Ein anderes Beispiel der neuen Methode transzendente Grössen miteinander zu vergleichen - Über den Vergleich von Ellipsenbogen *

Leonhard Euler

§1 Das erste Beispiel dieser Methode, welches ich neulich dargeboten habe, bestand im Vergleich von Kreisbogen und denen der konischen Parabel; auch wenn dieser Vergleich für sich betrachtet nicht neu ist, weil er schon vor langer Zeit mit gewöhnlichen Methoden erledigt worden ist, schien es dennoch ratsam, von da aus zu beginnen, damit das Vermögen dieser neuen Methode, welche ich skizziert habe, besser erkannt wird; dies führt freilich nicht nur zu denselben Wahrheiten, die mit den üblichen Methoden gefunden zu werden pflegen, sondern eröffnet auch einen weit leichteren und bequemeren Weg, dasselbe zu leisten. Denn die übliche Methode erfordert mühevolle Integrationen und ist so beschaffen, dass, wenn die Bogen dieser Kurven, welche miteinander zu vergleichen sind, nicht auf bekannte Quadraturen des Kreises und der Hyperbel zurückgeführt werden gekonnt hätten, sie auf keine Weise zur Hilfe genommen werden gekonnt hätten.

§2 Wie viel also diese neue Methode leisten kann, wird deutlicher aus dem Vergleich von Ellipsen- und Hyperbelbogen erkannt werden; weil die

*Originaltitel: "Specimen alterum methodi novae quantitates transcendentes inter se comparandi; de comparatione arcuum ellipsis", erstmals publiziert in „*Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 7 1761, pp. 3-48", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 20, pp. 153 - 200 ", Eneström-Nummer E261, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Artur Diener, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

Rektifikation dieser Kurven auf keine Weise weder auf die Quadratur des Kreis noch auf Logarithmen reduziert werden kann, kommt den gewöhnlichen Methoden nicht weiter ein Stellenwert zu und auch tritt durch sie nicht die Art zu tage, die verschiedenen Bogen dieser Kurven miteinander zu vergleichen. Deshalb, weil ich zeigen werde, dass mit Hilfe dieser neuen Methode der Vergleich von Ellipsen- und Hyperbelbogen mit dem gleichen Erfolg durchgeführt werden kann wie der der Parabelbogen, weil ja die gewöhnlichen Methoden dafür vollkommen ungeeignet sind, wird sich der riesige Nutzen dieser Methode daraus erhellen.

§3 Ich habe aber herausgefunden, dass mit dieser Methode so Ellipsen- wie Hyperbelbogen auf die gleiche Weise miteinander verglichen werden können wie Parabelbogen und es kein Hindernis ist, dass die Rektifikation dieser Kurven die Kräfte der Analysis vollkommen zu übersteigen scheint. Ja dieser Vergleich kann sogar unter denselben Bedingungen wie bei der Parabel durchgeführt werden, so dass, nachdem entweder auf der Ellipse oder der Hyperbel irgendein Bogen vorgelegt worden ist, von jedem anderen Punkt derselben Kurve ein Bogen abgetrennt werden kann, der von jenem um eine geometrisch angebbare Größe abweicht. Aber auf die gleiche Weise wird von jedem Punkt aus ein Bogen dargeboten werden können, der sich vom vorgelegten Bogen entweder zweimal oder dreimal oder beliebig oft genommen um eine geometrische Größe unterscheidet.

§4 Weiter kann es aber bewirkt werden, dass diese Differenz gänzlich ins Nichts übergeht und der gefundene Bogen dem vorgelegten Bogen selbst oder sogar einem Vielfachen desselben gleich wird, genauso wie es bei der Parabel geschehen zu können bekannt ist. Gleichermaßen passiert es, dass keine zwei gleichen Bogen dargeboten werden können, die nicht einander gleich sind; aber es wird diese noch um vieles bemerkenswerter sein, dass so bei Ellipse wie bei der Hyperbel nach Vorlegen irgendeines Bogens immer ein anderer Bogen angegeben werden kann, der dem Doppelten oder dem Dreifachen oder irgendeinem Vielfachen von jenem gleich ist.

§5 Wie also in Bezug auf den Vergleich der verschiedenen Bogen die Ellipse und die Hyperbel der Beschaffenheit der Parabel folgen, so wird die Lemniskate dem Kreis ähnlich entdeckt. Denn wenn bei dieser Kurve genauso wie beim Kreis irgendein Bogen vorgelegt war, ist es möglich, von jeglichem gegebenen

Punkt aus einen Bogen abzutrennen, der dem vorgelegten entweder gleich oder doppelt oder dreimal oder beliebig mal so groß war wie dieser. Denn bei dieser Kurve sind genauso wie bei beim Kreis keine Bogen solcher Art gegeben, deren Differenz geometrisch angegeben werden kann.

§6 Was ich aber hier anführen werde, erstreckt sich um vieles weiter als auf die erwähnten Kurven, sprich die Ellipse, die Hyperbel und die Lemniskate, die natürlich quasi nur die leichtesten Formeln der Fälle festlegen, welche diese Methode an die Hand gibt. Nachdem diese Formeln nämlich entwickelt worden sind, wird es möglich sein, einen ähnlichen Vergleich bei unendlich vielen anderen Geschlechtern von Kurven anzustellen. Wie aber das erste Beispiel auf die Entwicklung dieser Gleichung gestützt war

$$0 = \alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(xx+yy) + 2\delta xy,$$

so muss hier eine sich weiter erstreckende Gleichung als Fundament angenommen werden, aus welcher dennoch jede der beiden Variablen mit Hilfe der Extraktion der Quadratwurzel bestimmt werden kann. Es sei also diese kanonische Gleichung vorgelegt

Die kanonische Gleichung

$$0 = \alpha + \gamma(xx+yy) + 2\delta xy + \zeta xxyy$$

§7 Wenn wir daher aus dieser Gleichung so den Wert von x wie von y einzeln extrahieren, werden wir erhalten

$$y = \frac{-\delta x + \sqrt{\delta\delta xx - (\alpha+\gamma xx)(\gamma+\zeta xx)}}{\gamma+\zeta xx},$$

$$x = \frac{-\delta y + \sqrt{\delta\delta yy - (\alpha+\gamma yy)(\gamma+\zeta yy)}}{\gamma+\zeta yy},$$

wo wir den Wurzelzeichen verschiedene Vorzeichen zugeteilt haben, weil sie ja von unserem Belieben abhängen, solange ihnen im Folgenden Rechnung getragen wird.

§8 Wir wollen, um für Kürze zu sorgen, diese surdischen Formeln festlegen

$$\sqrt{\delta\delta xx - (\alpha + \gamma xx)(\gamma + \zeta xx)} = X$$

und

$$\sqrt{\delta\delta yy - (\alpha + \gamma yy)(\gamma + \zeta yy)} = Y,$$

dass wir haben

$$\begin{aligned} y &= \frac{-\delta x + X}{\gamma + \zeta xx} \quad \text{oder} \quad && X = \gamma y + \delta x + \zeta xxy, \\ x &= \frac{-\delta y + Y}{\gamma + \zeta yy} \quad \text{oder} \quad && -Y = \gamma x + \delta x + \zeta xyy. \end{aligned}$$

§9 Nun werde die kanonische Gleichung auch differenziert und es wird sein

$$0 = dx(\gamma x + \delta y + \zeta xyy) + dy(\gamma y + \delta x + \zeta xxy),$$

woher wir erschließen, dass sein wird

$$0 = -Ydx + Xdy \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{Y} - \frac{dx}{X} = 0.$$

Weil also X eine Funktion von x und Y eine von y ist, wird durch Integrieren sein

$$\int \frac{dy}{Y} - \int \frac{dx}{X} = \text{Konst.}$$

§10 Umgekehrt wissen wir also, wenn diese Integralgleichung vorgelegt war

$$\int \frac{dy}{Y} - \int \frac{dx}{X} = \text{Konst.},$$

in welcher X und Y irrationale Funktionen von x und y solcher Art bezeichnen, dass gilt

$$X = \sqrt{\delta\delta xx - (\alpha + \gamma xx)(\gamma + \zeta xx)}$$

und

$$Y = \sqrt{\delta\delta yy - (\alpha + \gamma yy)(\gamma + \zeta yy)},$$

dass dieser Gleichung dann die durch die kanonische Gleichung bestimmte Relation zwischen x und y Genüge leistet.

§11 Wie wir aber die Gleichung $\frac{dy}{Y} - \frac{dx}{X} = 0$ gefunden haben, so wollen wir nun diese sich weiter erstreckende Gleichung betrachten

$$\frac{Qdy}{Y} - \frac{Pdx}{X} = dV$$

und wollen untersuchen, Funktionen von x und y von welcher Art P und Q sein können, dass dV eine Integration zulässt und daher die Differenz der Integralformeln

$$\int \frac{Qdy}{Y} - \int \frac{Pdx}{X} = \text{Konst.} + V$$

algebraisch dargeboten werden kann.

§13 Damit diese Untersuchung leichter durchgeführt werden kann, wollen wir $xy = u$ setzen und wegen $xdy + ydx = du$ werden wir $dy = \frac{du}{x} - \frac{ydx}{x}$ haben, welcher Wert anstelle von dy in der Differentialgleichung eingesetzt geben wird

$$0 = dx(\gamma x + \delta y + \zeta xyy) + \frac{du}{x}(\gamma y + \delta x + \zeta xxy) - dx\left(\frac{\gamma yy}{x} + \delta y + \zeta xyy\right)$$

oder durch Multiplizieren mit x

$$0 = dx(\gamma xx - \gamma yy) + du(\gamma y + \delta x + \zeta xxy)$$

oder

$$0 = \gamma dx(xx - yy) + Xdu.$$

§14 Es wird also $\frac{dx}{X} = \frac{du}{\gamma(yy-uu)}$ sein, und weil $\frac{dy}{Y} = \frac{dx}{X}$ ist, wird auch $\frac{dy}{Y} = \frac{du}{\gamma(yy-xx)}$ sein, woher wir haben werden

$$dV = \frac{(Q-P)du}{\gamma(yy-xx)}.$$

Zuerst tritt es also klar zu tage, wenn $Q = yy$ und $P = xx$ ist, dass sein wird

$$dV = \frac{du}{\gamma} \quad \text{und} \quad V = \frac{u}{\gamma} = \frac{xy}{\gamma}.$$

Daher wird unter der Annahme der kanonischen Gleichung sein

$$\int \frac{yydy}{Y} - \int \frac{xxdx}{X} = \text{Konst.} + \frac{xy}{\gamma}.$$

§15 Aber die gleiche Integration der Größe V gelingt auch, wenn für P und Q gewisse Potenzen von geraden Dimensionen von x und y angenommen werden. Damit dies klar wird, wollen wir $xx + yy = t$ setzen und wegen $xy = u$ geht die kanonische Gleichung in diese Form über

$$0 = \alpha + \gamma t + 2\delta u + \zeta uu,$$

woher $t = \frac{-\alpha - 2\delta u - \zeta uu}{\gamma}$ wird.

§16 Wir wollen nun $P = x^4$ und $Q = y^4$ setzen; es wird sein

$$dV = \frac{du}{\gamma}(xx + yy) = \frac{tdu}{\gamma} \quad \text{und daher} \quad dV = -\frac{-du}{\gamma\gamma}(\alpha + 2\delta u + \zeta uu);$$

daher wird durch Integrieren

$$dV = \frac{-\alpha u}{\gamma\gamma} - \frac{\delta uu}{\gamma\gamma} - \frac{\zeta u^3}{3\gamma\gamma} \quad \text{oder} \quad V = -\frac{-xy}{3\gamma\gamma}(3\alpha + 3\delta xy + \zeta yyxx).$$

Oder man wird wegen $\zeta xxyy = -\alpha - \gamma(xx + yy) - 2\delta xy$ haben

$$V = \frac{-xy}{3\gamma\gamma}(2\alpha - \gamma(xx + yy) + \delta xy).$$

§17 Daher wird unsere kanonische Gleichung auch dieser Integralgleichung Genüge leisten

$$\int \frac{y^4 dy}{Y} - \int \frac{x^4 dx}{X} = \text{Konst.} - \frac{xy}{3\gamma\gamma}(3\alpha + 3\delta xy + \zeta xxyy).$$

Und durch Sammeln dieser drei Fälle wird die kanonische Gleichung dieser sich weiter erstreckenden Differentialgleichung Genüge leisten

$$\int \frac{dy(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}yy + \mathfrak{C}y^4)}{\sqrt{\delta\delta - (\alpha + \gamma yy)(\gamma + \zeta yy)}} - \int \frac{dx(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}xx + \mathfrak{C}x^4)}{\sqrt{\delta\delta - (\alpha + \gamma xx)(\gamma + \zeta xx)}}$$
$$= \text{Konst.} + \frac{\mathfrak{B}xy}{\gamma} - \frac{\mathfrak{C}xy}{3\gamma\gamma}(3\alpha + 3\delta xy + \zeta xxyy).$$

