Über die Integration der Differentialgleichung $\frac{mdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{ndy}{\sqrt{1-y^4}}$ *

Leonhard Euler

§1 Nachdem ich diese Gleichung zuerst bei der Gelegenheit der Funde des hochillustren Grafen Fagnano betrachtet hatte, habe ich freilich eine Relation zwischen den Variablen x und y gefunden, welche dieser Gleichung Genüge leistete; aber die Relation konnte nicht für die vollständige Integralgleichung gehalten werden, deshalb weil sie keine beliebige konstante Größe enthielt, von welcher Art immer eine durch die Integration eingeführt zu werden pflegt. Denn daher, wie es hinreichend bekannt ist, pflegen die Integrale in vollständige und partikuläre unterschieden zu werden, von welchen jene den ganzen Umfang der Differentialgleichungen ausschöpfen, diese hingegen nur so Genüge leisten, dass darüber hinaus andere Ausdrücke gleichermaßen Genüge leisten können. Das Kriterium einer vollständigen Integralgleichung aber besteht darin, dass sie eine konstante Größe involvieren muss, welche in der Differentialgleichung nicht auftritt.

§2 Damit dies besser verstanden wird, wird es ausreichen, die einfachste Differentialgleichung $dx = dy$ betrachtet zu haben, welcher natürlich diese

*Originaltitel: "De Integratione Aequationis Differentialis $\frac{mdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{ndy}{\sqrt{1-y^4}}$", erstmals publiziert in „*Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 6* 1761, pp. 37-57", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 20, pp. 58 - 79 ", Eneström-Nummer E251, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Artur Diener, (Korrektur: Janos Tien, Euler-Seminar, WS 2013/14) im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

Integralgleichung $x = y$ genügt; dennoch erstreckt sich diese Integralgleichung weniger weit als die Differentialgleichung $dx = dy$, weil dieser diese sich um vieles weiter erstreckende Integralgleichung $x = y \mp a$ gleichermaßen Genüge leistet, indem für a irgendeine konstante Größe genommen wird, und erst diese Integralgleichung wird angesehen den ganzen Umfang der Differentialgleichung $dx = dy$ zu erfassen, woher die Gleichung auch die vollständige Integralgleichung genannt wird, deshalb weil in ihr die konstante Größe a enthalten ist, welche in der Differentialgleichung nicht auftaucht. Wenn daher nun aber anstelle dieser unbestimmten Konstante a bestimmte Werte eingesetzt werden, werden aus dem vollständigen Integral partikuläre Integrale erhalten, welche sich dieses Grundes wegen weniger weit erstrecken als die vorgelegte Differentialgleichung.

§3 Oftmals kann aber ein algebraisches partikuläres Integral einer Differentialgleichung dargeboten werden, obgleich das vollständige Integral transzendent ist; dies passiert natürlich, wenn der transzendente Anteil mit jener beliebigen Konstante multipliziert worden ist, welcher deshalb, nachdem jene Konstante gleich Null gesetzt worden ist, aus der Rechnung verschwindet und ein algebraisches partikuläres Integral zurücklässt. So ist es offenbar, dass dieser Differentialgleichung $dy = dx + (y - x)dx$ der Wert $y = x$ Genüge leistet, in welchem dennoch nur ein partikuläres Integrale enthalten ist, weil das vollständige Integral $y = x + ae^x$ ist, während e die Zahl bezeichnet, deren Logarithmus $= 1$ ist. Wenn also jene beliebige Konstante a nicht verschwindend festgelegt wird, wird das Integral immer transzendent sein.

§4 Weil es also passieren kann, dass die Differentialgleichung ein algebraisches partikuläres Integral zulässt, auch wenn das vollständige Integral transzendent ist, so mangelt es dennoch nicht an Gründen zu glauben, dass das vollständige Integral der vorgelegten Differentialgleichung

$$\frac{mdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{ndy}{\sqrt{1-y^4}}$$

transzendente Größen erhält, auch wenn es möglich gewesen war, für sie ein algebraisches partikuläres Integral darzubieten. Weil nämlich das vollständige Integral dieses ist

$$m\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = n\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} + C,$$

aber diese Integrale auf keine Weise, weder durch Zuhilfenahme der Quadratur des Kreises noch der der Hyperbel, angegeben werden können, scheint es keineswegs wahrscheinlich, dass diese dermaßen transzendenten Formeln im Allgemeinen, so dass die Konstante C unbestimmt bleibt, auf eine algebraische Relation zwischen x und y zurückgeführt werden können.

§5 Es ist freilich bekannt, dass das vollständige Integral dieser Differentialgleichung

$$\frac{mdx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{ndy}{\sqrt{1-yy}}$$

immer algebraisch dargeboten werden kann, solange das Verhältnis der Koeffizienten m und n rational war; aber weil das Integral jeder der beiden Formeln einen Kreisbogen anzeigt, so dass das vollständige Integral $m \arcsin x = n \arcsin y + C$ ist, aber die Relation der Sinus, die sich auf Bogen, die in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen, beziehen, algebraisch ausgedrückt werden kann, ist es nicht verwunderlich, dass die vollständige Integralgleichung in diesen Fällen auch algebraisch ausgedrückt werden kann. Weil aber ein Vergleich von dieser Art bei den transzendenten Formeln $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ und $\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$ keine Geltung hat oder zumindest nicht bekannt ist, wird die Reduktion des Integrals auf algebraische Größen daher nicht entnommen werden können.

§6 Nichtsdestoweniger habe ich beobachtet, wenn eine Differentialgleichung von dieser Art vorgelegt war

$$\frac{mdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{ndy}{\sqrt{1-y^4}},$$

dass auch das vollständige Integral, welches natürlich eine beliebige konstante Größe involviert, immer algebraisch ausgedrückt werden kann, solange das Verhältnis $m : n$ rational war; ich halte es dabei für umso bemerkenswerter, dass ich mit keiner bestimmten Methode zu diesem Integral geführt worden bin, sondern es eher durch Raten und Probieren gefunden habe. Daher besteht kein Zweifel, dass eine direkte zu diesem selben Integral führende Methode die Grenzen der Analysis nicht unwesentlich erweitern wird; deshalb scheint deren Untersuchung den Analytikern mit ganzen Eifer mitzuteilen zu sein.

