenen Winkel

$$m+n+m+4m+3n = 6m+4n$$

die Anzahl der Kanten wird $A = 3m+2n$ sein wird. Weil also $H+S = 3m+2n+2$ ist, wird widerum $H+S = A+2$ sein.

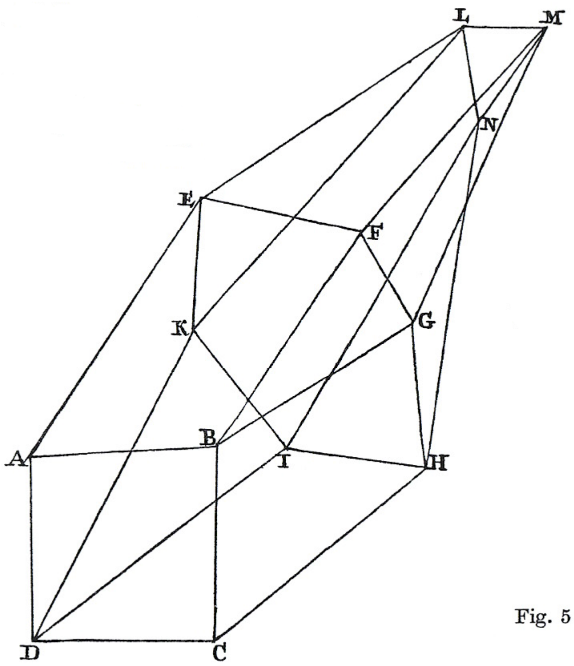


Fig. 5

5. Es sei der Körper (Fig 5) erneut gegen die zwei Basen $ABCD$ und LMN beschränkt, um die Mitte herum habe er aber die Raumwinkel E, F, G, H, I, K. Es sei die Anzahl der Seiten der Basis $ABCD$ gleich m, der Basis LMN gleich n, aber die Anzahl der Raumwinkel um die Mitte herum sei gleich p, welche größer sei als m und als n.
Es wird also die Anzahl aller Raumwinkel $S = m + n + p$ sein. Dann werden aber von den mittleren Raumwinkeln aus zur Basis $ABCD$ hin von der Anzahl p Seitenflächen ausgerichtet werden, von welchen m quadrilateral sein werden, die $p - m$ übrigen triangular. Auf die gleiche Weise werden zu der anderen Basis LMN auch an der Zahl $= p$ Seitenflächen ausgerichtet werden, von denen n vierseitig sein werden, die übrigen $n - p$ hingegen dreiseitig, so wird mit den zwei Basen die Anzahl aller Seitenflächen gleich $2 + p + p$ oder $H = 2p + 2$ sein. Weil von diesen eine m Seiten hat, die andere n Seiten, und die Anzahl der vierseitigen $= m + n$, der dreiseitigen $= 2p - m - n$ ist, wird die Anzahl aller ebenen Winkel sein

$$m + n + 4(m + n) + 3(2p - m - n) = 6p + 2m + 2n$$

und daher geht die Anzahl der Kanten als $A = 3p + m + n$ hervor. Daher, weil $H + S = 3p + m + n + 2$ ist, wird erneut $H + S = A + 2$ sein.

6. Nachdem dieselben Dinge wie im vorhergehenden Fall festgelegt worden sind, sei $m > p$ und $p > n$, es wird wie zuvor die Anzahl der Raumwinkel $S = m + n + p$ sein. Von der Basis $ABCD$ aus werden nun aber m Seitenflächen zu den mittleren Raumwinkeln ausgerichtet werden, von denen p vierwinklig und $m - p$ dreiwinklig sein werden. Von den mittleren Winkeln werden aber zur Basis LMN p Seitenflächen gerichtet werden, von denen n vierseitig und $p - n$ dreiseitig sein werden. Daher wird also die Anzahl aller Seitenflächen gleich $2 + m + p$ oder $H = m + p + 2$ sein, von welchen Seitenflächen eine m Seiten hat, eine andere n Seiten, $p + n$ vierseitig und $m - p + p - n$ oder $m - n$ dreiseitig sind. Dieser Sache wegen wird die Anzahl aller ebenen Winkel sein
$$m + n + 4(p + n) + 3(m - n) = 4p + 4m + 2n$$
und daher die Anzahl der Seitenflächen $A = 2p + 2m + n$. Daher, weil gilt $H + S = 2p + 2m + n + 2$ wird $H + S = A + 2$ sein.