§18 Wenn wir weiter fortschreiten wollen, müssen wir $P = x^6$ und $Q = y^6$ setzen und es wird werden

$$dV = \frac{du}{\gamma}(y^4 + xxyy + x^4) = \frac{du}{\gamma}(tt - uu);$$

nachdem also der für t gefundene Wert eingesetzt worden ist, wird sein

$$dV = \frac{du}{\gamma^3}(\alpha\alpha + 4\alpha\delta u + (4\delta\delta + 2\alpha\zeta - \gamma\gamma)uu + 4\delta\zeta u^3 + \zeta\zeta u^4)$$

und daher durch Integrieren

$$V = \frac{u}{\gamma^3}\left(\alpha\alpha + 2\alpha\delta u + \frac{1}{3}(4\delta\delta + 2\alpha\zeta - \gamma\gamma)uu + \delta\zeta u^3 + \frac{1}{5}\zeta\zeta u^4\right).$$

Daher wird durch die kanonische Gleichung sein

$$\int \frac{y^6 dy}{Y} - \int \frac{x^6 dx}{X}$$
$$= \text{Konst.} + \frac{xy}{15\gamma^3}(15\alpha\alpha + 30\alpha\delta xy + 5(4\delta\delta + 2\alpha\zeta - \gamma\gamma)xxyy + 15\delta\zeta x^3y^3 + 3\zeta\zeta x^4y^4).$$

§19 Nun wollen wir aber unseren irrationalen Formeln X und Y Formeln solcher Art zuschreiben, die leichter an bestimmte Fälle angepasst werden können, und es sei

$$X = \sqrt{p(A + Cxx + Ex^4)} \quad \text{und} \quad Y = \sqrt{p(A + Cyy + Ey^4)};$$

es ist also notwendig, dass gilt

$$Ap = -\alpha\gamma, \quad Ep = -\gamma\zeta, \quad Cp = \delta\delta - \gamma\gamma - \alpha\zeta,$$

woher wird

$$\alpha = \frac{-Ap}{\gamma}, \quad \zeta = \frac{-Ep}{\gamma} \quad \text{und} \quad \delta = \sqrt{\gamma\gamma + Cp + \frac{AEpp}{\gamma\gamma}}.$$

§20 Es sei nun $\gamma\gamma = A$ und $p = kk$ und es werde $\gamma = -\sqrt{A}$ genommen und es wird werden

$$\alpha = kk\sqrt{A}, \quad \gamma = -\sqrt{A}, \quad \zeta = \frac{Ekk}{\sqrt{A}} \quad \text{und} \quad \delta = \sqrt{A + Ckk + Ek^4}$$

und so wird sein

$$X = k\sqrt{A + Cxx + Ex^4} \quad \text{und} \quad Y = k\sqrt{A + Cyy + Ey^4}$$

und unsere kanonische Gleichung wird hervorgehen als

$$0 = Akk - A(xx + yy) + 2xy\sqrt{A(A + Ckk + Ek^4)} + Ekkxxyy.$$

§21 Nach dieser Gleichung hängen aber die Variablen x und y so voneinander ab, dass gilt

$$X = -y\sqrt{A} + x\sqrt{A + Ckk + Ek^4} + \frac{Ekk}{\sqrt{A}}xxy,$$

$$Y = \quad x\sqrt{A} - y\sqrt{A + Ckk + Ek^4} - \frac{Ekk}{\sqrt{A}}xyy,$$

woher wird

$$y = \frac{x\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)} - k\sqrt{A(A+Cxx+Ex^4)}}{A-Ekkxx},$$

$$x = \frac{y\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)} + k\sqrt{A(A+Cyy+Ey^4)}}{A-Ekkyy}.$$

§22 Diese Werte werden also dieser sich sehr weit erstreckenden aus § 17 abgeleiteten Integralgleichung Genüge leisten, während sie mit $-k$ multipliziert wird,

$$\int \frac{dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}xx+\mathfrak{C}x^4)}{\sqrt{A+Cxx+Dx^4}} - \int \frac{dy(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}yy+\mathfrak{C}y^4)}{\sqrt{A+Cyy+Ey^4}}$$
$$= \text{Konst.} + \frac{\mathfrak{B}kxy}{\sqrt{A}} + \frac{\mathfrak{C}kxy}{3A\sqrt{A}}(3Akk + 3xy\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)} + Ekkxxyy)$$
$$= \text{Konst.} + \frac{\mathfrak{B}kxy}{\sqrt{A}} + \frac{\mathfrak{C}kxy}{6A\sqrt{A}}(3Akk + 3A(xx+yy) - Ekkxxyy).$$

§23 Wenn daher also eine gewisse Kurve so beschaffen war, dass der Abszisse x dieser Bogen entspricht

$$= \int \frac{dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}xx+\mathfrak{C}x^4)}{\sqrt{A+Cxx+Ex^4}}$$

und er mit $\Pi.\ x$ und der jener Abszisse y entsprechenden in derselben Kurve

$$\int \frac{dy(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}yy+\mathfrak{C}y^4)}{\sqrt{A+Cyy+Ey^4}}$$

mit $\Pi.\ y$ bezeichnet wird, wird zwischen diesen zwei Bogen diese Relation Geltung haben

$$\Pi.\ x - \Pi.\ y = \text{Konst.} + \frac{\mathfrak{B}kxy}{\sqrt{A}} + \frac{\mathfrak{C}kxy}{6A\sqrt{A}}(3Akk + 3A(xx+yy) - Ekkxxyy),$$

wenn freilich die Abszissen x und y so voneinander abhängen, dass ist

$$x = \frac{y\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)} + k\sqrt{A(A+Cyy+Ey^4)}}{A-Ekkyy}$$

und

$$y = \frac{x\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)} - k\sqrt{A(A+Cxx+Ex^4)}}{A-Ekkxx}.$$

§24 Um aber diese Konstante, welche die Integralgleichung enthält, zu bestimmen, werde der Fall betrachtet, in welchem $y = 0$ und in dem $x = k$ wird; wenn daher nun auch der der verschwindenden Abszisse zukommende Bogen verschwindet, wird für diesen Fall $\Pi.\ k$ =Konst., nach Einsetzten welches Wertes man haben wird

$$\Pi.\ x - \Pi.\ y - \Pi.\ k = \frac{\mathfrak{B}kxy}{\sqrt{A}} + \frac{\mathfrak{C}kxy(kk+xx+yy)}{2\sqrt{A}} - \frac{\mathfrak{C}Ek^3x^3y^3}{6A\sqrt{A}}.$$

Auf diese Weise sind aber drei Bogen auf dieser Kurve gegeben, von denen einer die Summe der zwei übrigen um eine geometrisch angebbare Größe- überschreitet.

§25 Daher tritt es schon im Allgemeinen klar zu tage, wenn die Kurve so beschaffen war, dass der der Abszisse x entsprechende Bogen dieser ist

$$\Pi.\ x = \int \frac{\mathfrak{A}dx}{\sqrt{A+Cxx+Ex^4}}$$

und daher $\mathfrak{B} = 0$ und $\mathfrak{C} = 0$ ist, dass die Differenz jener Bogen dann ins Nichts übergeht. Und in diesem Fall wird daher bei dieser Kurve der Vergleich der Bogen genauso durchgeführt werden können wie beim Kreis. Wenn aber im Zähler der Term $\mathfrak{B}x^2$ oder $\mathfrak{C}x^4$ oder jeder der beiden vorhanden ist, dann ist die Differenz jener drei Bogen geometrisch angebbar und daher wird der Vergleich der Bogen genauso gelingen wie bei der Parabel. Der Vergleich wird aber auf dieselbe Weise angestellt werden, welche ich im ersten Beispiel für den Kreis und die Parabel dargestellt habe.

§26 Weil ja drei Bogen in die Rechnung eingehen, deren Abszissen x, y und k sind, tritt es klar zu tage, dass, so wie y von x und k abhängt, auf dieselbe Weise k von x und y anhängt, woher, nachdem zwei gegeben worden sind, der dritte aus diesen Gleichungen bestimmt werden wird

$$x = \frac{y\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)} + k\sqrt{A(A+Cyy+Ey^4)}}{A-Ekkyy},$$

$$y = \frac{y\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)} - k\sqrt{A(A+Cxx+Ex^4)}}{A-Ekkxx},$$

$$k = \frac{x\sqrt{A(A+Cyy+Ey^4)} - y\sqrt{A(A+Cxx+Ex^4)}}{A-Ekkyy}.$$

§27 Wenn daher eine von jeder Irrationlität freie Gleichung gebildet wird, wird hervorgehen

$$EEk^4x^4y^4 = AA(2kkxx + 2kkyy + 2xxyy - k^4 - x^4 - y^4) \\ +4ACkkxxyy + 2AEkkxxyy(kk+xx+yy).$$

Weil in dieser die drei Abszissen k, x, y auf die gleiche Weise vermischt worden sind, werden deren Quadrate kk, xx, yy als Wurzeln einer kubischen Gleichung betrachtet werden können

$$Z^3 - pZZ + qZ - r = 0,$$

und weil gilt

$$p = kk + xx + yy,$$
$$q = kkxx + kkyy + xxyy,$$
$$r = kkxxyy,$$

wird sein

$$EErr = AA(4q - pp) + 4ACr + 2AEpr$$

oder

$$(Ap - Er)^2 = 4AAq + 4ACr.$$

§28 Wenn also, nachdem diese Relation zwischen den Koeffizienten p, q und r festgelegt worden ist, für kk, xx und yy die drei Wurzeln dieser kubischen Gleichung genommen werden

$$Z^3 - pZZ + qZ - r = 0,$$

wird für den Vergleich der Bogen der Kurve, welche wir (§ 23) betrachtet haben, sein

$$\Pi.\ x - \Pi.\ y - \Pi.\ k = \frac{\mathfrak{B}\sqrt{r}}{\sqrt{A}} + \frac{\mathfrak{C}p\sqrt{r}}{2\sqrt{A}} - \frac{\mathfrak{C}Er\sqrt{r}}{6A\sqrt{A}}.$$

§29 Es seien die mit ihren Vorzeichen $+x$, $-y$, $-k$ behafteten Abszissen die Wurzeln dieser kubischen Gleichung

$$z^3 + szz + tz - u = 0;$$

es wird sein

$$\sqrt{r} = u, \quad q = tt + 2su \quad \text{und} \quad p = ss - 2t$$

sowie

$$(Ass - 2At - Euu)^2 = 4AAtt + 8AAsu + 4ACuu$$

oder

$$t = \frac{Ass - Euu}{4A} - \frac{2Asu + Cuu}{Ass - Euu}.$$

Aber die Wurzeln dieser Gleichung werden mit Hilfe der Dreiteilung des Winkels aufgefunden werden, dass nach Nehmen von $c = \frac{2}{3}\sqrt{ss - 3t}$ und des Winkels Φ, dessen Kosinus natürlich dieser ist

$$\cos\Phi = \frac{27u + 9st - 2s^3}{2(ss - 3t)\sqrt{ss - 3t}},$$

die Wurzeln selbst diese sein werden

$$x = v\cos\frac{1}{3}\Phi - \frac{1}{3}s, \quad y = v\cos\left(60^\circ + \frac{1}{3}\Phi\right) - \frac{1}{3}s,$$
$$k = v\cos\left(60^\circ - \frac{1}{3}\Phi\right) - \frac{1}{3}s.$$

§30 Aber nachdem wir diese Dinge nun hinter uns gelassen haben, welche die Wurzel betreffen, wollen wir den Gebrauch der gefundenen Formel genauer betrachten und zuerst taucht freilich diese höchst bemerkenswerte Differentialgleichung auf

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Cxx+Dx^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A+Cyy+Ey^4}},$$

von welcher wir natürlich wissen, dass ihr diese Integralgleichung entspricht

$$x = \frac{y\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)}+k\sqrt{A(A+Cyy+Ey^4)}}{A-Ekkyy};$$

weil diese die neue von unserem Belieben abhängende Konstante k involviert, wird sie tatsächlich die vollständige Integralgleichung sein.

§31 Wenn wir für diesen Fall festlegen

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A+Cxx+Ex^4}} = \Pi.\ x,$$

weil für $y=0$ gesetzt $x=k$ wird, wird $\Pi.\ x = \Pi.\ k + \Pi.\ y$ sein. Daher, wenn $k=y$ wird, dass gilt

$$x = \frac{2y\sqrt{A(A+Cyy+Ey^4)}}{A-Ey^4},$$

wird $\Pi.\ x = 2\Pi.\ y$ sein und daher genügt dieser Wert von x dieser Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Cxx+Ex^4}} = \frac{2dy}{\sqrt{A+Cyy+Ey^4}};$$

weil dieser aber keine neue Konstante umfasst, wird er nur ein unvollständiges Integral sein.

§32 Dennoch wird indes auch das vollständige Integral dieser Differentialgleichung dargeboten werden können. Es werde nämlich festgelegt

$$\frac{dy}{\sqrt{A+Cyy+Ey^4}} = \frac{dz}{\sqrt{A+Czz+Ez^4}}$$

und es wird sein

$$y = \frac{z\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)}+k\sqrt{A(A+Czz+Ez^4)}}{A-Ekkzz},$$

welcher Wert anstelle von y in dieser Formel eingesetzt werde

$$x = \frac{2y\sqrt{A(A+Cyy+Ey^4)}}{A-Ey^4},$$

und so wird x durch z und die neue beliebige Konstante k ausgedrückt werden, welcher Wert das vollständige Integral dieser Differentialgleichung sein wird

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Cxx+Ex^4}} = \frac{2dz}{\sqrt{A+Czz+Ez^4}}.$$

§33 Wir wollen $\Pi.\ k = n\Pi.\ y$ setzen und annehmen, dass der Wert von k schon gefunden worden ist und erschließen dann aus dem Vorhergehenden, wenn genommen wird

$$x = \frac{y\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)} + k\sqrt{A(A+Cyy+Ey^4)}}{A-Ekkyy},$$

dass $\Pi.\ x = (n+1)\Pi.\ y$ sein wird. Weil also im Fall $n = 1$ $k = y$ ist, wird der daher für x gefundene Wert den Wert von k für den Fall $n = 2$ geben, woher ein x aufgefunden wird, dass $\Pi.\ x = 3\Pi.\ y$ ist. Dieser Wert wird weiter für k genommen den Wert von x liefern, dass $\Pi.\ x = 4\Pi.\ y$ wird, und so lässt sich beliebig weit fortschreiten.