§7 Es ist mir aber möglich gewesen das vollständige Integral dieser Differentialgleichung, wie auch immer das rationale Verhältnis der Koeffizienten m und n beschaffen war, aus der vollständigen Integration dieser Gleichung zu derivieren

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}};$$

nachdem diese nämlich erledigt worden ist, werde ich eine bestimmte Methode aufzeigen, aus ihr auch das vollständige Integral dieser sich um vieles weiter erstreckenden Gleichung

$$\frac{mdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{ndy}{\sqrt{1-y^4}}$$

zu folgern. Diese Methode kann auch im Allgemeinen, um die Integrale der Gleichungen $mXdx = nYdy$ zu finden, verwendet werden, wenn nur das vollständige Integral von dieser $Xdx = Ydy$ gefunden worden ist und Y eine solche Funktion von y bedeutet, wie X eine von x ist.

§8 Ich möchte also von dieser Gleichung aus beginnen

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}},$$

von welcher auf den ersten Blick klar ist, dass ihr die Gleichung $x = y$ Genüge leistet, welche deshalb ein partikuläres Integral von ihr ist. Dann genügt derselben Gleichung auch dieser algebraische Wert

$$x = -\sqrt{\frac{1-yy}{1+yy}};$$

weil nämlich ist

$$dx = +\frac{2ydy}{(1+yy)\sqrt{(1-yy)(1+yy)}} \quad \text{und} \quad \sqrt{1-x^4} = \frac{2y}{1+yy},$$

wird sein

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}.$$

Daher ist auch dieser Wert oder die Gleichung $xxyy + xx + yy - 1 = 0$ ein partikuläres Integral der vorgelegten Differentialgleichung. Daher ist es notwendig, dass das vollständige Integral, welches eine beliebige Konstante involviert, so beschaffen ist, dass, indem dieser Konstante ein bestimmter Wert zugeteilt wird, hervorgeht

$$x = y,$$

wenn aber derselben Konstante ein bestimmter anderer Wert zugeteilt, dass hervorgeht

$$x = -\sqrt{\frac{1-yy}{1+yy}} \quad \text{oder} \quad xxyy + xx + yy - 1 = 0.$$

Lehrsatz

§9 Ich sage also, dass die vollständige Integralgleichung dieser Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$$

diese ist

$$xx + yy + ccxxyy = cc + 2xy\sqrt{1-c^4}.$$

Beweis

Nachdem nämlich diese Gleichung festgelegt worden ist, wird ihr Differential sein

$$xdx + ydy + ccxy(xdy + ydx) = (xdy + ydx)\sqrt{1-c^4},$$

woher wird

$$dx(x + ccxyy - y\sqrt{1-c^4}) + dy(y + ccxxy - x\sqrt{1-c^4}) = 0.$$

Aus derselben Gleichung wird aber nach ihrer Auflösung erschlossen

$$y = \frac{x\sqrt{1-c^4} + c\sqrt{1-x^4}}{1+ccxx} \quad \text{und} \quad x = \frac{y\sqrt{1-c^4} - c\sqrt{1-y^4}}{1+ccyy}.$$

Wenn nämlich dort der Wurzel $\sqrt{1-x^4}$ das Vorzeichen $+$ zugeteilt wird, muss hier hingegen der Wurzel $\sqrt{1-y^4}$ das Vorzeichen $-$ zugeteilt werden, dass nach Setzen von $x=0$ auf beiden Seiten derselbe Wert $y=c$ hervorgeht. Es wird also sein

$$\begin{aligned} x+ccxyy-y\sqrt{1-c^4} &= -c\sqrt{1-y^4}, \\ y+ccxxy-x\sqrt{1-c^4} &= \quad c\sqrt{1-x^4}, \end{aligned}$$

nach Einsetzen welcher Werte in der Differentialgleichung hervorgeht

$$-cdx\sqrt{1-y^4}+cdy\sqrt{1-x^4}=0$$

oder

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}.$$

Das Integral dieser Differentialgleichung ist also

$$xx+yy+ccxxyy=cc+2xy\sqrt{1-c^4},$$

und weil es die von unserem Belieben abhängende Konstante c enthält, wird sie zugleich das vollständige Integral sein. Q. E. D.

§10 Wenn man also diese Gleichung $\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$ hat, ist der vollständige Integralwert von x

$$x=\frac{y\sqrt{1-c^4}\pm c\sqrt{1-y^4}}{1+ccyy},$$

woher, wenn die beliebige Konstante c verschwindet, wird $x=y$; wenn aber $c=1$ gesetzt wird, haben wir $x=\pm\frac{\sqrt{1-y^4}}{1+yy}=\sqrt{\frac{1-yy}{1+yy}}$, welche jene beiden schon oben dargebotenen partikulären Werte sind. Daher werden andere in Bezug auf die übrigen einfachere partikuläre Werte gefunden, die aber zu imaginären Größen geführt werden. So wird nach Setzen von $c=\infty$

$$x=\frac{\sqrt{-1}}{y}$$

und Setzen von $cc = -1$ wird

$$x = \sqrt{\frac{yy+1}{yy-1}},$$

welche beiden der vorgelegten Gleichung ebenso Genüge leisten.

§11 Um aber die Beschaffenheit dieses Integrals besser zu verstehen, werde die Kurve AM (Fig. 1) aufgefasst, deren Gestalt diese ist, dass, nachdem die Abszisse $AP = u$ gesetzt worden ist, der Bogen,