7. Wenn die Anzahl p der mittleren Raumwinkel kleiner ist als jeder der beiden m und n ist, wird freilich wie zuvor die Anzahl der Raumwinkel sein
$$S = m + n + p$$
Aber nun werden von der Basis $ABCD$ zu den mittleren Winkeln die m Seitenflächen gerichtet werden, von der anderen Basis hingegen n, und auf beiden Seiten werden p vierwinklig sein, aus jenem Teil in der Tat $m - p$, aus diesem hingegen $n - p$ dreiwinklig. Daher wird die Anzahl aller Seitenflächen gleich $2 + m + n$ oder $H = m + n + 2$ sein. Aber die Anzahl der ebenen Winkel wird sein
$$m + n + 4 - 2p + 3(m + n - 2p) = 2p + 4m + 4n$$
Daher geht die Anzahl der Kanten als $A = p + 2m + 2n$ hervor, und weil $H + S = 2m + 2n + p + 2$ ist, wird $H + S = A + 2$ sein.

8. Auch wenn diese Dinge hinreichen könnten, um die Gültigkeit der Proposition aufzuzeigen, gefällt es dennoch, sie zusätzlich aus den regelmäßigen Körpern heraus zu bekräftigen. Für den Tetraeder wird freilich die Anzahl der Seitenflächen $H = 4$ sein, weil welche triangular

sind, wird die Anzahl aller ebenen Winkel gleich 12 und die Anzahl der Kanten gleich 6 sein, und weil die einzelnen Raumwinkel aus je drei ebenen gebildet werden, wird deren Anzahl $S = \frac{12}{3} = 4$ sein. Daher ist $H + S = 8 = A + 2$. Für den Hexaeder ist $H = 6$ und wegen der einzelnen vierseitigen Seitenflächen ist die Anzahl der ebenen Winkel gleich 24 und daher die Anzahl $A = 12$. Und während je drei ebene Winkel einen einzigen Raumwinkel festlegen, wird die Anzahl der Raumwinkel $S = \frac{24}{3} = 8$ sein, und so $H + S = 14 = A + 2$. Für den Oktaeder ist $H = 8$, und weil dessen Seitenflächen dreiseitig sind, wird die Anzahl aller ebenen Winkel gleich 24 und daher die Anzahl der Kanten $A = 12$ sein, und während je vier ebene Winkel einen räumlichen bilden, wird die Anzahl der Raumwinkel $S = \frac{24}{4} = 6$ sein, und $H + S = 14 = A + 2$.
Für den Dodokaeder ist $H = 12$, weil dessen Seitenflächen pentagonal sind, wird die Anzahl der ebenen Winkel gleich $5 * 12 = 60$ und daher die Anzahl der Kanten $A = 30$ sein. Darauf, weil je drei ebene Winkel zu einem räumlichen zusammenlaufen, wird die Anzahl der Raumwinkel $S = 20$ sein, also ist $H + S = 32 = A + 2$. Für den Ikosaeder ist $H = 20$, weil dessen Seitenflächen triagonal sind, wird die Anzahl der ebenen Winkel gleich 60 und die Anzahl der Kanten $A = 30$ sein. Dann wird aber, weil die einzelnen Raumwinkel auf fünf ebenen bestehen, deren Anzahl $S = 12$ und daher $H + S = 32 = A + 2$ sein.
Weil also die Gültigkeit der Proposition in all diesen Fällen stimmig ist, besteht kein Zweifel, dass sie bei ganz und gar allen Festkörpern Geltung hat, und so scheint die Proposition hinreichend bewiesen.

KOROLLAR 1

§34 Wenn also in einem gewissen Festkörper die Anzahl der Raumwinkel S mit der Anzahl der Seitenflächen H gegeben ist, wird daher sofort die Anzahl der Kanten oder Grate A erkannt werden, weil $A = H + S - 2$ ist.

KOROLLAR 2

§35 Nachdem aber in irgendeinem Festkörper die Anzahl der Raumwinkel S mit der Anzahl der Kanten A gegeben worden ist, wird daher leicht an die Anzahl der Seitenflächen H erschlossen, weil $H = A - S + 2$ ist.

Korollar 3

§36 Nachdem aber in irgendeinem Festkörper die Anzahl der Seitenflächen zusammen mit der Anzahl der Kanten A gegeben worden ist, wird daher leicht die Anzahl der Raumwinkel S aufgefunden werden, weil $S = A - H + 2$ ist.