§34 Nachdem aber der Wert von x gefunden worden ist, dass $\Pi.\ x = n\Pi.\ y$ ist, wird er ein partikuläres Integral dieser Differentialgleichung sein

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Cxx+Ex^4}} = \frac{ndy}{\sqrt{A+Cyy+Ey^4}};$$

dann werde aber genommen

$$z = \frac{x\sqrt{A+Ckk+Ek^4)} + k\sqrt{A(A+Cxx+Ex^4)}}{A-Ekkxx}$$

und so wird der Wert des vollständigen Integrals von z für diese Differentialgleichung erhalten werden

$$\frac{dz}{\sqrt{A+Czz+Ez^4}} = \frac{ndy}{\sqrt{A+Cyy+Ey^4}};$$

es wird nämlich $\Pi.\ z = \Pi\ k + \Pi.\ x = \Pi.\ k + n\Pi.\ y$ sein.

§35 Wir wollen nun auch Im Allgemeinen eine sich weiter erstreckende Formel betrachten und wollen die auf sie gekrümmte Linie $akfgpqrst$ (Fig. 1) übertragen, deren natürliche Beschaffenheit diese sei, dass, nachdem irgendeine Abszisse $AK = x$ gesetzt worden ist, der selbiger entsprechende Bogen dieser ist

$$ak = \int \frac{dx(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{x}\mathfrak{x} + \mathfrak{C}\mathfrak{x}^4)}{\sqrt{A + Cxx + Ex^4}},$$

welchen wir mit diesem Zeichen $\Pi.\ x$ anzeigen wollen.

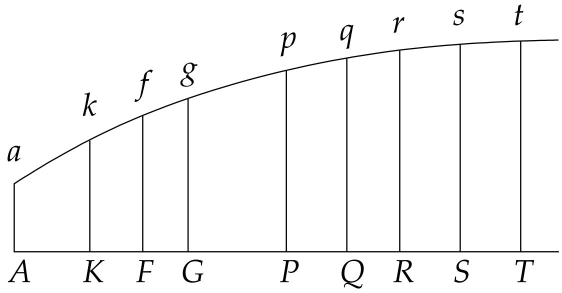

Fig. 1

Es ist aber offenbar, dass, so wie diese Relation zwischen dem Bogen ak und seiner Abszisse AK festgelegt worden ist, dieselbe auch zwischen Bogen und Ordinate oder Strang oder einer anderen Gerade, auf welche sich der Bogen beziehen lässt, festgelegt werden könnte. Daher, auch wenn hier x die dem Bogen ak entsprechende Abszisse bezeichnet, wird es dennoch auch jegliche sich auf den Bogen beziehende Gerade bezeichnen können, solange sie nur verschwindet, während der Bogen selbst verschwindet.

§36 Wir wollen nun drei Abszissen betrachten, welche $AK = k$, $AF = f$ und $AG = g$ seien, die so voneinander abhängen, dass ist

$$g = \frac{f\sqrt{A(A + Ckk + Ek^4)} + k\sqrt{A(A + Cff + Ef^4)}}{A - EEkkff},$$

$$f = \frac{g\sqrt{A(A + Ckk + Ek^4)} - k\sqrt{A(A + Cgg + Eg^4)}}{A - EEkkgg},$$

$$k = \frac{g\sqrt{A(A + Cff + Ef^4)} - f\sqrt{A(A + Cgg + Eg^4)}}{A - EEkkgg},$$

und so wird zwischen den Bogen $Ak = \Pi.\, k$, $af = \Pi.\, f$ und $ag = \Pi.\, g$ diese Relation Geltung haben, dass ist

$$\Pi.\, g - \Pi.\, f - \Pi.\, k = \text{Arc. } ag - \text{Arc. } af - \text{Arc. } ak = \text{Arc. } fg - \text{Arc. } ak$$
$$= \frac{\mathfrak{B}kfg}{\sqrt{A}} + \frac{\mathfrak{C}kfg(kk+ff+gg)}{2\sqrt{A}} - \frac{\mathfrak{C}Ek^3f^3g^3}{6A\sqrt{A}}.$$

§37 Nachdem also irgendein Kurvenbogen *ak* mit Anfang *a* gegeben worden ist, wird von jedem Punkt f aus ein Bogen fg abgetrennt werden können, so dass die Differenz der Bogen fg und *ak* geometrisch angegeben werden kann. Denn wegen der gegebenen Punkte k und f werden Abszissen k und f gegeben sein, aus denen durch die erste Formel die Abszisse g bestimmt wird. Oder es wird auch, wenn die Punkte k und g gegeben sind, indem von g aus rückwärts gegangen wird, ein Bogen gf abgetrennt werden können, welcher sich vom Bogen *ak* um eine geometrische Größe unterscheidet. Oder es wird schließlich, nachdem irgendein Bogen fg gegeben worden ist, von Kurvenanfang *a* aus der Bogen *ak* abgetrennt werden können, der von jenem um eine geometrische Größe abweicht.

§38 Hier verdient dieser Fall entwickelt zu werden, in welchem $f = k$ ist; wenn also die Abszisse $AG = g$ (Fig. 2) so angenommen wird, dass ist

$$g = \frac{2k\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)}}{A-Ek^4},$$

während $AK = k$ ist,

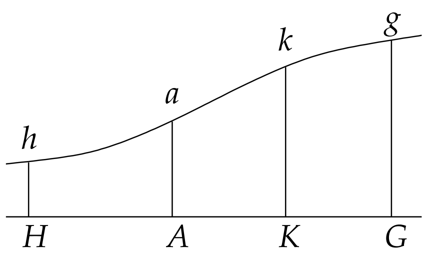

FIG. 2

wird sein

$$\text{Arc. } ag - 2\text{Arc. } ak = \frac{\mathfrak{B}kkg}{\sqrt{A}} + \frac{\mathfrak{C}kkg(2kk+gg)}{2\sqrt{A}} - \frac{\mathfrak{C}Ek^6g^3}{6A\sqrt{A}}.$$

Wenn daher nun $Ek^4 > A$ war, wird der Wert von g negativ hervorgehen, welcher also rückwärts genommen $AH = h$ wird, so dass $g = -h$ und $\Pi.\ g = -\Pi.\ h$ ist, wobei gilt

$$h = \frac{2k\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)}}{Ek^4 - A},$$

und es wird nach Verändern der Vorzeichen sein

$$\text{Arc. } ah + 2\text{Arc. } ak = \frac{\mathfrak{B}kkh}{\sqrt{A}} + \frac{\mathfrak{C}kkh(2kk+hh)}{2\sqrt{A}} - \frac{\mathfrak{C}Ek^6h^3}{6A\sqrt{A}}.$$

§39 Daher wird eingesehen, dass die Abszisse k einen Wert solcher Art erhalten kann, dass $h = k$ wird; daher, wenn die Kurve vom Punkt a aus in ähnlichen und gleichen Zweigen nach beiden Seiten hin erstreckt wird und $AH = AK$ war, wird auch Arc. ah = Arc. ak sein; daher, wenn $h = k$ ist oder

$$Ek^4 - A = 2\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)}$$

oder auch

$$EEk^8 - 6AEk^4 - 4ACkk - 3AA = 0,$$

wird sein

$$3\text{Arc. } ak = \frac{\mathfrak{B}k^3}{\sqrt{A}} + \frac{2\mathfrak{C}k^5}{2\sqrt{A}} - \frac{\mathfrak{C}Ek^9}{6A\sqrt{A}};$$

also wird der dieser Abszisse $AK = k$ entsprechende Bogen uneingeschränkt rektifizierbar sein, weil gilt

$$\text{Arc. } ak = \frac{\mathfrak{B}k^3}{3\sqrt{A}} + \frac{\mathfrak{C}k^5}{2\sqrt{A}} - \frac{\mathfrak{C}Ek^9}{18A\sqrt{A}}.$$

§40 Aber jene Gleichung, auch wenn die achten Grades ist, kann angenehm aufgelöst werden; nachdem nämlich ihre Faktoren wie folgt festgelegt worden sind

$$(k^4 + \alpha kk + \beta)(k^4 - \alpha kk + \gamma) = 0,$$

wird aufgefunden

$$\beta + \gamma = \alpha\alpha - \frac{6A}{E}, \quad \beta - \gamma = \frac{4AC}{\alpha EE} \quad \text{und} \quad \beta\gamma = -\frac{3AA}{EE},$$

woher entspringt

$$\alpha^4 - \frac{12A}{E}\alpha\alpha + \frac{36AA}{EE} - \frac{16AACC}{\alpha\alpha E^4} = -\frac{12AA}{EE}$$

und daher

$$\alpha\alpha = \frac{4A}{E} + \sqrt[3]{\frac{16AACC - 64A^3E}{E^4}}$$

und wegen

$$\gamma = \frac{\alpha\alpha}{2} - \frac{3A}{E} - \frac{2AC}{\alpha EE}$$

wird sein

$$kk = \frac{1}{2}\alpha \pm \sqrt{\frac{2AC}{\alpha EE} + \frac{3A}{E} - \frac{1}{4}\alpha\alpha}$$

oder auch

$$kk = -\frac{1}{2}\alpha \pm \sqrt{\frac{-2AC}{\alpha EE} + \frac{3A}{E} - \frac{1}{4}\alpha\alpha}.$$

§41 Aber dass der negativen Abszisse derselbe Bogen negativ genommen entspricht, hat bei diesen Kurven immer Geltung. Denn weil gilt

$$\Pi.\ x = \int \frac{dx(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}xx + \mathfrak{C}x^4)}{\sqrt{A + Cxx + Ex^4}},$$

wird, wenn die Abszisse x negativ genommen wird, sein

$$\Pi.\ (-x) = \int \frac{-dx(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}xx + \mathfrak{C}x^4)}{\sqrt{A + Cxx + Ex^4}} = -\Pi.\ x.$$

Es scheint also so zu sein, dass, sooft der im vorhergehenden Paragraphen definierten Abszisse k ein reeller Bogen entspricht, die Länge desselben Bogens dann geometrisch angegeben werden kann.

§42 Ich habe es aber nicht zu versichern gewagt, dass diese Schlussweise, mit der ich einen uneingeschränkt rektifizierbaren Bogen gefunden habe, immer fehlerfrei verwendet werden kann; es scheinen nämlich Fälle zu existieren, in welchen dies unrichtig ist. Wenn nämlich $\mathfrak{B} = 0$ und $\mathfrak{C} = 0$ ist und daher auch

$$\Pi.\ x = \int \frac{\mathfrak{A}dx}{\sqrt{A + Cxx + Dx^4}},$$

ginge in § 39 natürlich 3Arc. $ak = 0$ hervor, obwohl dennoch aus der dort dargebotenen Gleichung achten Grades die Abszisse k nicht $= 0$ wird. Aber es ist zu bedenken, dass diese Gleichung aus dieser entspringt

$$k = \frac{2k\sqrt{A(A + Ckk + Ek^4)}}{Ek^4 - A};$$

weil diese sofort die Wurzel $k = 0$ liefert, wird diese die einzige sein, die in diesem Fall dem Gefragten Genüge leistet, während alle übrigen ungeeignet sind.

§43 Und dennoch ist die Schlussweise in diesen Fällen nicht als ganz und gar falsch anzusehen, auch wenn für k irgendeine andere Wurzel angenommen wird, sondern es ist eher so zu verstehen, dass derselben Abszisse mehrere Bogen entsprechen, von welchen nur einer und zwar der negative genügt; und in diesem Fall, obgleich in § 38 $h = k$ gesetzt wird, folgt es also dennoch nicht, dass Arc. $ah =$ Arc. ak und daher Arc. $ah + 2$Arc. $ak = 3$Arc. ak ist, weil derselben Abszisse $h = k$ auch andere Bogen außer Arc. ak zukommen, unter welchen einer ist, der Arc. $ah + 2$Arc. $ak = 0$ ergibt.