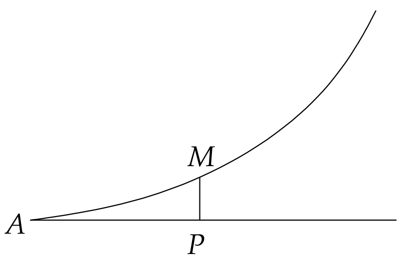

FIG. 1

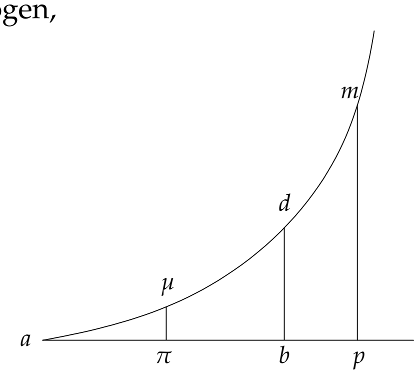

FIG. 2

der ihr entspricht, $AM = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$ ist. Des Weiteren werde, nachdem dieselbe Kurve (Fig. 2) beschrieben worden ist, die Abszisse $ap = x$ genommen; der Bogen wird $am = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ sein. Also wird nach Nehmen von

$$x = \frac{u\sqrt{1-c^4} \pm c\sqrt{1-u^4}}{1+ccuu}$$

$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$ und daher arc. $am =$ arc. $AM+$Konst. werden. Aber für die Bestimmung dieser Konstante wird nach Setzen von $u = 0$, in welchem Fall der Bogen AM verschwindet, $x = c$. Daher, wenn die Abszisse $ab = c$ genommen wird, welcher der Bogen ad entspricht, wird der Bogen $dm =$ dem Bogen AM sein.

§12 Mit Hilfe der vollständigen Integration der Gleichung $\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$ wird also in der vorgelegten Kurve ein irgendeinem Bogen AM, der der Abszisse $AP = u$ entspricht, gleicher Bogen dm, der vom gegebenen Punkt d beginnt, abgetrennt werden können. Wenn nämlich, nachdem die dem gegebenen Punkt d entsprechende Abszisse $ab = c$ gesetzt worden ist, diese Abszisse genommen wird

$$ap = x = \frac{c\sqrt{1-u^4} + u\sqrt{1-c^4}}{1+ccuu},$$

wird der Bogen dm dem Bogen AM gleich sein. Weil es aber auf die gleiche Weise möglich ist, $\sqrt{1-c^4}$ negativ festzulegen, wenn diese Abszisse genommen wird

$$a\pi = \frac{c\sqrt{1-u^4} - u\sqrt{1-c^4}}{1+ccuu},$$

wird ebenso der Bogen $d\mu$ dem Bogen AM gleich sein und so können auf dieser Kurve von einem gegeben Punkt d nach beiden Seiten hin die Bogen dm und $d\mu$ abgetrennt werden, welche dem Bogen AM gleich sind.

§13 Daher tritt es also klar zutage, wenn der Bogen ad dem Bogen AM gleich oder $c = u$ genommen wird, dass der Bogen am das Doppelte des Bogens AM sein wird. Daher, wenn $ap = x = \frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}$ gesetzt wird, wird der Bogen $am = 2$ arc. AM hervorgehen. Wenn auf die gleiche Weise der Bogen $ad = 2AM$ oder $c = \frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}$ genommen wird und $x = \frac{c\sqrt{1-u^4}+u\sqrt{1-c^4}}{1+ccuu}$ gesetzt wird, wird der Bogen $am = 3$ arc. AM erhalten werden. Und wenn dieser Wert von x erneut für c eingesetzt wird, dass $ad = 3AM$ ist, und wiederum $x = \frac{c\sqrt{1-u^4}+u\sqrt{1-c^4}}{1+ccuu}$ gesetzt wird, wird der Bogen am als der vierfache Bogen AM entsprießen; und so werden immer weiter irgendwelche Vielfachen des Bogen AM geometrisch angegeben werden Können.

§14 Es sei der Bogen $ad = n \cdot AM$ und $ab = z$, so dass ist

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = n\int \frac{du}{\sqrt{1-u^4}};$$

und aus diesen tritt es klar zu tage, wenn genommen wird

$$x = \frac{z\sqrt{1-u^4} + u\sqrt{1-z^4}}{1+uuzz},$$

dass sein wird

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = (n+1)\int \frac{du}{\sqrt{1-u^4}},$$

wenn aber festgelegt wird

$$x = \frac{z\sqrt{1-u^4} - u\sqrt{1-z^4}}{1+uuzz},$$

dass dann sein wird

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = (n-1)\int \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}.$$

Wenn also diese Gleichung $\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{ndu}{\sqrt{1-u^4}}$ integriert worden ist und daraus dann der entsprechende Wert für z gefunden worden ist, wird auch diese Gleichung $\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{(n+1)du}{\sqrt{1-u^4}}$ integriert werden können, deren Integral natürlich $x = \frac{z\sqrt{1-u^4} \pm uu\sqrt{1-z^4}}{1+uuzz}$ sein wird. Aber wenn für z sein vollständiger Wert eingesetzt worden ist, der natürlich eine beliebige Konstante involviert, wird auch für x sein vollständiger Wert hervorgehen.

§15 Daher ist es also klar, auf welche Weise die vollständige Integralgleichung gefunden werden muss, die dieser Differentialgleichung $\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{ndu}{\sqrt{1-u^4}}$ zukommt, sooft n eine ganze Zahl war. Auf die gleiche Weise wird aber ein y angegeben werden können, dass $\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = \frac{mdu}{\sqrt{1-u^4}}$ ist; daher, wenn durch Eliminieren von u eine Gleichung zwischen x und y gesucht wird, wird sie die Integralgleichung dieser Gleichung $\frac{mdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{ndy}{\sqrt{1-y^4}}$ sein, welche rationalen Zahlen auch immer für m und n eingesetzt werden; und damit dieses Integral auch als ein vollständiges hervorgeht, reicht es aus, nur für die eine der Variablen x und y den vollständigen Wert durch u bestimmt zu haben, weil daher schon eine neue beliebige Konstante in die Rechnung eingeführt wird.

§16 Aber die Methode, die wir hier beim Beweis des Lehrsatzes gebraucht haben, auch wenn sie nicht aus der Natur der Sache entnommen worden ist, sondern indirekt zu dem, was vorgelegt worden war, geführt hat, erstreckt sich dennoch um vieles weiter; denn auf die gleiche Weise wird erschlossen, dass das vollständige Integral dieser Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{1+mxx+nx^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1+myy+ny^4}}$$

dieses ist

$$0 = cc - xx - yy + nccxxyy + 2xy\sqrt{1 + mcc + nc^4}.$$

Daher, indem dieselbe Schlussweise wie zuvor verwendet wird, wird auch das vollständige Integral dieser Gleichung erhalten werden

$$\frac{\mu dx}{\sqrt{1 + mxx + nx^4}} = \frac{\nu dy}{\sqrt{1 + myy + ny^4}},$$

wenn freilich mit den Buchstaben μ und ν ganze Zahlen bezeichnet werden.