Proposition 5

§37 Es kann kein Festkörper existieren, in welchem die Anzahl der Kanten oder Grate um sechs vermehrt größer wäre, als entweder das Dreifache der Anzahl der Seitenflächen oder das Dreifache der Anzahl der Raumwinkel.

Beweis

Es sei die Anzahl der Kanten gleich A, die Anzahl der Seitenflächen gleich H und die Anzahl der Raumwinkel gleich S, und oben haben wir gesehen, dass es nicht geschehen kann, dass entweder gilt

$$3H > 2A \text{ oder } 3S > 2A$$

es werden also diese Formeln $3H > 2A$ und $3S > 2A$ unmöglich sein. Nun haben wir aber gesehen, dass ist

$$H + S = A + 2 \text{ oder } H = A - S + 2 \text{ und } S = A - H + 2$$

welche Werte in jenen unmöglichen Formeln eingesetzt die folgenden geben werden:

$$3A - 3S + 6 > 2A \text{ und } 3A - 3H + 6 > 2A$$

welche in diese übergehen

$$A + 6 > 3S \text{ und } A + 6 > 3H$$

Daher ist es offenbar, dass es nicht geschehen kann, dass die Anzahl der Kanten um sechs vermehrt größer ist, als entweder das Dreifache der Seitenflächen oder das Dreifache der Anzahl der Raumwinkel. Q.E.D

KOROLLAR 1

§38 In jedem Festkörper ist also entweder $A+6=3H$ oder $A+6<3H$, und auf die gleiche Weise ist entweder $A+6=3S$ oder $A+6<3S$. Oder es wird, wenn $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ vier positive Zahlen bezeichnen, die Null nicht ausgeschlossen, sein:

$$A+6+\alpha=3H \text{ und } A+6+\beta=3S$$

KOROLLAR 2

§39 Dann wird in der Tat, weil immer entweder $A=\frac{3}{2}S$ oder $A>\frac{3}{2}S$ ist, ebenso entweder $A=\frac{3}{2}H$ oder $A>\frac{3}{2}H$, auf die gleiche Weise sein

$$A=\frac{3}{2}H+\gamma \text{ und } A=\frac{3}{2}S+\delta$$

wo γ und δ, wie zuvor α und β, keine negativen Zahlen sein können.

KOROLLAR 3

§40 Nachdem diese letzten Werte in den vorhergehenden Gleichungen eingesetzt worden sind, werden diese Gleichungen hervorgehen:

$$\frac{3}{2}H+6+\alpha+\gamma=3H \text{ und } \frac{3}{2}S+6+\beta+\delta=3S$$

oder

$$4+\frac{2}{3}(\alpha+\gamma)=H \text{ und } 4+\frac{2}{3}(\beta+\delta)=S$$

woher es klar zutage tritt, dass so die Anzahl der Oberflächen wie die Anzahl der Raumwinkel nicht kleiner als vier sein kann.

KOROLLAR 4

§41 Weil $H+S=A+2$ ist, wird unter Verwendung dieser letzten Werte sein

$$8+\frac{2}{3}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=A+2$$

woher erschlossen wird, dass die Anzahl der Kanten A nie kleiner als sechs sein kann. Also ist die triangulare Pyramide der einfachste aller Festkörper, weil so die Anzahl der Seitenflächen, wie der Raumwinkel gleich 4 und die Anzahl der Kanten gleich 6 ist.

PROPOSITION 6

§42 Es kann kein Festkörper existieren, in welchem entweder die Anzahl der Seitenflächen um vier vermehrt größer ist als die doppelte Anzahl der Raumwinkel oder in welchem die Anzahl der Raumwinkel um vier vermehrt größer ist als die doppelte Anzahl der Seitenflächen

BEWEIS

Es sei die Anzahl der Seitenflächen gleich H, die Anzahl der Raumwinkel gleich S und die Anzahl der Kanten gleich A, und weil wir ja oben gezeigt haben, dass es nicht geschehen kann, dass entweder $3H > 2A$ oder $3S > 2A$ ist, werden diese zwei Formen unmöglich sein

$$3H > 2A \text{ und } 3S > 2A$$

Weil nun $A = H + S - 2$ ist, werden nach Einsetzen dieses Wertes für A die folgenden Formeln unmöglich sein:

$$3H > 2H + 2S - 4 \text{ und } 3S > 2H + 2S - 4$$

welche in diese übergehen

$$H + 4 > 2S \text{ und } S + 4 > 2H$$

Daher kann weder die Anzahl der Seitenflächen um vier vermehrt größer sein als die zweifache Anzahl der Raumwinkel, noch kann die Anzahl der Raumwinkel um vier vermehrt größer sein als die zweifache Anzahl der Seitenflächen. Q.E.D