§44 Damit dies besser erkannt wird, wollen wir $A = 1$, $C = 2$ und $E = 1$ setzen, während $\mathfrak{B} = 0$ und $\mathfrak{C} = 0$ ist, und es wird $\Pi.\ x = \mathfrak{A} \arctan x$ und Arc. $ak = \mathfrak{A} \arctan k$ sowie Arc. $ah = \mathfrak{A} \arctan h$ sein; also wird nach Setzen von

$$h = \frac{2k\sqrt{1 + 2kk + k^4}}{k^4 - 1} = \frac{2k}{k^4 - 1}$$

$\mathfrak{A}\arctan h + 2\mathfrak{A}\arctan k = 0$ sein. Wenn daher nun $h = k$ gesetzt wird, wird $kk = 3$ und $k = \sqrt{3}$ werden und $\mathfrak{A}(\arctan\sqrt{3} + 2\arctan\sqrt{3}) = 0$ aufgefunden werden.Obgleich aber $\arctan\sqrt{3} = \text{Arc. } 60°$ ist, folgt daher dennoch nicht $3\mathfrak{A}\text{Arc. } 60° = 0$, was natürlich falsch wäre; aber weil ja dem Tangens von $\sqrt{3}$ auch der Bogen von $-120°$ zukommt, wird dieser Wert an der ersten Stelle für $\arctan\sqrt{3}$ geschrieben die Wahrheit liefern, natürlich

$$\mathfrak{A}(-\text{Arc. } 120° + 2\text{Arc. } 60°) = 0.$$

§45 Diese Zweideutigkeit, nach welcher derselben Größe k, welche wir hier als Abszisse annehmen, mehrere Werte Arc. ak entsprechen können, ist also dafür verantwortlich, dass, auch wenn in § 38 $h = k$ gesetzt wird, sich dennoch für Arc. ah + 2Arc. ak nicht 3Arc. ak schreiben lässt. Dennoch wird indes nichtsdestoweniger in diesem Fall auch sein

$$\text{Arc. } ah + 2\text{Arc. } ak = \frac{\mathfrak{B}k^3}{\sqrt{A}} + \frac{3\mathfrak{C}k^5}{2\sqrt{A}} - \frac{\mathfrak{C}Ek^9}{6A\sqrt{A}};$$

denn der Abszisse h, auch wenn sie $= k$ ist, wird dennoch außer dem Bogen ak auch ein anderer Bogen zukommen, welcher anstelle von Arc. ah eingesetzt der Gleichung genügt. Diese Zweideutigkeit muss also sorgfältig beachtet werden, damit wir keine Fehler begehen.

§46 Sooft aber eine Mehrdeutigkeit von dieser Art nicht auftritt, sodass derselben Abszisse ein einziger Bogen entspricht, dann wird sich ohne zu zögern, nachdem die Abszisse $h = k$ gesetzt worden ist, für Arc. ah auch Arc. ak und 3Arc. ak dann auch Arc. ah + 2Arc. ak schreiben lassen und daher auch kein Fehler zu befürchten sein, welche Wurzel der in § 39 gefundenen Gleichung achten Grades auch immer für k genommen wird. Dies wird in dem Fall offensichtlich sein, in welchem $\mathfrak{A} = A$, $\mathfrak{B} = 2C$ und $\mathfrak{C} = 3E$ ist, in welchem natürlich wird

$$\Pi.\, x = x\sqrt{A + Cxx + Ex^4}$$

und daher eine algebraische Größe wird und genauso ist auch

$$\Pi.\, g - \Pi.\, f - \Pi.\, k = \frac{2Ckfg}{\sqrt{A}} + \frac{3Ekfg(kk + ff + gg)}{2\sqrt{A}} - \frac{EEk^3f^3g^3}{2A\sqrt{A}}.$$

§47 Wenn daher nun $f = k$ gesetzt wird, wird sein

$$g = \frac{2k\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)}}{A-Ek^4}$$

und daher

$$\sqrt{A(A+Cgg+Eg^4)} = \frac{A(gg-2kk)+Ek^4gg)}{2kk}.$$

und

$$\sqrt{A(A+Cgg+Eg^4)} = \frac{A(gg-2kk)+Ek^4gg}{2kk}.$$

Es sei nun $g = -k$ oder

$$Ek^4 - A = 2\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)};$$

es wird sein

$$\sqrt{A(A+Cgg+Eg^4)} = \frac{-A+Ek^4}{2} = \sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)};$$

daher ist $\Pi.\ g = -\Pi.\ k$ und auch

$$-\Pi.\ k = \frac{-2Ck^3}{\sqrt{A}} - \frac{9Ek^5}{2\sqrt{A}} \quad \text{oder} \quad 3\Pi.\ k = \frac{k(4ACkk+9AEk^4-EEk^8)}{2A\sqrt{A}}.$$

Aber es ist

$$EEk^8 = 6AEk^4 + 4ACkk + 3AA,$$

was wegen $\Pi.\ k = \sqrt{A+Ckk+Ek^4}$ mit der Wahrheit verträglich ist.

§48 Obwohl aber diese Kurve per se rektifizierbar ist, zeigt es dennoch klar ersichtlich das, was wir wollen, natürlich, dass in unseren Formeln auch nicht rektifizierbare Kurven enthalten sind, in welchen sich auf die gerade dargestellte Weise ein uneingeschränkt rektifizierbarer Bogen angeben lässt. Nachdem aber ein einziger rektifizierbarer Bogen wie beispielsweise *ak* gefunden worden ist, werden aus ihm sofort unendlich viele andere derselben Gestalt dargeboten werden können; weil nämlich von jedem Punkt f aus ein Bogen fg abgetrennt werden kann, dessen Differenz von jenem geometrisch ist, wird auch dieser Bogen rektifizierbar sein. Zusätzlich werden aber aus demselben Bogen auf die folgende Weise, welche wir im Allgemeinen darstellen wollen, noch unendlich viele andere gleichermaßen rektifizierbare Bogen aufgefunden werden.

§49 Um aber unsere Formeln zu vereinfachen, wollen wir der Kürze wegen festlegen

$$\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)}=K, \quad \sqrt{A(A+Cff+Ef^4)}=F, \quad \sqrt{A(A+Cgg+Eg^4)}=G,$$

dass durch § 36 gilt

$$g=\frac{fK+kF}{A-Ekkff}, \quad f=\frac{gK-kG}{A-Ekkgg}, \quad k=\frac{gF-fG}{A-Effgg}.$$

Wenn daher nun war

$$\Pi.\ x=\int\frac{dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}xx+\mathfrak{C}x^4)}{\sqrt{A+Cxx+Ex^4}},$$

wird sein

$$=\frac{\mathfrak{B}kfg}{\sqrt{A}}+\frac{\mathfrak{C}kfg(kk+ff+gg)}{2\sqrt{A}}-\frac{\mathfrak{C}Ek^3f^3g^3}{6A\sqrt{A}}.$$

§50 Es werden nun auf die gleiche Weise außer der Abszisse $AK=k$ die zwei anderen Abszissen $AP=p$, $AQ=q$ genommen und es wird, nachdem in gleicher Weise

$$\sqrt{A(A+Cpp+Ep^4)}=P \quad \text{und} \quad \sqrt{A(A+Cqq+Eq^4)}=Q$$

gesetzt und nachstehende Relation festgelegt worden ist

$$q=\frac{pK+kP}{A-Ekkpp}, \quad p=\frac{qK-kQ}{A-Ekkqq}, \quad k=\frac{qP-pQ}{A-Eppqq},$$

für dieselbe Kurve sein

$$\text{Arc. } pq-\text{Arc. } ak=\frac{\mathfrak{B}kpq}{\sqrt{A}}+\frac{\mathfrak{C}kpq(kk+pp+qq)}{2\sqrt{A}}-\frac{\mathfrak{C}Ek^3p^3q^3}{6A\sqrt{A}}.$$

§51 Nachdem also jene Gleichung von dieser subtrahiert worden ist, wird diese zurückbleiben

$$\text{Arc. } pq - \text{Arc. } fg$$
$$= \frac{\mathfrak{B}k(pq-fg)}{\sqrt{A}} + \frac{\mathfrak{C}kpq(kk+pp+qq) - \mathfrak{C}kfg(kk+ff+gg)}{2\sqrt{A}} - \frac{\mathfrak{C}Ek^3(p^3q^3-f^3g^3)}{6A\sqrt{A}},$$

wo die Abszissen f, g, p und q so voneinander abhängen, dass ist

$$k = \frac{gF-fG}{A-Effgg} = \frac{qP-pQ}{A-Eppqq} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{k} = \frac{gF+fG}{A(gg-ff)} = \frac{qP+pQ}{A(qq-pp)},$$

woher zugleich die Abszisse k eliminiert und die Relation zwischen f, g, p, q definiert werden können wird.

§52 Um diese Elimination leichter durchzuführen, ist es anzumerken, dass auch gilt

$$K = \frac{A(ff+gg-kk)-Ekkffgg}{2fg} = \frac{A(pp+qq-kk)-Ekkppqq}{2pq},$$

woher wird

$$kk = \frac{Apq(ff+gg)-Afg(pp+qq)}{(pq-fg)(A-Efgpq)} = \frac{(gF-fG)^2}{(A-Effgg)^2} = \frac{(qP-pQ)^2}{(A-Eppqq)^2}.$$

Es wird also sein

$$pq(kk+pp+qq) - fg(kk+ff+gg) = pq(pp+qq) - fg(ff+gg)$$
$$+ \frac{Apq(ff+gg)-Afg(pp+qq)}{A-Efgpq}$$

und daher wird erhalten

$$\text{Arc. } pq - \text{Arc. } fg = \frac{\mathfrak{B}k(pq-fg)}{\sqrt{A}} + \frac{\mathfrak{C}k(pq-fg)(ff+gg+pp+qq)}{2\sqrt{A}}$$
$$- \frac{\mathfrak{C}Ek(pq-fg)^2(pq(ff+gg)-fg(pp+qq))}{6(A-Efgpq)\sqrt{A}}.$$

§53 Weil also gilt

$$kk = \frac{A(pq(ff+gg) - fg(pp+qq))}{(pq-fg)(A-Efgpq)}$$

und die die Abszissen f, g, p, q so voneinander abhängen, dass ist

$$\frac{gF+fG}{gg-ff} = \frac{qP+pQ}{qq-pp},$$

tritt es klar zu tage, dass, nachdem irgendein Bogen fg vorgelegt worden ist, auf der angenommenen Kurve immer von einem anderen gegebenen Punkt p aus ein Bogen pq abgetrennt werden kann, der von jenem Bogen um eine algebraisch angebbare Größe abweicht.

§54 Wenn daher weiter, indem vom Punkt a weiter fortgeschritten wird, der Punkt r genommen wird, so dass, nachdem die Abszisse $AR = r$ gesetzt worden ist, ist

$$\frac{gF+fG}{gg-ff} = \frac{rQ+qR}{rr-qq}$$

oder

$$\frac{pq(ff+gg)-fg(pp+qq)}{(pq-fg)(A-Efgpq)} = \frac{qr(ff+gg)-fg(qq+rr)}{(qr-fg)(A-Efgqr)} = \frac{qr(pp+qq)-pq(qq+rr)}{(qr-pq)(A-Epqqr)},$$

wird auch Arc $qr -$ Arc. $fg =$ einer algebraischen Größe sein, welche Differenz zu ersten addiert geben wird

$$\text{Arc. } pr - 2\text{Arc. } fg = \text{algebr. Größe},$$

und es kann von einem gegebenen Punkt p aus der Bogen pr abgetrennt werden, welcher den doppelten vorgelegten Bogen fg um eine algebraische Größe überragt.

§55 Auf die gleiche Weise, wenn weiter die Abszissen $AS = s$, $AT = t$ etc. so genommen werden, dass ist

$$\frac{gF+fG}{gg-ff} = \frac{sR+rS}{ss-rr} = \frac{tS+sT}{tt-ss} \quad \text{etc.},$$

wird der Bogen ps das Dreifache des Bogens fg, der Bogen pt das Vierfache des Bogens fg etc. um eine geometrisch angebbare Größe überragen. Umgekehrt wird aber, nachdem entweder der Bogen pr oder ps oder pt etc. gegeben worden ist, von jedem gegeben Punkt f aus der Bogen fg abgetrennt werden können, der von der Hältfe oder dem Drittel oder dem Viertel von jenem um eine geometrisch angebbare Größe abweicht.

§56 Es könnte auch geschehen, dass, obwohl die Größen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ nicht dem Nichts gleich sind, diese geometrisch angebbaren Differenzen verschwinden; denn eine der Abszissen kann sogar so bestimmt werden, dass diese Differenz tatsächlich ins Nichts übergeht. In diesen Fällen werden also auf der vorgelegten Kurve zwei Bogen solcher Art angegeben werden können, welche entweder einander gleich sein werden oder ein gegebenes Zahlenverhältnis zueinander haben werden.

§57 Weil diese Dinge sich sehr weit erstrecken und auf alle Kurven angewendet werden können, deren Bogen für die Abszisse oder irgendeine andere variable Gerade x so ausgedrückt wird, dass er ist

$$=\int \frac{dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}xx+\mathfrak{C}x^4)}{\sqrt{A+Cxx+Ex^4}},$$

wird es passend sein, dass diese Beschaffenheiten für einige bestimmte Kurven entwickelt werden, damit der Nutzen dieser Methode besser erkannt wird. Es scheint also ratsam, diesen Vergleich zuerst hauptsächlich anhand der Ellipse darzustellen.