§17 Aber die Untersuchung dieser Integration verhält sich so: Es werde zunächst nach Belieben eine in dieser Gleichung enthaltende Relation zwischen den Variablen x und y angesetzt

$$(1) \quad \alpha xx + \alpha yy = 2\beta xy + \gamma xxyy + \delta,$$

welche differenziert gibt

$$\alpha xdx + \alpha ydy = \beta xdy + \beta ydx + \gamma xyydx + \gamma xxydy,$$

woher dann errechnet wird

$$(2) \quad dx(\alpha x - \beta y - \gamma xyy) + dy(\alpha y - \beta x - \gamma xxy) = 0.$$

Darauf werden aus der Gleichung (1) die Werte jeder der beiden Variablen gesucht

$$x = \frac{\beta y + \sqrt{\alpha\delta + (\beta\beta - \alpha\alpha - \gamma\delta)yy + \alpha\gamma y^4}}{\alpha - \gamma yy},$$

$$y = \frac{\beta x - \sqrt{\alpha\delta + (\beta\beta - \alpha\alpha - \gamma\delta)xx + \alpha\gamma x^4}}{\alpha - \gamma xx}.$$

Und daher werden wir erhalten

$$(3) \quad \alpha x - \beta y - \gamma xyy = \sqrt{\alpha\delta + (\beta\beta - \alpha\alpha - \gamma\delta)yy + \alpha\gamma y^4},$$

$$(4) \quad \alpha y - \beta x - \gamma xxy = -\sqrt{\alpha\delta + (\beta\beta - \alpha\alpha - \gamma\delta)xx + \alpha\gamma x^4},$$

welche Werte in Gleichung (2) eingesetzt liefern werden

$$(5) \qquad \frac{dx}{\sqrt{\alpha\delta + (\beta\beta - \alpha\alpha - \gamma\delta)xx + \alpha\gamma x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{\alpha\delta + (\beta\beta - \alpha\alpha - \gamma\delta)yy + \alpha\gamma y^4}},$$

deren Integral also Gleichung (1) ist.

§18 Um aber diese Formeln zu vereinfachen, wollen wir festlegen

$$\alpha\delta = A, \quad \beta\beta - \alpha\alpha - \gamma\delta = C, \quad \alpha\gamma = E$$

und es wird sein

$$\delta = \frac{A}{\alpha}, \quad \gamma = \frac{E}{\alpha} \quad \text{und} \quad \beta = \sqrt{C + \alpha\alpha + \frac{AE}{\alpha\alpha}}.$$

Daher ist die Integralgleichung dieser Differentialgleichung

$$(6) \qquad \frac{dx}{\sqrt{A + Cxx + Ex^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A + Cyy + Ey^4}}$$

diese

$$(7) \qquad \alpha(xx + yy) = \frac{A}{\alpha} + \frac{E}{\alpha}xxyy + 2xy\sqrt{C + \alpha\alpha + \frac{AE}{\alpha\alpha}},$$

welche zugleich das vollständige Integral ist.

§19 Oder wir wollen festlegen

$$A = f\alpha\alpha, \quad C = g\alpha\alpha \quad \text{und} \quad E = h\alpha\alpha,$$

dass wir diese Differentialgleichung haben

$$\frac{dx}{\sqrt{f + gxx + hx^4}} = \frac{dy}{\sqrt{f + gyy + hy^4}},$$

deren vollständige Integralgleichung deshalb sein wird

$$xx + yy = f + hxxyy + 2xy\sqrt{1 + g + fh};$$

auch wenn diese keine neue Konstante zu involvieren scheint, ist sie dennoch vollständig, weil in der Differentialgleichung nur das Verhältnis der Größen f, g und h betrachtet wird, so dass sich hier für f, g und h fcc, gcc und hcc

schreiben lässt, woher die vollständige Integralgleichung offenbar hervorgeht als

$$xx + yy = fcc + hccxxyy + 2xy\sqrt{1 + gcc + fhc^4}$$

oder

$$f(xx + yy) = fee + heexxyy + 2xy\sqrt{f(f + gee + he^4)},$$

nachdem $cc = \frac{ee}{f}$ gesetzt ist.

§20 Wenn daher also diese Differentialgleichung vorgelegt ist

$$\frac{dx}{\sqrt{f + gxx + hx^4}} = \frac{dy}{\sqrt{f + gyy + hy^4}},$$

wird der Wert von y mit einer algebraischen Funktion von x ausgedrückt werden können, so dass ist

$$y = \frac{x\sqrt{1 + gcc + fhc^4} \pm c\sqrt{1 + gxx + fhx^4}}{1 - hccxx}$$

oder

$$y = \frac{x\sqrt{f(1 + gee + he^4)} \pm e\sqrt{f(1 + gxx + hx^4)}}{f - heexx}.$$

Wenn daher also $g = 0$ wird, dass man diese Differentialgleichung hat

$$\frac{dx}{\sqrt{f + hx^4}} = \frac{dy}{\sqrt{f + hy^4}},$$

wird der vollständige Integralwert von y dieser sein

$$y = \frac{x\sqrt{f(f + he^4)} \pm e\sqrt{f(f + hx^4)}}{f - heexx},$$

woher, indem die Konstante e nach Belieben bestimmt wird, unzählige partikuläre Werte für y abgeleitet werden können.

§21 Aber mit Hilfe der Methode, die ich oben gebraucht habe, wird auch das vollständige Integral dieser Gleichung

$$\frac{mdx}{\sqrt{f+gxx+hx^4}} = \frac{ndy}{\sqrt{f+gyy+hy^4}},$$

wenn nur m und n rationale Zahlen sind, und das freilich algebraisch dargeboten werden können.