KOROLLAR 1

§43 In jedem Festkörper ist also entweder $H + 4 = 2S$ oder $H + 4 < 2S$, darauf ist auf gleiche Weise entweder $S + 4 = 2H$ oder $S + 4 < 2H$. Wenn also α und β positive Zahlen, die Null nicht ausgenommen, bezeichen, werden in jeden Festkörper diese Gleichungen Geltung haben

$$H + 4 + \alpha = 2S \text{ und } S + 4 + \beta = 2H$$

Korollar 2

§44 Weil also $S = 2H - 4 - \beta$ und $S = \frac{1}{2}H + 2 + \frac{1}{2}\alpha$ ist, kann die Anzahl der Raumwinkel S weder größer sein als $2H - 4$ noch kleiner sein als $\frac{1}{2}H + 2$. Also kann die Anzahl der Raumwinkel S nicht außerhalb dieser Grenzen $2H - 4$ und $\frac{1}{2}H + 2$ fallen.

Korollar 3

§45 Auf die gleiche Weise, weil $H = 2S - 4 - \alpha$ und $H = \frac{1}{2}S + 2 + \frac{1}{2}\beta$ ist, kann die Anzahl der Seitenflächen H weder größer sein als $2S - 4$ noch kleiner sein als $\frac{1}{2}S + 2$. Daher kann die Anzahl der Seitenflächen H nicht außerhalb der Grenzen $2S - 4$ und $\frac{1}{2}S + 2$ fallen.

Korollar 4

§46 Desweiteren wird aus der oberen Proposition eingesehen, dass die Anzahl der Kanten A weder außerhalb dieser Grenzen $\frac{3}{2}H$ und $3H - 6$ noch außerhalb dieser Grenzen $\frac{3}{2}S$ und $3S - 6$ fallen kann. Auf die gleiche Weise tritt es ebendaher klar zutage, dass die Anzahl der Seitenflächen nicht außerhalb dieser Grenzen $\frac{2}{3}A$ und $\frac{1}{3}A + 2$ und auch die Anzahl der Raumwinkel S nicht außerhalb dieser selben Grenzen $\frac{2}{3}A$ und $\frac{1}{3}A + 2$ fallen kann.

Korollar 5

§47 Nachdem also die Anzahl der Seitenflächen gegeben worden sind, können so für die Anzahl der Raumwinkel wie für die Anzahl der Kanten Grenzen angegeben werden, welche nicht überschritten werden können und welche die beigefügte Tabelle darbiete:

Anzahl der Seitenflächen	Anzahl der Raumwinkel	Anzahl der Kanten
4	4....4	6....6
5	6....4$\frac{1}{2}$	7$\frac{1}{2}$....9
6	8....5	9....12
7	10....5$\frac{1}{2}$	10$\frac{1}{2}$....15
8	12....6	12....18
9	14....6$\frac{1}{2}$	13$\frac{1}{2}$....21
10	16....7	15....24
11	18....7$\frac{1}{2}$	16$\frac{1}{2}$.....27
12	20....8	18.....30
13	22....8$\frac{1}{2}$	19$\frac{1}{2}$.....33
14	24....9	21.....36
15	26....9$\frac{1}{2}$	22$\frac{1}{2}$.....39
16	28....10	24.....42
17	30....10$\frac{1}{2}$	25$\frac{1}{2}$.....45
18	32....11	27.....48
19	34....11$\frac{1}{2}$	28$\frac{1}{2}$.....51
20	36....12	30.....54
21	38....12$\frac{1}{2}$	31$\frac{1}{2}$.....57
22	40....13	33.....60
23	42....13$\frac{1}{2}$	34$\frac{1}{2}$.....63
24	44....14	36.....66
25	46....14$\frac{1}{2}$	37$\frac{1}{2}$.....69

Tabelle 1: Grenzen, welche nicht überschritten werden können

KOROLLAR 6

§48 Wenn aber die Anzahl der Raumwinkel S gegeben worden ist, gehen für die Anzahl der Kanten dieselben Schranken hervor, welche die Tabelle darbietet, für die Anzahl der Seitenflächen werden hingegen die Grenzen aufgefunden, die in der Tabelle für die Anzahl der Raumwinkel dargeboten worden ist.