Über den Vergleich von Bogen bei der Ellipse

§58 Es sei also der elliptische Quadrant ABa (Fig. 3) vorgelegt, dessen Zentrum in A sei; die eine Halbachse, über welcher die Abszissen genommen werden, werde $AB = a$, die andere hingegen $Aa = na$ gesetzt. Nachdem also irgendeine Abszisse $AP = x$ gesetzt worden ist, wird die Ordinate diese sein

$$PM = n\sqrt{aa-xx}$$

und ihr Differential dieses

$$= -\frac{nxdx}{\sqrt{aa - xx}},$$

woher der dieser Abszisse entsprechende Bogen wird

$$am = \int dx \sqrt{\frac{aa + (nn-1)xx}{a - xx}}.$$

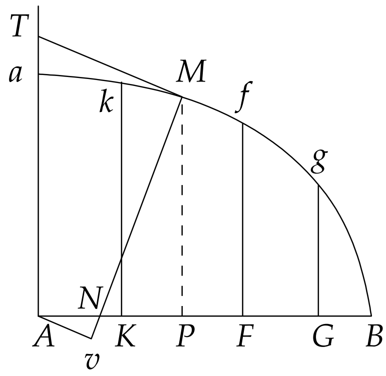

FIG. 3

Es werde $1 - nn = m$ gesetzt, dass ist

$$aM = \int dx \sqrt{\frac{aa - mxx}{aa - xx}}.$$

Weil es nichts zur Sache tut, welche der beiden Achsen größer oder kleiner ist, wollen wir annehmen, dass AB kleiner ist; und daher ist $n < 1$ und m eine positive Zahl größer als die Einheit ist, und weil der Fokus auf der Halbachse AB liegt, wird sein Abstand vom Zentrum A sein

$$= \sqrt{aa - nnaa} = a\sqrt{m};$$

daher wird der Wert der Zahl m leichter verstanden.

Wenn daher also der irgendeiner Abszisse $AP = x$ entsprechende Bogen $am = \Pi.\ x$ genannt wird, wird er sein

$$\Pi.\ x = \int dx \sqrt{\frac{aa - mxx}{aa - xx}},$$

welcher Ausdruck auf unsere allgemeine Form reduziert in diese übergehen wird

$$\Pi.\ x = \int \frac{dx(aa - mxx)}{\sqrt{a^4 - (m+1)aaxx + mx^4)}}.$$

Und so werden wir für diesen Fall diese Werte haben

$$A = a^4, \quad C = -(m+1)aa, \quad E = a, \quad \mathfrak{A} = aa, \quad \mathfrak{B} = -m \quad \text{und} \quad \mathfrak{C} = 0.$$

Nachdem also die drei Abszissen k, x, y genommen worden sind, denen die Bogen $\Pi.\ k$, $\Pi.\ x$, $\Pi.\ y$ entsprechen, so dass ist

$$x = \frac{aay\sqrt{a^4 - (m+1)aakk + mk^4} + aak\sqrt{a^4 - (m+1)aayy + my^4}}{a^4 - mkkyy},$$

$$y = \frac{aax\sqrt{a^4 - (m+1)aakk + mk^4} - aak\sqrt{a^4 - (m+1)aaxx + mx^4}}{a^4 - mkkxx},$$

$$k = \frac{aax\sqrt{a^4 - (m+1)aayy + my^4} + aay\sqrt{a^4 - (m+1)aaxx + mx^4}}{a^4 - mxxyy},$$

werden diese drei Bogen so voneinander abhängen, dass ist

$$\Pi.\ x - \Pi.\ y - \Pi.\ k = -\frac{mkxy}{aa}.$$

Nachdem diese Dinge vorausgeschickt worden sind, wollen wir also die folgenden Probleme auflösen.

PROBLEM 1

§59 Nachdem irgendein Ellipsenbogen ak (Fig. 3) vorgelegt worden ist, von einem anderen Punkt f den Bogen fg abzutrennen, so dass die Differenz der Bogen ak und fg geometrisch angegeben werden kann.

LÖSUNG

Nachdem von den Punkten k, f, g aus die Ordinaten kK, fF, gG gezogen worden sind, werden die Abszissen $AK = k$, $AF = f$, $AG = g$ genannt, von denen jene gegeben sind, diese hingegen gesucht wird, und die Bogen werden diese sein

$$ak = \Pi.\, k, \quad af = \Pi.\, f, \quad ag = \Pi.\, g.$$

Es werde weiter der Kürze wegen nach § 49 Folgendes festgelegt

$$aa\sqrt{a^4 - (m+1)aakk + mk^4} = K,$$
$$aa\sqrt{a^4 - (m+1)aaff + mf^4} = F,$$
$$aa\sqrt{a^4 - (m+1)aagg + mg^4} = G$$

und diese Relation zwischen den drei Abszissen festgelegt

$$g = \frac{fK + kF}{a^4 - mkkff} \quad \text{oder} \quad f = \frac{gK - kG}{a^4 - mkkgg} \quad \text{oder} \quad k = \frac{gF - fG}{a^4 - mffgg},$$

wonach man haben wird

$$\Pi.\, g - \Pi.\, f - \Pi.\, k = \text{Arc. } fg - \text{Arc. } ak = -\frac{mkfg}{aa}.$$

Nachdem also der Punkt g so genommen worden ist, dass ist

$$AG = g = \frac{fK + kF}{a^4 - mkkff},$$

wird die Differenz der Bogen ak und fg geometrisch angegeben werden können. Es wird nämlich sein

$$\text{Arc. } ak - \text{Arc. } fg = \frac{mkfg}{aa}.$$

Q. E. I.

Korollar 1

§60 Dieselbe Lösung wird Geltung haben, wenn nach Vorlegen des Bogens ak der Punkt g gegeben ist, von welchem aus durch Rückwärtsgehen zu a der Bogen gf abgetrennt werden muss, dessen Differenz von jenem geometrisch sein muss; dann werden nämlich die Abszissen k und g gegeben sein, aus welchen der Wert der dritten f aufgefunden werden können wird.

KOROLLAR 2

§61 Nachdem auch irgendein Bogen fg auf der Ellipse gegeben worden ist, wird vom Scheitel a aus der Bogen ak abgetrennt werden können, so dass die Differenz der Bogen ak und fg geometrisch wird. So wird die Rektifikation eines jeden Bogens fg von der Rektifikation eines gewissen Bogens ak, also mit dem Ellipsenscheitel a als Grenze, abhängen.

KOROLLAR 3

§62 Die Relation zwischen den drei Abszissen k, f, g kann auch so dargeboten werden, dass ist

$$g = \frac{a^4(-kk+ff)}{fK-kF} \quad \text{oder} \quad f = \frac{a^4(-kk+gg)}{gK+kG} \quad \text{oder} \quad k = \frac{a^4(gg-ff)}{gF+fG},$$

aus welchen mit den vorhergehenden verglichen gefunden wird

$$\begin{aligned}
K &= \frac{a^4(ff+gg-kk)-mkkffgg}{2fg} &&= aa\sqrt{(aa-kk)(aa-mkk)},\\
F &= \frac{a^4(kk+gg-ff)-mkkffgg}{2kg} &&= aa\sqrt{(aa-ff)(aa-mff)},\\
G &= \frac{-a^4(ff+gg-kk)+mkkffgg}{2kf} &&= aa\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)};
\end{aligned}$$

dann wird man aber auch haben

$$fg(gg-ff)K - kg(gg-kk)F - kf(ff-kk)G = 0.$$

KOROLLAR 4

§63 Wenn die Differenz zwischen den Bogen ak und fg vollkommen verschwinden muss, tritt es klar zu tage, dass es nur geschehen kann, wenn entweder $k = 0$ oder $f = 0$ oder $g = 0$ ist. Im ersten Fall verschwindet der Bogen ak selbst genauso wie der Bogen fg, in den zwei übrigen Fällen fällt aber die eine der beiden Grenzen der Bogen fg auf den Punkt a und der Bogen fg wird dem Bogen ak nicht nur gleich, sondern auch ähnlich.

KOROLLAR 5

§64 Damit diese Relation der Abszissen leichter für die Praxis verwendet werden kann, wird es förderlich sein angemerkt zu haben, dass im Allgemeinen, wenn zum Punkt M die Normale MN gezogen wird und zu ihr von A aus das Lot AV gefällt wird, welches der Tangente MT parallel sein wird, und $AP = x$ gesetzt wird, dass sein wird

$$PM = n\sqrt{aa - xx}, \quad PN = nnx, \quad AN = mx, \quad MN = n\sqrt{aa - mxx},$$

$$AV = \frac{mx\sqrt{aa - xx}}{\sqrt{aa - mxx}}, \quad NV = \frac{mnxx}{\sqrt{aa - mxx}}, \quad MV = \frac{aa}{\sqrt{aa - mxx}},$$

$$MT = \frac{x\sqrt{aa - mxx}}{\sqrt{aa - xx}}, \quad AT = \frac{naa}{\sqrt{aa - xx}} \quad \text{und} \quad AV \cdot MT = mxx.$$

KOROLLAR 6

§65 Nachdem also g für x gesetzt worden ist, werden diese Werte für den Punkt g aufgefunden

$$g = \frac{a^2k\sqrt{(aa - ff)(aa - mff)} + aaf\sqrt{(aa - kk)(aa - mkk)}}{a^4 - mkkff},$$

$$\sqrt{aa - gg} = \frac{a^3\sqrt{(aa - kk)(aa - ff)} - akfsqrt(aa - mkk)(aa - mff}{a^4 - mkkff},$$

$$\sqrt{aa - mgg} = \frac{a^3\sqrt{(aa - mkk)(aa - mff)} - makf\sqrt{(aa - kk)(aa - ff)}}{a^4 - mkkff}$$

und

$$\sqrt{(aa - gg)(aa - mgg)}$$

$$= \frac{a^4kf(2maa(kk + ff) - (m + 1)(a^4 + mkkff)) + aa(aa(a^4 + mkkff)\sqrt{(aa - mkk)(aa - ff)(aa - mff)}}{(a^4 - mkkff)^2},$$

woher weiter gefunden wird

$$aa\sqrt{aa - mgg} + mkf\sqrt{aa - gg} = a\sqrt{(aa - mkk)(aa - mff)},$$

$$aa\sqrt{aa - gg} + kf\sqrt{aa - mgg} = a\sqrt{(aa - kk)(aa - ff)}.$$

FALL 1

§66 Nachdem der Ellipsenbogen ak (Fig. 4) mit dem einen Scheitel a als Grenze vorgelegt worden ist, von dem anderen Scheitel B aus den Bogen Bf abzutrennen, so dass die Differenz der Bogen ak und Bf geometrisch ist.

Das Problem wird also auf diesen Fall übergragen, wenn der Punkt g im Scheitel B festgelegt wird oder $g = a$ wird, und es muss der Punkt f oder die Abszisse $AF = f$ gesucht werden. Aber wegen $g = a$ wird $G = 0$ sein und daher wird man haben

$$f = \frac{aK}{a^4 - maakk} = a\sqrt{\frac{aa - kk}{aa - mkk}}$$

oder es muss, nachdem zum Punkt k hin die Normale kN gezogen worden ist, genommen werden

$$AF = f = \frac{AB \cdot Kk}{Nk}.$$

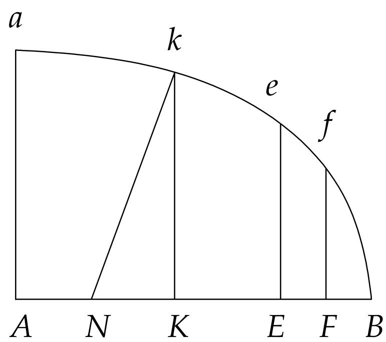

FIG. 4

Nachdem dieser Punkt aber so genommen worden ist, wird die Differenz der Bogen sein

$$\text{Arc. } ak - \text{Arc. } Bf = \frac{mkf}{a} = mk\sqrt{\frac{aa - kk}{aa - mkk}} = \frac{AN \cdot Kk}{Nk}.$$

KOROLLAR

§67 Es kann also gesehen, dass die Punkte k und f in einem Punkt e zusammenlaufen und der Quadrant aeB so in zwei Teile geschnitten wird, deren

Differenz geometrisch ist. Dafür werde $k = f = AE = e$ gesetzt und es wird sein

$$e = a\sqrt{\frac{aa - ee}{aa - mee}} \quad \text{oder} \quad a^4 - 2aaee + me^4 = 0,$$

woher wird

$$ee = \frac{aa \pm aa\sqrt{1-m}}{m} = \frac{aa(1 \pm n)}{m}$$

- wegen $m = 1 - nn$. Daher wird also sein

$$e = \frac{a}{\sqrt{1 \pm n}}.$$

Aber weil $e < a$ sein muss, wird sein

$$e = \frac{a}{\sqrt{1+n}}$$

oder

$$AE = \frac{AB^2}{\sqrt{AB^2 + AB \cdot Aa}} \quad \text{und} \quad Ee = \frac{na\sqrt{n}}{\sqrt{1+n}},$$

so dass ist

$$AE : Ee = 1 : n\sqrt{n} = AB\sqrt{AB} : Aa\sqrt{Aa}.$$

Und in diesem Fall wird sein

$$\text{Arc. } ae - \text{Arc. } Be = a(1-n) = AB - Aa.$$

Fall 2

§68 Nachdem der Bogen *ak* (Fig. 5) mit dem Scheitel *a* als Grenze vorgelegt worden ist, von seiner anderen Grenze *k* aus den Bogen *kg* abzutrennen, so dass die Differenz der Bogen *ak* und *kg* rektifizierbar ist.