§22 So sind die Variablen x und y in der oben angenommenen Gleichung als miteinander vertauschbar festgelegt worden, dass die beiden Formeln einander gleich wurden, so dass wir nach Weglassen dieser Einschränkung zu einem Vergleich ungleicher Differentialformeln gelangen werden. Wir wollen also festlegen

$$(1) \quad \alpha xx + \beta yy = 2\gamma xy + \delta xxyy + \varepsilon,$$

woher wird

$$x = \frac{\gamma y + \sqrt{\alpha\varepsilon + (\gamma\gamma - \delta\varepsilon - \alpha\varepsilon)yy + \beta\delta y^4}}{\alpha - \delta yy}$$

und

$$y = \frac{\gamma x - \sqrt{\beta\varepsilon + (\gamma\gamma - \delta\varepsilon - \alpha\varepsilon)xx + \alpha\delta x^4}}{\beta - \delta xx}$$

und daher

$$(2) \quad \alpha x - \gamma y - \delta xyy = \sqrt{\alpha\varepsilon + (\gamma\gamma - \delta\varepsilon - \alpha\beta)yy + \beta\delta y^4},$$

$$(3) \quad \beta y - \gamma x - \delta xxy = -\sqrt{\beta\varepsilon + (\gamma\gamma - \delta\varepsilon - \alpha\beta)xx + \beta\delta x^4};$$

aber Gleichung (1) gibt differenziert

$$dx(\alpha x - \gamma y - \delta xyy) + dy(\beta y - \gamma x - \delta xxy) = 0,$$

deren Integral deshalb die angenommene Gleichung ist.

§23 Aber diese Ungleichheit wird leicht beseitigt, indem $z\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ anstelle von y gesetzt wird, die Begründung welcher Sache sofort aus der angenommenen Gleichung hätte klar sein können. Aber es steht ein anderer Weg offen, zu ungleichen Formeln zu gelangen, wovon es genügt, hier ein Beispiel gegeben zu haben. Es werde angenommen

$$x^4 + 2axxyy + 2bxx = c,$$

deren Differential dieses ist

$$dx(x^3 + axyy + bx) + axxydy = 0$$

oder

$$\frac{dx}{xy} = \frac{-ady}{xx + ayy + b}.$$

Nun werde aus der angenommenen Gleichung zuerst x durch xy bestimmt und so wird werden

$$xy = \sqrt{\frac{c - 2bxx - x^4}{2a}},$$

dann aber $xx + ayy + b$ durch y; aber wegen $(xx + ayy + b)^2 = c + (ayy + b)^2$ wird sein

$$xx + ayy + b = \sqrt{c + (ayy + b)^2}.$$

Deshalb wird man diese Differentialgleichung haben

$$\frac{dx\sqrt{2a}}{\sqrt{c - 2bxx - x^4}} = \frac{-ady}{\sqrt{c + bb + 2abyy + aay^4}},$$

deren Integral die angenommene Gleichung oder $y = \frac{\sqrt{c-2bxx-x^4}}{x\sqrt{2a}}$ ist.

§24 Auch wenn dieses Integral nicht vollständig ist, wird es dennoch mit den oberen Bemerkungen leicht zu einem vollständigen gemacht werden. Es werde nämlich festgelegt

$$\frac{ady}{\sqrt{c + bb + 2abyy + aay^4}} = \frac{adz}{\sqrt{c + bb + 2abzz + aaz^4}};$$

wegen $f = c + bb$, $g = 2ab$, $h = aa$ wird sein

$$y = \frac{z\sqrt{(c+bb)(c+bb+2abee+aae^4)} \pm e\sqrt{(c+bb)(c+bb+2abzz+aaz^4)}}{c+bb-aaeezz};$$

dieser Wert werde also $\frac{\sqrt{c-2bxx-x^4}}{x\sqrt{2a}}$ gleich gesetzt und die daraus zwischen x und z resultierende Gleichung wird das vollständige Integral dieser Differentialgleichung sein

$$\frac{dx\sqrt{2a}}{\sqrt{c-2bxx-x^4}} = \frac{-adz}{\sqrt{c+bb+2abzz+aaz^4}}.$$

Ja es tritt sogar aus den oben erwähnten Dingen klar zu tage, wenn diese zwei Seiten darüber hinaus mit irgendwelchen rationalen Zahlen multipliziert werden, wie dann das vollständige Integral gefunden werden muss.

§25 Aber, nachdem die Ungleichheit der beiden Seiten nun damit abgehandelt worden ist, wollen wir die Bildung der gleichen Seiten allgemeiner auffassen; es werde also festgelegt

$$(1) \quad 0 = \alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(xx+yy) + 2\delta xy + 2\varepsilon xy(x+y) + \zeta xxyy,$$

woher durch Differenzieren erhalten wird

$$dx(\beta+\gamma x+\delta y+2\varepsilon xy+\varepsilon yy+\zeta xyy)+dy(\beta+\gamma y+\delta x+2\varepsilon xy+\varepsilon xx+\zeta xxy) = 0$$

und daher

$$(2) \quad \frac{dy}{\beta+\gamma x+\delta y+2\varepsilon xy+\varepsilon yy+\zeta xyy} = \frac{-dx}{\beta+\gamma y+\delta x+2\varepsilon xy+\varepsilon xx+\zeta xxy}.$$

Aus der Auflösung der angenommenen Gleichung wird aber gefunden

$$y = -\frac{-\beta-\delta x-\varepsilon xx \pm \sqrt{\beta\beta-\delta\gamma+2(\beta\delta-\alpha\varepsilon-\beta\gamma)x+(\delta\delta-\gamma\gamma-\alpha\xi-2\beta\varepsilon)xx+2(\delta\varepsilon-\beta\xi-\gamma\varepsilon)x^3+(\varepsilon\varepsilon-\gamma\xi)x^4}}{\gamma+2\varepsilon x+\zeta xx}$$

Es werde der Kürze wegen festgelegt

$$\beta\beta - \alpha\gamma = A, \quad \beta\delta - \alpha\varepsilon - \beta\gamma = B, \qquad \delta\delta - \gamma\gamma - \alpha\zeta - 2\beta\varepsilon = C$$

$$\varepsilon\varepsilon - \gamma\zeta = E, \quad \delta\varepsilon - \beta\zeta - \gamma\varepsilon = D,$$

und es wird sein

$$\beta + \delta x + \varepsilon xx + \gamma y + 2\varepsilon xy + \zeta xxy = \pm\sqrt{A + 2Bx + Cxx + 2Dx^3 + Ex^4},$$
$$\beta + \delta y + \varepsilon yy + \gamma x + 2\varepsilon xy + \zeta xyy = \mp\sqrt{A + 2By + Cyy + 2Dy^3 + Ey^4}.$$