KOROLLAR 7

§49 Aber wenn die Anzahl der Kanten A gegeben worden ist, weil ja weder die Anzahl der Seitenflächen noch die Anzahl der Raumwinkel die Schranken $\frac{2}{3}A$ und $\frac{1}{3}A+2$ übersteigen kann, wird die folgende Tabelle von Schranken konstruiert werden:

Anzahl der Kanten	Grenzen für die Zahlen H und S
6	4....4
7	$4\frac{2}{3}$....$4\frac{1}{3}$
8	$5\frac{1}{3}$....$4\frac{2}{3}$
9	6....5
10	$6\frac{2}{3}$....$5\frac{1}{3}$
11	$7\frac{1}{3}$....$5\frac{2}{3}$
12	8....6
13	$8\frac{2}{3}$....$6\frac{1}{3}$
14	$9\frac{1}{3}$....$6\frac{2}{3}$
15	10....7
16	$10\frac{2}{3}$....$7\frac{1}{3}$
17	$11\frac{1}{3}$....$7\frac{2}{3}$
18	12....8
19	$12\frac{2}{3}$....$8\frac{1}{3}$

Anzahl der Kanten	Grenzen für die Zahlen H und S
20	$13\frac{1}{3}....8\frac{2}{3}$
21	14....9
22	$14\frac{2}{3}....9\frac{1}{3}$
23	$15\frac{1}{3}....9\frac{2}{3}$
24	16....10
25	$16\frac{2}{3}....10\frac{1}{3}$
26	$17\frac{1}{3}....10\frac{2}{3}$
27	18....11
28	$18\frac{2}{3}....11\frac{1}{3}$
29	$19\frac{1}{3}....11\frac{2}{3}$
30	20....12
31	$20\frac{2}{3}....12\frac{1}{3}$
32	$21\frac{1}{3}....12\frac{2}{3}$
33	22....13
34	$22\frac{2}{3}....13\frac{1}{3}$
35	$23\frac{1}{3}....13\frac{2}{3}$
36	24....14
37	$24\frac{2}{3}....14\frac{1}{3}$
38	$25\frac{1}{3}....14\frac{2}{3}$
39	26....15
40	$26\frac{2}{3}....15\frac{1}{3}$
41	$27\frac{1}{3}....15\frac{2}{3}$
42	28....16
43	$28\frac{2}{3}....16\frac{1}{3}$
44	$29\frac{1}{3}....16\frac{2}{3}$

Anzahl der Kanten	Grenzen für die Zahlen H und S
45	30....17
46	$30\frac{2}{3}$....$17\frac{1}{3}$
47	$31\frac{1}{3}$....$17\frac{2}{3}$
48	32....18
49	$32\frac{2}{3}$....$18\frac{1}{3}$
50	$33\frac{1}{3}$....$18\frac{2}{3}$
51	34....19
52	$34\frac{2}{3}$....$19\frac{1}{3}$
53	$35\frac{1}{3}$....$19\frac{2}{3}$
54	36....20
55	$36\frac{2}{3}$....$20\frac{1}{3}$
56	$37\frac{1}{3}$....$20\frac{2}{3}$
57	38....21
58	$38\frac{2}{3}$....$21\frac{1}{3}$
59	$39\frac{1}{3}$....$21\frac{2}{3}$
60	40....22

KOROLLAR 8

§50 Es ist passend, dass zu dieser Tabelle darüber hinaus angemerkt wird, wie sehr die eine der Zahlen H und S die kleinere Grenze überragt, dass sie genauso sehr von der größeren Grenze nach unten abweichen muss. Wenn so die Anzahl der Kanten $A = 30$ und die Anzahl der Seitenflächen $H = 12 + n$ ist, wird die Anzahl der Raumwinkel $S = 20 - n$ sein, aber $20 - n$ darf nicht kleiner sein als 12, woher n acht nicht überragen kann.

PROPOSITION 7

§51 Es kann kein Festkörper existieren, all dessen Seitenflächen hexagonal sind oder von mehr Seiten haben, und es kann kein Festkörper existieren, all dessen Raumwinkel aus sechs oder mehr ebenen Winkeln gebildet worden sind.