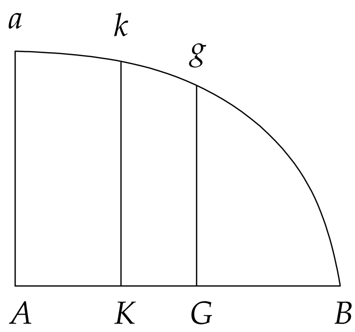

FIG. 5

In diesem Fall fällt also der Punkt f auf k und es wird $f = k$ und daher auch $F = K$ sein; daher wird aufgefunden

$$AG = g = \frac{2kK}{a^4 - mk^4} = \frac{2aak\sqrt{(aa-kk)(aa-mkk)}}{a^4 - mk^4}.$$

Nachdem also die Abszisse AG genommen worden ist, wird der Wert dieser sein

$$\text{Arc. } ak - \text{Arc. } kg = \frac{mkkg}{aa} = \frac{2mk^3\sqrt{(aa-kk)(aa-mkk)}}{a^4 - mk^4}.$$

KOROLLAR 1

§69 Umgekehrt wird also irgendein im Scheitel a begrenzter Bogen ag so in zwei Teile geschnitten werden können, dass die Differenz der Teile $ak - kg$ rektifizierbar wird. Denn wegen der bekannten Abszisse $AG = g$ muss die gesuchte Abszisse $AK = k$ aus dieser Gleichung bestimmt werden

$$gg(a^4 - mk^4)^2 = 4a^4kk(aa-kk)(aa-mkk),$$

welche in diese achten Grades übergeht

$$mmggk^8 - 4ma^4k^6 - 2ma^4ggk^4 + 4(m+1)a^6k^4 - 4a^8kk + a^8gg = 0.$$

KOROLLAR 2

§70 Aber wenn die Faktoren dieser Gleichung wie folgt festgelegt werden

$$(mgk^4 - Akk + a^4g)(mgk^4 - Bkk + a^4g) = 0,$$

wird aufgefunden

$$A + B = \frac{4a^4}{g} \quad \text{und} \quad AB = 4(m+1)a^6 - 4ma^4gg,$$

woher dann wird

$$A - B = \frac{4aa}{g}\sqrt{a^4 - (m+1)aagg + mg^4},$$

so dass gilt

$$A = \frac{2a^4 + 2aa\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)}}{g}$$

und

$$B = \frac{2a^4 - 2aa\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)}}{g}.$$

Als logische Konsequenz ist

$$k^4 = \frac{2a^4kk \pm 2aakk\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)} - a^4gg}{mgg}$$

und

$$kk = \frac{a^4 \pm aa\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)} \pm a^3\sqrt{2aa - (m+1)gg \pm 2\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)}}}{mgg}.$$

Korollar 3

§71 Also sind die vier Wurzeln von kk

$$\text{I.} \quad kk = \frac{a^4 + aa\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)} + a^3\sqrt{aa-gg} + a^3\sqrt{aa-mgg}}{mgg},$$

$$\text{II.} \quad kk = \frac{a^4 + aa\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)} - a^3\sqrt{aa-gg} - a^3\sqrt{aa-mgg}}{mgg},$$

$$\text{III.}\quad kk = \frac{a^4 - aa\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)} + a^3\sqrt{aa-gg} - a^3\sqrt{aa-mgg}}{mgg},$$

$$\text{IV.}\quad kk = \frac{a^4 - aa\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)} - a^3\sqrt{aa-gg} + a^3\sqrt{aa-mgg}}{mgg},$$

welche unter Verwendung der Zweideutigkeit auf diese Weise zusammengefasst dargestellt werden können

$$kk = \frac{aa}{mgg}(a \pm \sqrt{aa-gg})(a \pm \sqrt{aa-mgg}).$$

KOROLLAR 4

§72 Die Werte von k selbst werden daher diese sein

$$k = \pm\frac{a}{g\sqrt{m}}\left(\sqrt{\frac{a+g}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-g}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{a+g\sqrt{m}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-g\sqrt{m}}{2}}\right),$$

welche alle zusammen an der Zahl acht sind, vier positive und ebenso viele negative und jenen gleiche; es ist aber offenbar, dass hier nur die positiven und die Geltung haben, die $k < g$ liefern. Hier ist aber gewiss

$$k = \frac{a}{g\sqrt{m}}\left(\sqrt{\frac{a+g}{2}} - \sqrt{\frac{a-g}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{a+g\sqrt{m}}{2}} - \sqrt{\frac{a-g\sqrt{m}}{2}}\right).$$

Denn es ist

$$\sqrt{\frac{a+g}{2}} + \sqrt{\frac{a-g}{2}} > \sqrt{a}, \quad \sqrt{\frac{a+g}{2}} - \sqrt{\frac{a-g}{2}} < \sqrt{g},$$

$$\sqrt{\frac{a+g\sqrt{m}}{2}} + \sqrt{\frac{a-g\sqrt{m}}{2}} > \sqrt{a}, \quad \sqrt{\frac{a+g\sqrt{m}}{2}} - \sqrt{\frac{a-g\sqrt{m}}{2}} > \sqrt{g\sqrt{m}}.$$

KOROLLAR 5

§73 Wenn Folgendes festgelegt wird

$$\frac{g}{a} = \cos\eta \quad \text{und} \quad \frac{g\sqrt{m}}{a} = \cos\theta,$$

wird wegen $m < 1$ $\theta > \eta$ sein und unsere für die Wurzeln von k gefundene Form wird in diese Form übergehen

$$k = \pm \frac{a}{\cos\theta}\left(\cos\frac{1}{2}\eta \pm \sin\frac{1}{2}\eta\right)\left(\cos\frac{1}{2}\theta \pm \sin\frac{1}{2}\theta\right)$$

oder man wird wegen

$$\cos\theta = \cos^2\frac{1}{2}\theta - \sin^2\frac{1}{2}\theta$$

haben

$$k = \pm a \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}\eta \pm \sin\frac{1}{2}\eta}{\cos\frac{1}{2}\theta \pm \sin\frac{1}{2}\theta}.$$

Oder die acht Werte werden diese sein

$$k = \pm a \cdot \frac{\cos\left(45^\circ - \frac{1}{2}\eta\right)}{\cos\left(45^\circ - \frac{1}{2}\theta\right)}, \qquad k = \pm a \cdot \frac{\sin\left(45^\circ - \frac{1}{2}\eta\right)}{\cos\left(45^\circ - \frac{1}{2}\theta\right)},$$

$$k = \pm a \cdot \frac{\cos\left(45^\circ - \frac{1}{2}\eta\right)}{\sin\left(45^\circ - \frac{1}{2}\theta\right)}, \qquad k = \pm a \cdot \frac{\sin\left(45^\circ - \frac{1}{2}\eta\right)}{\sin\left(45^\circ - \frac{1}{2}\theta\right)}.$$

KOROLLAR 6

§74 Von diesen Werten leistet der zweite

$$k = a \cdot \frac{\sin\left(45^\circ - \frac{1}{2}\eta\right)}{\cos\left(45^\circ - \frac{1}{2}\theta\right)} = a \cdot \frac{\sin\left(45^\circ - \frac{1}{2}\eta\right)}{\sin\left(45^\circ + \frac{1}{2}\theta\right)}$$

immer genüge; es wird nämlich, wie es offenbar ist, nicht nur $k > a$, sondern auch $k < g$ oder $k < a\cos\eta$. Aus dem ersten Wert

$$k = a \cdot \frac{\sin\left(45^\circ + \frac{1}{2}\eta\right)}{\cos\left(45^\circ - \frac{1}{2}\theta\right)}$$

wird freilich wegen $\eta < \theta$ immer $k < a$; aber damit $k < g$ ist, muss sein

$$\frac{\sin\left(45^\circ + \frac{1}{2}\eta\right)}{\cos\left(45^\circ - \frac{1}{2}\theta\right)} < \cos\eta = \sin(90^\circ - \eta) = 2\sin\left(45^\circ - \frac{1}{2}\eta\right)\cos\left(45^\circ + \frac{1}{2}\eta\right)$$

und daher

$$1 < 2\sin\left(45^\circ - \frac{1}{2}\eta\right)\sin\left(45^\circ + \frac{1}{2}\theta\right)$$

oder

$$1 < \cos\frac{1}{2}(\theta+\eta) - \cos\left(90^\circ + \frac{1}{2}(\theta-\eta)\right)$$

oder

$$1 < \cos\frac{1}{2}(\theta+\eta) + \sin\frac{1}{2}(\theta-\eta).$$

PROBLEM 2

§75 Nachdem irgendein Ellipsenbogen fg (Fig. 6) vorgelegt worden ist, von gegebenem Punkt p einen anderen Bogen pq abzutrennen, so dass die Differenz dieser Bogen, $fg - pq$, geometrisch wird.

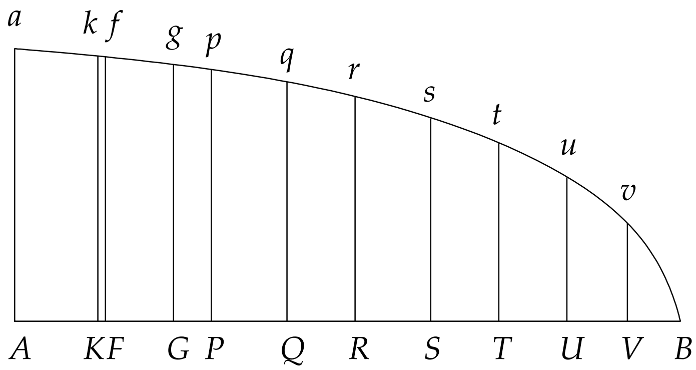

FIG. 6

LÖSUNG

Nachdem die Ordinaten fF, gG, pP, qQ gezogen worden sind, seien die Abszissen $AF = f$, $AG = g$, $AP = p$ und $AQ = q$, dann werde aber vom Scheitel a aus der Bogen ak genommen, welcher den gegebenen Bogen fg um eine geometrische Größe überragt; und nachdem die Abszisse $AK = k$ und der Kürze wegen Folgendes festgelegt worden ist

$$K = aa\sqrt{(aa-kk)(aa-mkk)},$$

$$F = aa\sqrt{(aa-ff)(aa-mff)}, \quad G = aa\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)},$$

$$P = aa\sqrt{(aa-pp)(aa-mpp)} \quad \text{und} \quad Q = aa\sqrt{(aa-qq)(aa-mqq)}$$

wird zuerst sein

$$k = \frac{gF - fG}{a^4 - mffgg} = \frac{a^4(gg-ff)}{gF + fG};$$

daher wird k aufgefunden, so dass gilt

$$\text{Arc. } ak - \text{Arc. fg} = \frac{mkfg}{aa}.$$

Dann werde aber die Abszisse q durch das vorhergehende Problem so bestimmt, dass ist

$$q = \frac{pK + kP}{a^4 - mkkpp} = \frac{a^4(pp-kk)}{pK - kP},$$

und es wird sein

$$\text{Arc. } ak - \text{Arc. } pq = \frac{mkpq}{aa},$$

von welcher Gleichung jene subtrahiert werde; es wird zurückbleiben

$$\text{Arc. } fg - \text{Arc. } pq = \frac{mk}{aa}(pq - fg).$$

Q. E. I.

Korollar 1

§76 Weil k von den Abszissen p und q auf die gleiche Weise abhängt wie von f und g, wird sein

$$k = \frac{qP - fG}{a^4 - mppqq} = \frac{a^4(qq-pp)}{qP + pQ}$$

und daher muss die Abszisse q aus den gegebenen f, g und p mit dieser Gleichung bestimmt werden

$$\frac{gF - fG}{a^4 - mffgg} = \frac{qP - pQ}{a^4 - mppqq}$$

oder auch aus dieser

$$\frac{gg - ff}{gF + fG} = \frac{qq - pp}{qP + pQ};$$

und daher wird gefunden

$$q = \frac{Fgp(pp - gg) + Gfp(pp - ff) - Pfg(gg - ff)}{Ff(pp - gg) + Gg(pp - ff) - Pp(gg - ff)}.$$

KOROLLAR 2

§77 Diese Abszissen p und q hängen auch so von der Abszisse k ab, dass ist

$$\begin{aligned}
aa\sqrt{aa - mqq} + mkp\sqrt{aa - qq} &= a\sqrt{(aa - mkk)(aa - mpp)},\\
aa\sqrt{aa - qq} + kp\sqrt{aa - mqq} &= a\sqrt{(aa - kk)(aa - pp)},\\
aa\sqrt{aa - mpp} - mkq\sqrt{aa - pp} &= a\sqrt{(aa - mkk)(aa - mqq)},\\
aa\sqrt{aa - pp} - kp\sqrt{aa - mpp} &= a\sqrt{(aa - kk)(aa - qq)},\\
aa\sqrt{aa - mkk} - mpq\sqrt{aa - kk} &= a\sqrt{(aa - mpp)(aa - mqq)},\\
aa\sqrt{aa - kk} - pq\sqrt{aa - mkk} &= a\sqrt{(aa - pp)(aa - qq)}.
\end{aligned}$$

KOROLLAR 3

§78 Wenn die Differenz der Bogen fg und pq verschwinden muss, ist es notwendig, dass entweder $k = 0$ oder $pq = fg$ ist. Aber wenn $k = 0$ ist, verschwindet wegen

$$k = \frac{a^4(gg - ff)}{gF + fG} = \frac{a^4(qq - pp)}{qP + pQ}$$

so der Bogen fg wie der Bogen pq. Wenn aber $pf = fg$ ist, wird wegen

$$aa\sqrt{aa-mkk}-mpq\sqrt{aa-kk}=a\sqrt{(aa-mpp)(aa-mqq)},$$
$$aa\sqrt{aa-mkk}-mfg\sqrt{aa-kk}=a\sqrt{(aa-mff)(aa-mqq)}$$

sein

$$(aa-mpp)(aa-mqq)=(aa-mff)(aa-mgg)$$

und wegen

$$aa\sqrt{aa-kk}-pq\sqrt{aa-mkk}=a\sqrt{(aa-pp)(aa-qq)},$$
$$aa\sqrt{aa-kk}-fg\sqrt{aa-mkk}=a\sqrt{(aa-ff)(aa-qq)}$$

wird sein

$$(aa-pp)(aa-qq)=(aa-ff)(aa-gg),$$

woher es klar zu tage tritt, dass entweder $q=g$ und $p=f$ oder $q=f$ und $p=g$ ist; in jedem der beiden Fälle wird der Bogen pq dem Bogen fg nicht nur gleich, sondern dem Bogen fg auch ähnlich.