§26 Daher schließen wir deshalb, dass die Integralgleichung dieser Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{A + 2Bx + Cxx + 2Dx^3 + Ex^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A + 2By + Cyy + 2Dy^3 + Ey^4}}$$

und zwar die vollständige diese ist

$$0 = \alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(xx+yy) + 2\delta xy + 2\varepsilon xy(x+y) + \zeta xxyy,$$

natürlich unter Verwendung der oberen Bestimmung dieser Koeffizienten. Als erstes werde aber β oder ε aus dieser Gleichung bestimmt

$$\frac{BB(\varepsilon\varepsilon - E) - DD(\beta\beta - A)}{A\varepsilon\varepsilon - E\beta\beta} + \frac{2AD\varepsilon - 2BE\beta}{B\varepsilon - D\beta} = C;$$

dann wird aber sein

$$\gamma = \frac{A\varepsilon\varepsilon - E\beta\beta}{B\varepsilon - D\beta}, \quad \alpha = \frac{\beta\beta - A}{\gamma}, \quad \zeta = \frac{\varepsilon\varepsilon - E}{\gamma}$$

und

$$\delta = \frac{B\beta(\varepsilon\varepsilon - E) - D\varepsilon(\beta\beta - A)}{A\varepsilon\varepsilon - E\beta\beta} + \gamma \quad \text{oder} \quad \delta = \gamma + \frac{B + \alpha\varepsilon}{\beta}.$$

§27 Daher ist es also klar, dass auch die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{A+2Dx^3}} = \frac{dy}{\sqrt{A+2Dy^3}}$$

integriert werden kann; denn wegen $B = 0$, $C = 0$ und $E = 0$ wird sein

$$\frac{-DD(\beta\beta - A)}{A\varepsilon\varepsilon} - \frac{2A\varepsilon}{\beta} = 0 \quad \text{oder} \quad \varepsilon = \sqrt[3]{\frac{DD}{2AA}\beta(A-\beta\beta)},$$

aber daher gehen allzu komplizierte Werte hervor. Die Aufgabe wird aber leichter bewältigt werden, indem die Werte der verschwindenden Buchstaben B, C und E aufgelöst werden; denn

$$E = 0 \quad \text{gibt} \quad \zeta = \frac{\varepsilon\varepsilon}{\gamma}; \quad \text{dann gibt} \quad B = 0 \quad \text{dies} \quad \delta = \gamma + \frac{\alpha\varepsilon}{\beta}$$

und

$$C = 0 \quad \text{gibt} \quad \delta\delta - \gamma\gamma = \alpha\zeta + 2\beta\varepsilon = \frac{\alpha\varepsilon\varepsilon}{\gamma} + 2\beta\varepsilon = \frac{\alpha^2\varepsilon\varepsilon}{\beta\beta} + \frac{2\alpha\gamma\varepsilon}{\beta},$$

deren Faktoren $\beta\beta = \alpha\gamma$ und $\alpha\varepsilon\varepsilon + 2\beta\gamma\varepsilon = 0$ sind. Aber wenn $\beta\beta = \alpha\gamma$ wäre, wäre $A = 0$; wenn aber $\varepsilon = 0$ wäre, wäre sowohl $\zeta = 0$ als auch $D = 0$, also wider dem Ziel. Es muss also $\alpha\varepsilon = -2\beta\gamma$ werden; daher wird werden

$$\alpha = -\frac{2\beta\gamma}{\varepsilon}, \quad \delta = -\gamma \quad \text{und} \quad \zeta = \frac{\varepsilon\varepsilon}{\gamma}.$$

Schließlich muss werden

$$\beta\beta + \frac{2\beta\gamma\gamma}{\varepsilon} = A \quad \text{und} \quad -2\gamma\varepsilon - \frac{\beta\varepsilon\varepsilon}{\gamma} = D.$$

Daher wird $\varepsilon = \frac{2\beta\gamma\gamma}{A-\beta\beta}$ und wegen $\frac{\gamma D}{\varepsilon} = -(2\gamma\gamma + \beta\varepsilon)$ und $2\gamma\gamma + \beta\varepsilon = \frac{A\varepsilon}{\beta}$ $\frac{\gamma D}{\varepsilon} = -\frac{A\varepsilon}{\beta}$ und daher $\varepsilon\varepsilon = -\frac{\beta\gamma D}{A}$ sein. Also ist

$$\frac{4\beta\gamma^3}{(A-\beta\beta)^2} + \frac{D}{A} = 0.$$

§28 Weil aber nur das Verhältnis der Buchstaben A und O in die Rechnung eingeht, dient die letzte Gleichung für das Finden des absoluten Wertes von A, welchen wir aber wissen nicht nötig zu sein. Also werden die Buchstaben γ und β unbestimmt bleiben. Es werde also festgelegt

$$\gamma = -Ac \quad \text{und} \quad \beta = Dc;$$

es wird $\varepsilon\varepsilon = DDcc$ sein oder

$$\varepsilon = Dc \quad \text{und daher} \quad \delta = Ac, \quad \zeta = -\frac{DDc}{A} \quad \text{und} \quad \alpha = 2Ac.$$

Daher ist das Integral dieser Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{A+2Dx^3}} = \frac{dy}{\sqrt{A+2Dy^3}}$$

dieses

$$0 = 2A + 2D(x+y) - A(xx+yy) + 2Axy + 2Dxy(x+y) - \frac{DD}{A}xxyy.$$

Dieses Integral ist aber nicht das vollständige, wird aber zu einem solchen gemacht werden, indem $\gamma - A$ und $\beta = Dcc$ gesetzt wird, woher $\varepsilon\varepsilon = DDcc$ und $\varepsilon = Dc$ wird; weiter wird $\delta = A$, $\zeta = -\frac{DDcc}{A}$, $\alpha = 2Ac$ sein, so dass das vollständige Integral ist

$$0 = 2Ac + 2Dcc(x+y) - A(xx+yy) + 2Axy + 2Dcxy(x+y) - \frac{DDcc}{A}xxyy,$$

wo c eine vom Belieben abhängende Konstante ist; daher wird

$$y = \frac{Dcc + Ax + Dcxx \pm \sqrt{c\left(2A + \frac{DD}{A}c^3\right)(A+2Dx^3)}}{A - 2Dcx + \frac{DDcc}{A}xx}.$$