BEWEIS

Es sei wie bisher die Anzahl der Kanten gleich A, die Anzahl der Seitenflächen gleich H und die Anzahl der Raumwinkel gleich S. Wenn nun alle Seitenflächen hexagonal wären oder noch mehr Seiten hätten, wäre die Anzahl alle ebenen Winkel entweder gleich $6H$ oder größer als $6H$, daher würde die Anzahl der Kanten entweder gleich $3H$ oder größer als $3H$ sein. Aber eben haben wir gesehen, dass immer $A = 3H - 6$ oder $A < 3H - 6$ ist. Auf keine Weise kann es also geschehen, dass entweder $A = 3H$ oder $A > 3H$ wäre. Daher ist es unmöglich, dass alle Seitenflächen hexagonal sind oder mehrere Seiten haben.
Auf die gleiche Weise, wenn alle Seitenwinkel aus sechs oder mehr ebenen Winkel bestünden, wäre die Anzahl aller ebenen Winkel entweder gleich $6S$ oder größer als $6S$, und daher wäre die Anzahl der Kanten H entweder gleich $3S$ oder größer als $3S$. Aber oben haben wir bewiesen, dass es nicht geschehen kann, dass $A + 6 > 3S$, um vieles weniger wird also $A = 3S$ oder sogar $A > 3S$ sein können. Daher ist es unmöglich, dass alle räumlichen Winkel aus sechs oder mehr ebenen Winkeln bestehen.

PROPOSITION 8

§52 Die Summe aller ebenen Winkel, die auf der Randfläche irgendeines Festkörpers aufgefunden werden, ist viermal so vielen rechten Winkeln gleich, wie Einheiten im Übertrag der Anzahl der Kanten über die Anzahl der Seitenflächen auftreten.

BEWEIS

Es sei die Anzahl der Kanten gleich A und die Anzahl der Seitenflächen gleich H, und es ist zu beweisen, dass die Summer aller ebenen Winkel gleich $4A - 4H$ rechten ist. Um dies zu beweisen, bestehe die Randfläche des Festkörpers

- aus a trigonalen Seitenflächen
- aus b tetragonalen Seitenflächen
- aus c pentagonalen Seitenflächen
- aus d hexagonalen Seitenflächen
- aus e heptagonalen Seitenflächen etc.

es wird also die Anzahl der Seitenflächen $H = a + b + c + d + e + etc$ und die Anzahl der Kanten $A = \frac{1}{2}(3a + 4b + 5c + 6d + 7e + etc)$ sein, weil die Anzahl der ebenen Winkel gleich $3a + 4b + 5c + 6d + 7e + etc$ ist. Weil nun die Summe der Winkel

- eines Dreiecks gleich 2 rechten ist
- eines Vierecks gleich 4 rechten ist
- eines Fünfecks gleich 6 rechten ist
- eines Hexagons gleich 8 rechten ist
- eines Heptagons gleich 10 rechten ist etc.

wird die Summe aller ebenen Winkel gleich $2a + 4b + 6c + 8d + 10e + etc$ sein, oder es ist $4A = 6a + 8b + 10c + 12d + 14e + etc$ und $4H = 4a + 4b + 4c + 4d + 4e + etc$ also $4A - 4H = 2a + 4b + 6c + 8d + 10e + etc$.
Als logische Konsequenz ist die Summe aller ebenen Winkel gleich $4A - 4H$ rechten Winkeln. Q.E.D

KOROLLAR 1

§53 Weil entweder $2A = 3H$ oder $2A > 3H$ ist, wenn wir $2A = 3H + \alpha$ festlegen, wird die Summe aller ebenen Winkel gleich $2H + 2\alpha$ sein und kann daher nicht kleiner sein als $2H$ rechte.

KOROLLAR 2

§54 Darauf, weil $A = 3H - 6 - \alpha$ ist, wird sein

$$4A - 4H = 8H - 24 - 4\alpha$$

Daher kann die Summe aller ebenen Winkel nicht größer als $8H - 24$ rechte Winkel sein. Und daher kann die Anzahl der rechten Winkel, welcher die Summe aller ebenen Winkel gleich ist, nicht außerhalb der Grenzen $2H$ und $8H - 24$ fallen.

PROPOSITION 9

§55 Die Summe aller ebenen Winkel, die auf der Randfläche irgendeines Festkörpers auftreten, ist viermal so vielen rechten Winkeln, wie Raumwinkel da sind, um acht vermindert gleich.