KOROLLAR 4

§79 Wenn es geschehen könnte, dass der Bogen pq verschwände, während der Bogen fg endlich bleibt, wäre dieser Bogen rektifizierbar. Aber, während der Bogen pq verschwindet, entspringt wegen $q=p$ $k=0$ und daher $f=g$; daher verschwindet auch der Bogen fg.

KOROLLAR 5

§80 Wenn der Bogen pq an dem einen Scheitel B begrenzt sein muss, dass $q=a$ ist, werden wir diese Gleichung haben

$$a^2\sqrt{1-m}=\sqrt{(aa-mkk)(aa-mpp)}$$

oder

$$a^4-aakk-aapp+mkkpp=0 \quad \text{und} \quad kk=\frac{aa(aa-pp)}{aa-mpp}.$$

Dieser Wert liefert in der Gleichung eingesetzt

$$aa\sqrt{aa-kk}-fgaa-mkk=a\sqrt{(aa-ff)(aa-gg)}$$

diese Gleichung

$$\begin{aligned}0=a^6+2(m-1)a^3fgp-a^4(ff+gg+pp)\\+maa(ffgg+ffpp+ggpp)-mffggpp;\end{aligned}$$

dieser Fall geht nämlich auf den Fall des ersten Problems zurück, wenn nur die Scheitel a und B miteinander vertauscht und anstelle der Abszissen die Ordinaten eingesetzt werden.

KOROLLAR 6

§81 Es verdient auch der Fall bemerkt zu werden, in welchem der Punkt p im Punkt g selbst angenommen wird, so dass der Bogen pq dem Bogen fg benachbart wird und ist

$$\text{Arc. } fg-\text{Arc. } gq=\frac{mkg}{aa}(q-f)$$

- wegen $p=g$. Weil also auch $P=G$ ist, wird sein

$$\frac{gF+fG}{gg-ff}=\frac{qG+gQ}{qq-gg},$$

woher die Abszisse q bestimmt wird. Oder es wird nach Nehmen von

$$k=\frac{gF-fG}{a^4-mffgg}=\frac{a^4(gg-ff)}{gF+fG}$$

sein

$$q=\frac{gK+kG}{a^4-mkkgg}=\frac{a^4(gg-kk)}{gK-kG}.$$

Daher wird aber aufgefunden

$$q=\frac{gg}{f}-\frac{a^4(gg-ff)^2}{f}\cdot\frac{a^4-mg^4}{2FGfg+a^4(a^4(ff+gg)-2(m+1)aaffgg-mg^4(gg-3ff))}$$

oder

$$q = \frac{2FGg(a^4 - mg^4) - a^4 f((a^4 + mg^4)^2 - 2(m+1)aagg(a^4 + mg^4) + 4ma^4 g^4)}{a^4((a^4 - mg^4)^2 - 4mffgg(aa - gg)(aa - mgg))}$$

oder

$$q = \frac{2FGg(a^4 - mg^4) - a^4(mg^4 - 2aagg + a^4)(mg^4 - 2maagg + a^4)}{a^4(a^4 - mg^4)^2 - 4ma^4 ffgg(aa - gg)(aa - mgg)}.$$

PROBLEM 3

§82 Nachdem irgendein Ellipsenbogen fg vorgelegt worden ist, von einem gegeben Punkt p aus einen Bogen pqr abzutrennen, der von Doppelten jenes Bogens fg um eine geometrisch angebbare Größe abweicht.

LÖSUNG

Aus den Abszissen der Punkte f und g, $AF = f$, $AG = g$ und deren derivierten Größen F und G werde zuerst diese Abszisse gesucht

$$AK = k = \frac{gF - fG}{a^4 - mffgg} = \frac{a^4(gg - ff)}{gF + fG},$$

dass man hat

$$\text{Arc. } ak - \text{Arc. } = \frac{mkfg}{aa}.$$

Darauf werde zum Punkt p die Abszisse $AP = p$ die Abszisse $AQ = q$ gesucht, dass ist

$$q = \frac{pK + kP}{a^4 - mkkpp} = \frac{a^4(pp - kk)}{pK - KP},$$

während die Großbuchstaben K und P immer Funktionen der Kleinbuchstaben k und p solcher Art bezeichnen, dass, wenn der Kleinbuchstabe x war, der Wert des entsprechenden Großbuchstabens dieser sein wird

$$X = \sqrt{(aa - xx)(aa - mxx)};$$

und es wird sein

$$\text{Arc. } ak - \text{Arc. } pq = \frac{mkpq}{aa},$$

woher wir erhalten

$$\text{Arc. } fg - \text{Arc. } pq = \frac{mk}{aa}(pq - fg).$$

Auf die gleiche Weise, wenn der Punkt q nun als gegeben angesehen wird und aus ihm der Punkt r gesucht wird, dass seine Abszisse diese ist

$$AR = r = \frac{qK + jQ}{a^4 - mkkqq} = \frac{a^4(qq - kk)}{qK - kQ},$$

werden wir haben

$$\text{Arc. } fg - \text{Arc. } qr = \frac{mk}{aa}(qr - fg).$$

Daher werden wir durch Addieren dieser Formeln finden

$$2\text{Arc. } fg - \text{Arc. } pqr = \frac{mk}{aa}(pq + qr - 2fg)$$

und so haben wir vom gegebenen Punkt p aus den Bogen pr abgetrennt, der vom Doppelten des Bogens fg um eine algebraische Größe abweicht. Q. E. I.

Korollar 1

§83 Weil gilt

$$k = \frac{a^4(gg - ff)}{gF + fG} \quad \text{und} \quad k = \frac{a^4(qq - pp)}{qP + pQ}$$

und auf die gleiche Weise auch

$$k = \frac{a^4(rr - qq)}{rQ + qR},$$

werden wir diese Gleichungen haben

$$\frac{gF + fG}{gg - ff} = \frac{qP + pQ}{qq - pp} = \frac{rQ + qR}{rr - qq},$$

woher aus den gegebenen Abszissen f, g und p die zwei übrigen zwei Abszissen q und r bestimmt werden.

KOROLLAR 2

§84 Wenn der Bogen fg beim Scheitel a selbst beginnt, dass $f = 0$ ist, wird $k = g$ sein, woher dann folgt

$$q = \frac{pG + gP}{a^4 - mggpp} = \frac{a^4(pp - gg)}{pG - gP} \quad \text{und} \quad r = \frac{qG + gQ}{a^4 - mggqq} = \frac{a^4(qq - gg)}{qG - gQ}.$$

Und wenn zusätzlich der Punkt p im anderen Scheitel A gegeben ist, dass $p = a$ und $P = 0$ ist, wird sein

$$q = \frac{G}{a^3 - magg} = \frac{a\sqrt{(aa - gg)(aa - mgg)}}{aa - mgg};$$

daher ist

$$aa - qq = \frac{aagg(1 - m)(aa - mgg)}{(aa - mgg)^2} = \frac{(1 - m)aagg}{aa - mgg}$$

und

$$aa - mqq = \frac{a^4(1 - m)(aa - mgg)}{(aa - mgg)^2} = \frac{(1 - m)a^4}{aa - mgg}, \quad \text{woher gilt} \quad Q = \frac{-(1 - m)a^5 g}{aa - mgg},$$

weil die Ordinate auf den unteren Teil Fall muss, und es wird sein

$$r = \frac{a(a^4 - 2aagg + mg^4)}{a^4 - 2maagg + mg^4}.$$

KOROLLAR 3

§85 In diesem Fall, nachdem r (Fig. 7) im oberen Quadranten genommen worden ist, dass, nachdem die Abszisse $AG = g$ gesetzt worden ist, ist

$$AR = r = \frac{a(a^4 - 2aagg + mg^4)}{a^4 - 2maagg + mg^4}$$

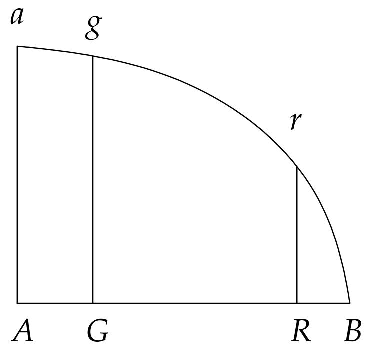

FIG. 7

oder

$$BR = a - r = \frac{2(1-m)a^3gg}{a^4 - 2maagg + mg^4},$$

wird sein

$$2\text{Arc. } ag - \text{Arc. } Br = \text{algebr. Gr.} = \frac{mg}{aa}(aq + rq) = \frac{mgq}{aa}(a + r)$$

und daher

$$2\text{Arc. } ag - \text{Arc. } Br = \frac{2mg(aa-gg)\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)}}{a^4 - 2maagg + mg^4}.$$

KOROLLAR 4

§86 Wenn die Punkte g und r zu einem verschmelzen müssen, dass $r = g$ ist, muss der Wert der gemeinsamen Abszisse $AG = AR = r$ aus dieser Gleichung fünften Grades bestimmt werden

$$mg^5 - mag^4 - 2maag^3 + 2a^3gg + a^4g - a^5 = 0.$$

So wird man, wenn $m = \frac{1}{2}$ und $a = 1$ ist, haben

$$g^5 - g^4 - 2g^3 + 4gg + 2g - 2 = 0.$$

Wenn $m = \frac{4}{3+\sqrt{2}}$ war, ginge $g = \frac{a}{\sqrt{2}}$ hervor und es wäre

$$2\text{Arc. } ag - \text{Arc. } Bg = a\sqrt{\frac{2+2\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}}.$$

PROBLEM 4

§87 Nachdem irgendein Ellipsenbogen fg (Fig. 6) vorgelegt worden ist, den Bogen pqr zu finden, welcher genau doppelt so groß ist.

LÖSUNG

Bei der Lösung des vorhergehenden Problems ist es also zu bewirken, dass ist

$$pq + qr - 2fg = 0,$$

und es wird dann 2Arc. fg = Arc. pqr sein. Hier sind aber wegen des gegebenen Bogens fg in der Ellipse außer den Halbachsen $AB = a$ und $Aa = a\sqrt{1-m}$ die Abszissen $AF = f$ und $AG = g$ mit den derivierten Werten F und G gegeben, woher man suche

$$k = \frac{a^4(gg - ff)}{gF + fG};$$

und zugleich wird sein derivierter Wert dieser sein

$$K = \frac{a^4(ff + gg - kk) - mkkffgg}{2fg}$$

und ebenso wird aus q und r sein

$$K = \frac{a^4(qq + rr - kk) - mkkqqrr}{2qr}.$$

Aber aus der Gleichung $pq + qt = 2fg$ ist $q = \frac{2fg}{p+r}$, woher wir dieser zwei Gleichungen erhalten werden

$$K = \frac{a^4(pp - kk)(p+r)^2 + 4a^4 ffgg - 4mffggkkpp}{4fgg(p+r)},$$

$$K = \frac{a^4(rr - kk)(p+r)^2 + 4a^4 ffgg - 4mffggkkrr}{4fgr(p+r)},$$

aus denen die beiden Abszissen p und r, die den gesuchten Bogen pr bestimmen, bestimmt werden können werden. Daher finden wir also zuerst durch Eliminieren von K und durch Dividieren durch $p - r$

$$a^4pq(p+r)^2+a^4kk(p+r)^2-4a^4ffgg-4mffggkkpr=0.$$

Darauf werden wir durch Addieren jener Gleichungen haben

$$2K=\frac{a^4pr(p+r)^3-a^4kk(p+r)^3+4a^4ffgg(p+r)-4mffggkkpr(p+q)}{4fgpr(p+q)}.$$

Aus jener ist aber

$$a^4(p+q)^2=\frac{4ffgg(a^4+mkkpq)}{pr+kk},$$

welcher Wert in dieser eingesetzt liefert

$$8Kfgpr=\frac{4ffgg(pr-kk)(a^4+mkkpr)}{pr+kk}+4a^4ffgg-4mffggkkpr$$

oder

$$\frac{2Kpr(pr+kk)}{fg}=2a^4pr-2mk^4pr;$$

daher wird Folgendes gefunden

$$pr=\frac{(a^4-mk^4)fg-Kkk}{K}=\frac{ffgg(2a^4-mk^4)-a^4kk(ff+gg-kk)}{a^4(ff+gg-kk)-mffggkk}$$

und

$$(p+q)^2=\frac{4fg}{a^4}(K+mfgkk)=\frac{2(a^4(ff+gg-kk)+2mffggkk)}{a^4}.$$

Also

$$p+r=\frac{\sqrt{2(a^4(ff+gg-kk)+mffggkk)}}{aa}.$$

Weiter

$$r-p=\frac{\sqrt{2(a^8(gg-ff)^2-a^8k^4+2ma^4ffggk^4-mmf^4g^4k^4)}}{aa\sqrt{a^4(ff+gg-kk)-mffggkk}}$$

oder

$$r-p=\frac{\sqrt{2(a^8(gg-ff)^2-k^4(a^4-mffgg)^2)}}{aa\sqrt{a^4(ff+gg-kk)-mffggkk}}.$$

Weil aber ist

$$a^4(gg-ff)=k(gF+fG) \quad \text{und} \quad a^4-mffgg=\frac{gF-fG}{k},$$

wird sein

$$r-p=\frac{2k}{aa}\sqrt{\frac{FG}{K}},$$

woher wegen

$$r+p=\frac{\sqrt{2(a^4(ff+gg-kk)+mffggkk)}}{aa}=\frac{2}{aa}\sqrt{fg(K+mfgkk)}$$

jede der beiden Abszissen p und r bekannt wird. Q. E. I.