§29 Hier verdient der Fall angemerkt zu werden, in welchem $A = 1$ und $D = \frac{1}{2}$ ist, dass man diese Differentialgleichung hat

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{dy}{\sqrt{1+y^3}},$$

wo, um die Brüche zu beseitigen, $2c$ anstelle von c geschrieben werde, und das vollständige Integral wird dieses sein

$$0 = 4c + 4cc(x+y) - xx - yy + 2xy + 2cxy + 2cxy(x+y) - ccxxyy$$

oder

$$y = \frac{2cc + x + cxx \pm \cdot \sqrt{c(1+c^3)(1+x^3)}}{1 - 2cx + ccxx}.$$

So werden also partikuläre Integrale u. A. diese sein

I. ist $c = 0, \quad y = x;$

II. ist $c = \infty, \quad y = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{1+x^3}}{xx};$

III. ist $c = -1, \quad y = \dfrac{2 + x - xx}{1 + 2x + xx} = \dfrac{2-x}{1+x}.$

§30 Aus demselben Prinzip, wenn in § 26 anstelle der Buchstaben A, B, C, D, E dieselben mit einer gewissen Größe p multipliziert werden, wird die Differentialgleichung nichtsdestoweniger diese sein

$$\frac{dx}{\sqrt{A + 2Bx + Cxx + 2Dx^3 + Ex^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A + 2By + Cyy + 2Dy^3 + Ey^4}}$$

und es wird gefunden werden

$$p = \frac{BB\varepsilon\varepsilon - DD\beta\beta}{BBE - ADD} + 2\frac{(AD\varepsilon - BE\beta)(A\varepsilon\varepsilon - E\beta\beta)}{(B\varepsilon - D\beta)(BBE - ADD)} - \frac{C(A\varepsilon\varepsilon - E\beta\beta)}{BBE - ADD};$$

dann wird sein

$$\gamma = \frac{A\varepsilon\varepsilon - E\beta\beta}{B\varepsilon - D\beta}, \quad \alpha = \frac{\beta\beta - Ap}{\gamma}, \quad \zeta = \frac{\varepsilon\varepsilon - Ep}{\gamma} \quad \text{und} \quad \delta = \gamma + \frac{\alpha\varepsilon + Bp}{\beta},$$

so dass die Buchstaben β und ε unbestimmt bleiben, und deshalb wird die vollständige Integralgleichung werden

$$0=\alpha+2\beta(x+y)+\gamma(xx+yy)+2\delta xy+2\varepsilon xy(x+y)+\zeta xxyy,$$

woher wird

$$y=\frac{-\beta-\delta x-\varepsilon xx\pm\sqrt{p(A+2Bx+Cxx+2Dx^3+Ex^4)}}{\gamma+2\varepsilon x+\zeta xx}.$$

§31 Es ist schließlich zu bemerken, dass nicht nur diese Differentialgleichung, deren vollständiges Integral ich gerade dargeboten habe, sondern auch diese sich um vieles weiter erstreckende

$$\frac{mdx}{\sqrt{A+2Bx+Cxx+2Dx^3+Ex^4}}=\frac{ndy}{\sqrt{A+2By+Cyy+2Dy^3+Ey^4}}$$

immer algebraisch und zwar vollständig integriert werden kann, solange das Verhältnis der Koeffizienten m und n rational war; diese Integration wird nämlich auf die gleiche Weise durchgeführt wie wir es oben gemacht haben, um die Gleichung, die mir hier hauptsächlich vorgelegt war, zu integrieren. Aber die Methode, von welcher ich hier Beispiele angeführt habe, scheint mir so beschaffen zu sein, dass sie, indem ihre Beschaffenheit sorgfältiger untersucht wird, vielerlei Anwendungen finden kann, woher sich nicht zu verachtende Vorteile für Analysis ergießen werden.

§32 Hier bemerke ich aber, dass, indem die in § 26 angenommene Formel weiter ausgedehnt wird, Differentiale solcher Art miteinander verglichen werden können, die ungleich sind, und daher das erwähnte Beispiel für eine Ungleichheit (§ 22) auf diese Weise erhalten werden kann, dass alles, was bisher angeben worden ist, in dieser allgemeinen Untersuchung enthalten ist. Es werde natürlich diese Integralgleichung angesetzt

$$(1)\quad \alpha xxyy+2\beta xxy+2\gamma xyy+\delta xx+\varepsilon yy+2\zeta xy+2\eta x+2\theta y+\varkappa=0,$$

aus welcher wird

$$(2)\quad y=\frac{-\beta xx-\zeta x-\theta+\sqrt{(\beta xx+\zeta x+\theta)^2-(\alpha xx+2\gamma x+\varepsilon)(\delta xx+2\eta x+\varkappa)}}{\alpha xx+2\gamma x+\varepsilon},$$

$$(3)\quad x=\frac{-\gamma yy-\zeta y-\eta-\sqrt{(\gamma yy+\zeta y+\eta)^2-(\alpha yy+2\beta y+\delta)(\varepsilon yy+2\theta y+\varkappa)}}{\alpha yy+2\beta y+\delta}.$$

Es werde nun der Kürze wegen festgelegt

$App=\beta\beta-\alpha p$	$\mathfrak{A}qq=\gamma\gamma-\alpha\varepsilon$
$2Bpp=2\beta\zeta-2\alpha\eta-2\gamma\delta$	$2\mathfrak{B}qq=2\gamma\zeta-2\alpha\theta-2\beta\varepsilon$
$Cpp=\zeta\zeta+2\beta\theta-\alpha\varkappa-\delta\varepsilon-4\gamma\eta$	$\mathfrak{C}qq=\zeta\zeta+2\gamma\eta-\alpha\varkappa-\delta\varepsilon-4\beta\theta$
$2Dpp=2\zeta\theta-2\gamma\varkappa-2\varepsilon\eta$	$2\mathfrak{D}qq=2\zeta\eta-2\beta\varkappa-2\delta\theta$
$Epp=\theta\theta-\varepsilon\varkappa$	$\mathfrak{E}qq=\eta\eta-\delta\varkappa$

und es wird sein

$$(4)\quad p\sqrt{Ax^4+2Bx^3+Cxx+2Dx+E}=\alpha xxy+2\gamma xy+\varepsilon y+\beta xx+\zeta x+\theta,$$

$$(5)\quad -q\sqrt{\mathfrak{A}y^4+2\mathfrak{B}y^3+\mathfrak{C}yy+2\mathfrak{D}y+\mathfrak{E}}=\alpha xyy+2\beta xy+\delta x+\gamma yy+\zeta y+\eta.$$