BEWEIS

Es sei die Anzahl der Raumwinkel gleich S und es muss bewiesen werden, dass die Summe aller ebenen Winkel gleich $4S - 8$ rechten Winkeln ist. Es werden dafür die Anzahl der Seitenflächen gleich H und die Anzahl der Kanten gleich A gesetzt, und weil wir in der vorhergehenden Proposition bewiesen haben, dass die Summe aller ebenen Winkel gleich $4A - 4H$ rechten Winkeln ist, wird $H + S = A + 2$ und $A - H = S - 2$ sein, und daher $4A - 4H = 4S - 8$. Daher ist es klar, dass die Summe aller ebenen Winkel gleich $4S - 8$ rechten ist oder viermal so vielen rechten gleich wird, wie es Raumwinkel gibt, um acht vermindert. Q.E.D

KOROLLAR 1

§56 Vortrefflich und vorzüglich ist diese Eigenschaft von Festkörpern, dass die Summe aller ebenen Winkel einzig durch die Anzahl der Raumwinkel definiert wird, auf die gleiche Weise, auf die in jeder ebenen Figur die Summe der Winkel aus deren Anzahl erschlossen wird.

KOROLLAR 2

§57 Mit Recht wird also ein allein aus der Anzahl der Raumwinkel hergeholter Beweis dieser Proposition gewünscht, so dass in ihn weder die Anzahl der Seitenflächen, noch die Anzahl der Kanten eingeht. Daher also, und aus der vierten Proposition, von welcher ich nicht einmal einen unumstößlichen Beweis habe darbieten können, zeigt es sich umso mehr, wie wenig auch jetzt noch die Elemente der Stereometrie entwickelt sind.

KOROLLAR 3

§58 Weil ja die Summe aller ebenen Winkel einzig von der Anzahl der Raumwinkel abhängt, bestimmt die Anzahl einen Charakter solcher Art von Festkörpern, von welchem die Geschlechter von Festkörpern zu derivieren scheinen. Daher werden also die Geschlechter der Festkörper gemäß der Anzahl der Raumwinkel die folgenden sein:

1. Tetragon
2. Pentagon
3. Hexagon etc.

welche später durch die Anzahl der Seitenflächen mehr bestimmt werden.

PROBLEM 1

§59 Bemerkenswertere Geschlechter, zu welchen alle von ebenen Figuren eingeschlossene Festkörper zu rechnen sind, aufzuzählen und mit geeigneten Namen zu bezeichnen.

LÖSUNG

Es sei die Anzahl der Raumwinkel gleich S und oben haben wir gesehen, dass die Anzahl der Seitenflächen nicht außerhalb der Grenzen $2S-4$ und $\frac{1}{2}S+2$ fallen kann. Daher werden aus der in Paragraph 47 dargebotenen Tabelle für jede Anzahl an Raumwinkeln die folgenden Geschlechter von Festkörpern festgelegt werden:

Anzahl der Raumwinkel	Anzahl der Seitenflächen	Anzahl der Kanten	Namen der Geschlechter
4	4	6	vierflächiges Tetragon
5	5	8	fünfflächiges Pentagon
	6	9	sechsflächiges Pentagon
6	5	9	fünfflächiges Hexagon
	6	10	sechsflächiges Hexagon
	7	11	siebenflächiges Hexagon
	8	12	achtflächiger Oktaeder
7	6	11	sechsflächiges Heptagon
	7	12	siebenflächiges Heptagon
	8	13	achtflächiges Heptagon
	9	14	neunflächiges Heptagon
	10	15	zehnflächiges Heptagon
8	6	12	sechsflächiges Oktagon
	7	13	siebenflächiges Oktagon
	8	14	achtflächiges Oktagon
	9	15	neunflächiges Oktagon
	10	16	zehnflächiges Oktagon
	11	17	elfflächiges Oktagon
	12	18	zwölfflächiges Oktagon
9	7	14	siebenflächiges Enneagon
	8	15	achtflächiges Enneagon
	9	16	neunflächiges Enneagon
	10	17	zehnflächiges Enneagon
	11	18	elfflächiges Enneagon
	12	19	zwölfflächiges Enneagon

Anzahl der Raumwinkel	Anzahl der Seitenflächen	Anzahl der Kanten	Namen der Geschlechter
	13	20	dreizehnflächiges Enneagon
	14	21	vierzehnflächiges Enneagon
10	7	15	siebenflächiges Decagon
	8	16	achtflächiges Decagon
	9	17	neunflächiges Decagon
	10	18	zehnflächiges Decagon
	11	19	elfflächiges Decagon
	12	20	zwölfflächiges Decagon
	13	21	dreizehnflächiges Decagon
	14	22	vierzehnflächiges Decagon
	15	23	fünfzehnflächiges Decagon
	16	24	sechzehnflächiges Decagon

Es wäre überflüssig, diese Liste der Geschlechter von Festkörpern weiter fortzusetzen, weil ja aus diesen das Fortschreiten der folgenden Geschlechter von selbst erkannt wird. Q.E.I

KOROLLAR 1

§60 Es ist passend, dass hier bemerkt wird, dass kein Festkörper gegeben ist, welcher sieben Kanten hat, obwohl dennoch das erste Geschlecht nur sechs Kanten hat. Das zweite Geschlecht hat acht, die folgenden mehr, und in den Anzahlen der Kanten tauchen nach sechs alle Zahlen auf, allein sieben ausgenommen.