§33 Aber wenn die angenommene Integralgleichung differenziert wird, wird werden

$$(6)\quad \begin{aligned} &dx(\alpha xyy+2\beta xy+\gamma yy+\delta x+\zeta y+\eta)\\ &+dy(\alpha xxy+\beta xx+2\gamma xy+\varepsilon y+\zeta x+\theta)=0, \end{aligned}$$

woher, wenn die aufgefundenen Werte (4) und (5) dieser Produkte eingesetzt werden, diese Differentialgleichung entspringen wird

$$(7)\quad \frac{qdx}{\sqrt{Ax^4+2Bx^3+Cxx+2Dx+E}}=\frac{pdy}{\sqrt{\mathfrak{A}y^4+2\mathfrak{B}y^3+\mathfrak{C}yy+2\mathfrak{D}y+\mathfrak{E}}},$$

deren Integral deshalb die angenommene Gleichung (1) ist.

Weil man aber 10 Gleichungen hat, aber die Anzahl der Koeffizienten α, β, γ, δ etc. 9 ist, von welchen einer nach Belieben angenommen werden kann, werden acht zu bestimmende Buchstaben übrig bleiben. Weiter kommen aber darüber hinaus die zwei zu bestimmenden Buchstaben p und q hinzu, so dass nun zehn unbekannte Größen vorhanden sind, woher die Koeffizienten jeder der beiden Formeln A, B, C, D, E und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ angenommen werden können scheinen. Aber es ist klar, wenn die einen schon nach Belieben angenommen worden sind, dass die anderen ganz gar nicht von unserem Belieben abhängen; ansonsten könnte jede Formel auf eine algebraische zurückgeführt werden.

§34 Es können aber daher andere nicht unelegante Transformationen der gegebenen Formel erhalten werden, wenn anstelle von y andere Werte eingesetzt werden. Wie wenn beispielsweise $\mathfrak{E}$ oder $\eta\eta = \delta\varkappa$ gesetzt wird und $y = zz$ festgelegt wird, wird die folgende Differentialgleichung hervorgehen

$$\frac{qdx}{\sqrt{Ax^4 + 2Bx^3 + Cxx + 2Dx + E}} = \frac{2pdz}{\sqrt{\mathfrak{A}z^6 + 2\mathfrak{B}z^4 + \mathfrak{C}z^2 + 2\mathfrak{D}}}, \tag{8}$$

deren Integral deshalb die angenommene Gleichung ist, wenn $y = zz$ gesetzt und $\eta\eta = \delta\varkappa$ festgelegt wird und die übrigen Buchstaben in entsprechender Weise bestimmt werden. Auch das vollständige Integral wird ohne Schwierigkeit aufgefunden werden; denn auch wenn das gefundene Integral unter Umständen keine neue Konstante involviert, werde festgelegt

$$\frac{qdx}{\sqrt{Ax^4 + 2Bx^3 + Cxx + 2Dx + E}} = \frac{qdu}{\sqrt{Au^4 + 2Bu^3 + Cuu + 2Du + E}}$$

und das vollständige Integral dieser Gleichung wird sich mit den vorhergehenden Anmerkungen angeben lassen und daher wird auch das vollständige Integral einer aus ungleichen Formeln bestehenden Gleichung erschlossen werden.

§35 Wie aber das vollständige Integral dieser Differentialgleichung, um von der einfachsten aus zu beginnen,

$$\frac{dx}{\sqrt{f + gx}} = \frac{dy}{\sqrt{f + gy}}$$

dieses ist

$$gg(xx + yy) - 2ggxy - 2ccg(x + y) + c^4 - 4ccf = 0,$$

darauf aber das vollständige Integral dieser Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{f+gxx}} = \frac{dy}{\sqrt{f+gyy}}$$

dieses ist

$$xx + yy - 2xy\sqrt{1+fgcc} - ccff = 0,$$

drittens das vollständige Integral dieser Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{f+gx^3}} = \frac{dy}{\sqrt{f+gy^3}}$$

hingegen dieses ist

$$f(xx+yy) + \frac{ggcc}{4f}xxyy - gcxy(x+y) - 2fxy - gcc(x+y) - 2fc = 0,$$

viertens weiter das vollständige Integral dieser Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{f+gx^4}} = \frac{dy}{\sqrt{f+gy^4}}$$

als dieses aufgefunden worden ist

$$f(xx+yy) - fcc - gccxxyy - 2xy\sqrt{f(f+gc^4)} = 0,$$

so wird auch das vollständige Integral dieser Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{f+gx^6}} = \frac{dy}{\sqrt{f+gy^6}}$$

aufgefunden werden können.

§36 Es werden zuerst in § 33 Werte bestimmt, so dass diese Gleichung hervorgeht

$$\frac{dx}{\sqrt{fx+gx^4}} = \frac{dy}{\sqrt{fy+gy^4}},$$

deren vollständiges Integral aufgefunden wird als

$$gg(xx+yy)-4ggcxxyy-4fgccxy(x+y)-2ggxy-2fgc(x+y)+ffcc=0.$$

Es werde nun $x=tt$ und $y=uu$ gesetzt, dass diese Differentialgleichung hervorgeht

$$\frac{dt}{\sqrt{f+gt^6}}=\frac{du}{\sqrt{f+gu^6}},$$

deren vollständiges Integral deshalb sein wird

$$gg(t^4+u^4)-4ggct^4u^4-4fgccttuu(tt+uu)-2ggttuu-2fgc(tt+uu)+ffcc=0;$$

daher verdient der aus der Annahme $c=\infty$ resultierende Fall angemerkt zu werden, der gibt

$$4gttuu(tt+uu)=f.$$