KOROLLAR 2

§61 Aus dem ersten Geschlecht tritt es klar zutage, dass jeder tetragonaler Festkörper ein Tetraeder ist, und umgekehrt, weil das Geschlecht, weil es das einfachste ist, so eine einzige Gattung enthält, die eine triangulare von vier Dreiecken eingeschlossene Pyramide ist.

Korollar 3

§62 Das zweite Geschlecht hat 16 ebene und 5 räumliche Winkel, von diesen werden vier aus drei ebenen, einer aus vier ebenen gebildet sein, und gleichermaßen werden fünf ihrer Seitenflächen Dreiecke sein, eine hingegen ein Viereck, woher dieses Geschlecht eine einzige Gattung, natürlich die über einer vierseitigen Basis errichtete Pyramide, enthält.

Korollar 4

§63 Das dritte Geschlecht, was 18 ebene, 5 räumliche Winkel und 6 Seitenflächen hat, wird von sechs Dreiecken eingeschlossen, was auf eine einzige Weise geschehen kann, und dieser Festkörper wird eine triangulare Doppelpyramide sein, oder er wird aus zwei über die zwei gleichen Basen verbundenen Pyramiden zusammengesetzt sein.

Korrollar 5

§64 Das vierte Geschlecht enthält in gleicher Weise eine einzige von drei Vierecken und zwei Dreiecken eingeschlossene Gattung, welche triangulares Prisma genannt wird. Alle folgenden Geschlechter erfassen meistens mehrere Gattungen, aber es ist nicht möglich, sich mit ihrer Aufzählung aufzuhalten, deshalb weil noch andere sich hierauf beziehende Eigenschaften von Festkörpern noch nicht hinreichend sind.

Bemerkung

§65 Dies sind also gleichsam die ersten Elemente der Stereometrie, welche die Beschaffenheiten und Eigenschaften von im Allgemeinen betrachteten Festkörpern enthalten, woher, darauf folgend, die Eigenschaften der einzelnen Gattungen abzuarbeiten sind. Die hier angegebenen Eigenschaften sind natürlich denen ähnlich, die in der ebenen Geometrie über die allgemeinen Eigenschaften von Flächen bewiesen zu werden pflegen und welche auf diese zwei reduziert werden, dass in jeder geradlinigen Figur zuerst die Anzahl aller Winkel gleich der Anzahl der Seiten ist, dann aber dass die Summe aller Winkel zweimal so vielen rechten Winkeln, wie es Seiten gibt, um vier vermindert gleich sein wird. Bei Festkörpern ist aber die Anzahl von fundamentalen Propositionen dieser Art um Vieles größer, was freilich wegen der größeren Menge an Sachen, mit welchen sie bestimmt werden, nicht erstaunlich ist. Aber es scheint dies mit Recht im höchsten Maße wundersam, dass, obwohl nicht nur die Elemente der ebenen Geometrie zum höchsten Gipfel der Klarheit vorwärts gebracht worden sind, sondern auch die Stereometrie von den ältesten Geometern entwickelt worden ist, dennoch ihre quasi ersten Fundamente immer noch zum Vermissten und Verlangten zu rechnen sind. Obwohl nämlich ich nun für meine Person diese Fundamente ans Licht gebracht zu haben glaube, bin ich dennoch gezwungen zu gestehen, dass die Dinge, welche für ansehnlich zu halten sind, noch nicht von geeigneten und tatsächlich geometrischen Beweisen begleitet werden, welche ich daher hauptsächlich hier vorzulegen angesehen habe, damit ich andere, denen dieses Studium am Herzen liegt und die darauf Sorgfalt verwenden, anrege, diese Beweise ausfündig zu machen; nachdem diese gefunden worden sind, besteht überhaupt kein Zweifel, dass die Stereometrie zum gleichen Grad an Vollkommenheit erhoben wird, wie die Geometrie.