KOROLLAR 1

§88 Weil gilt

$$k=\frac{gF-fG}{a^4-mffgg}$$

und

$$K=\frac{(a^4+mffgg)FG-a^6fg(1maa(ff+gg)-(m+1)(a^4+mffgg))}{(a^4-mffgg)^2},$$

wird sein

$$r+p=\frac{2}{aa}\sqrt{\frac{fgFG-ma^4ffgg(ff+gg)+(m+1)a^6ffgg}{a^4-mffgg}},$$

$$r-p=\frac{2(gF-fG)}{aa}\sqrt{\frac{FG}{(a^4+mffgg)(FG+(m+1)a^6fg)-2ma^8fg(ff+gg)}}.$$

KOROLLAR 2

§89 Wenn der gegebene Bogen fg im Scheitel a begrenzt wird, dass $f = 0$ und $F = a^4$ ist, geht $p + r = 0$ und $r - p = 2g$ hervor, woher $p = -g$ und $r = g$ ist; also wird der doppelte Bogen von a aus zu beiden Seiten in gleicher Weise erstreckt und hat dabei zwei dem Bogen fg oder ag gleiche und ähnliche Hälften. Dasselbe passiert, wenn der gegebene Bogen im anderen Scheitel B begrenzt wird, dass $g = a$ und $G = 0$ ist; dann wird nämlich $r - p = 0$ und $r + p = 2f$ und daher $r = p = f$.

KOROLLAR 3

§90 So wie in diesen Fällen, wo der vorgelegte Bogen fg in dem anderen Scheitel begrenzt wird, sein doppelter Bogen per se offenbar ist, so ist, wenn der vorgelegte Bogen in keinem der beiden Scheitel begrenzt wird, die Angabe eines doppelten Bogens höchst schwierig; natürlich kann dieser Bogen geometrisch nicht einmal zweigeteilt werden.

KOROLLAR 4

§91 Daher tritt es auch klar zu tage, wenn umgekehrt ein Bogen pq gegeben ist, dass der Bogen fg gefunden werden kann, der exakt dessen Hälfte sein wird; aber dies wird nur mit aufwendigsten Berechnungen geleistet werden können. Aber wenn der doppelte Bogen pqr dem Ellipsenquadranten gleich oder $p = 0$ und $r = a$ ist, wird ohne Mühe ein seiner Hälfte gleicher Bogen angegeben werden. Zuerst wird nämlich sein

$$q = k \quad k = a\sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - m}}{m}}$$

und so wird so k wie K bekannt, denn es ist

$$K = a^4\sqrt{\frac{1 - m}{m}(1 - \sqrt{1 - m})}.$$

Weiter ist

$$2fg = ak \quad \text{und} \quad ff + gg = \frac{Kk}{a^3} + kk + \frac{mk^4}{4aa}.$$

Aber es ist

$$m = \frac{2aakk - a^4}{k^4} \quad \text{und daher} \quad ff + gg = \frac{2kk + 3aa}{4};$$

daher ist

$$g + f = \frac{1}{2}\sqrt{2kk + 3aa + 4ak}$$

und

$$g - f = \frac{1}{2}\sqrt{2kk + 3aa - 4ak}$$

und daher

$$f = \frac{1}{4}\sqrt{3aa + 4ak + 2kk} - \frac{1}{4}\sqrt{3aa - 4ak + 2kk},$$
$$g = \frac{1}{4}\sqrt{3aa + 4ak + 2kk} + \frac{1}{4}\sqrt{3aa - 4ak + 2kk}.$$

Korollar 5

§92 Wenn die eine Halbachse $Aa = b$ gesetzt wird, während die andere $AB = a$ ist, dass $m = \frac{aa-bb}{aa}$ ist, wird für diesen Fall $k = a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$ sein, nach Einsetzen welches Wertes man haben wird

$$g \pm f = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5a + 3b}{a + b} \pm 4\sqrt{\frac{a}{a+b}}};$$

daher wird

$$f = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5a - 3b - \sqrt{9aa + 14ab + 9bb}}{2(a+b)}},$$
$$g = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5a - 3b + \sqrt{9aa + 14ab + 9bb}}{2(a+b)}}$$

und so werden die Abszissen für jeden der beiden Grenzen des Bogens fg aufgefunden, welcher die Hälfte der ganzen Quadrantenbogens ist.

Korollar 6

§93 In diesem Fall wird also sein

$$ff + gg = \frac{aa(5a+3b)}{4(a+b)} = aa + \frac{aa(a-b)}{4(a+b)}$$

und auch

$$fg = \frac{aa}{2}\sqrt{\frac{a}{a+b}} \quad \text{und} \quad 2fg = aa\sqrt{\frac{a}{a+b}};$$

wenn eines Beispiels wegen $a = 25$ und $b = 119$ ist, wird aufgefunden werden

$$f = \frac{25}{3\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad g = \frac{125}{4\sqrt{2}}.$$

Bemerkung

§94 Daher haben wir also eine Lösung dieses nicht uneleganten Problems erlangt:

Nachdem der Ellipsenquadrant BAa (Fig. 8) vorgelegt worden ist, in ihm geometrisch einen Bogen fg abzutrennen, der der Hälfte des ganzen Quadrantenbogens $afgB$ exakt gleich ist.

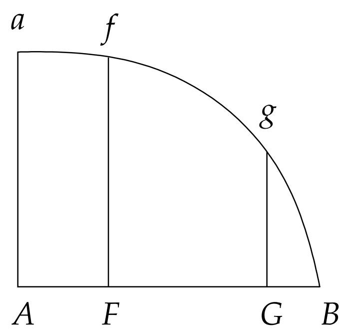

Fig. 8

Nachdem nämlich die Halbachsen $AB = a$ und $Aa = b$ gesetzt worden sind, werden die Abszissen für die gesuchten Punkte f und g diese sein

$$AF = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5a+3b-\sqrt{9aa+14ab+9bb}}{2(a+b)}},$$

$$AG = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5a+3b+\sqrt{9aa+14ab+9bb}}{2(a+b)}},$$

woher für dieselben Punkte diese Ordinaten gefunden werden

$$Ff = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{3a+5b+\sqrt{9aa+14ab+9bb}}{2(a+b)}},$$

$$Gg = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{3a+5b-\sqrt{9aa+14ab+9bb}}{2(a+b)}}.$$

PROBLEM 5

§95 Den gegebenen Ellispenbogen pr (Fig. 6) in die zwei Teile pq und qr zu schneiden, so dass die Differenz dieser Teile $pq - qr$ geometrisch anggebar ist.

LÖSUNG

Nachdem wie im vorhergehenden Problem $AP = p$, $AQ = q$ und $AR = r$ gesetzt worden ist, während die Halbachsen $AB = a$ und $Aa = a\sqrt{1-m}$ sind, werde vom Scheitel a aus der Bogen ak gesucht, dass, nachdem seine Abszisse $AK = k$ gesetzt worden ist, ist

$$k = \frac{qP - pQ}{a^4 - mppqq} = \frac{a^4(qq-pp)}{qP+pQ},$$

und es wird sein

$$\text{Arc. } ak - \text{Arc. } pq = \frac{mkpq}{aa}.$$

Daher sei aber auch

$$k = \frac{rQ - qR}{a^4 - mqqrr} = \frac{a^4(rr-qq)}{rQ+qR};$$

es wird auch sein

$$\text{Arc. } ak - \text{Arc. qr} = \frac{mkqr}{aa}$$

und daher

$$\text{Arc. } pq - \text{Arc. } qr = \frac{mkq}{aa}(r-p).$$

Weil also die Abszissen p und r mit ihren derivierten Werten P und R gegeben sind, wird die Abszisse des gesuchten Punktes q aus dieser Gleichung bestimmt werden müssen

$$\frac{qP+pQ}{qq-pp} = \frac{rQ+qR}{rr-qq}$$

oder

$$Pq(rr-qq) - Rq(qq-pp) = Q(p+r)(qq-pr),$$

welche Gleichung quadriert und dann durch $(qq-pp)(rr-qq)$ dividiert gibt

$$a^4((p+r)^2-2qq) - 2(m+1)aaprqq + mqq(qq(p+r)^2 - 2pprr) = 2qqPR : a^4$$

oder

$$q^4 = \frac{2qq\left(\frac{PR}{a^4} + mpprr + (m+1)aapr + a^4\right) - a^4(p+r)^2}{m(p+r)^2},$$

aus welcher Gleichung der Wert der Abszisse q bestimmt werden können wird. Q. E. I.

Korollar 1

§96 Wenn der ganze Quadrant in zwei Teile, deren Differenz geometrisch sein soll, geteilt werden muss, muss $p=0$ und $r=a$ gesetzt werden; daher wird $P=a^4$ und $R=0$ und deshalb

$$q^4 = \frac{2aaqq-a^4}{m} \quad \text{und} \quad qq = \frac{aa(1-\sqrt{1-m})}{m} \quad \text{und} \quad q = a\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-m}}{m}},$$

welches dieselbe Bestimmung ist, welche wir schon oben im Korollar von Fall 1 von Problem 1 gefunden haben.

KOROLLAR 2

§97 Wenn die eine der Abszissen p und q negativ und der anderen gleich oder $p + r = 0$ ist, wird man sofort entweder $q = 0$ haben oder auch

$$Prr - Pqq - Rqq + Rp = 0 \quad \text{oder} \quad qq = \frac{Prr + Rpp}{P + R} \quad \text{und daher} \quad P + R = 0.$$

Es ist aber offenbar, wenn jede der beiden Ordinaten Pp und Rr positiv war, dass $R = P$ sein wird und dann $q = 0$ gilt.

PROBLEM 9

§98 Wenn die Ellipse $ADBFA$ (Fig. 9) von irgendeinem Durchmesser ECF zweigeteilt worden ist, den halben Umfang EBF so im Punkt M zu schneiden, dass die Differenz der Teile EM und FM geometrisch angebbar ist.

LÖSUNG

Auch wenn dieses Problem im vorhergehenden enthalten ist, kann dennoch die Lösung daraus nicht abgeleitet werden, deshalb weil so $p + r = 0$ wie $P + R = 0$ ist; die Lösung muss also auf eine eigene Weise ausfindig gemacht werden.

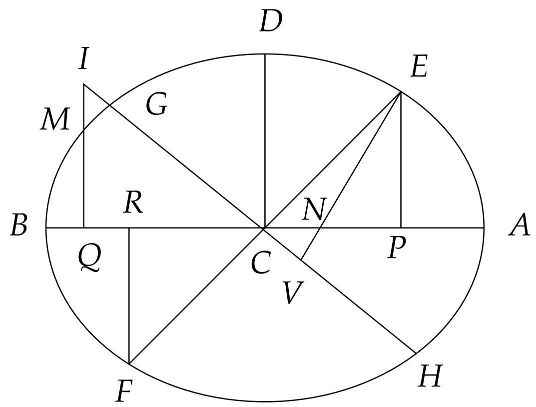

FIG. 9

Nachdem also die Halbachsen $CA = a$ und $CD = b = a\sqrt{1-m}$ gesetzt worden sind, sei für die eine Grenze E die Abszisse des vorgelegten Bogens

$CP = p$; die Ordinate PE wird $= \frac{b}{a}\sqrt{aa-pp}$ sein, welche Koordinaten sich negativ genommen zur anderen Grenze F hin erstrecken; diese seien aber r und $\frac{b}{a}\sqrt{aa-rr}$, so dass $r=-p$ und $\sqrt{aa-rr} = -\sqrt{aa-pp}$ ist. Weil nun, nachdem eine gewisse neue Abszisse k genommen und sie gesuchte $CQ = q$ gesetzt worden ist, aus Korollar 2 von Problem 2 gilt

$$\begin{aligned} aa\sqrt{aa-kk} - pq\sqrt{aa-mkk} &= a\sqrt{(aa-pp)(aa-qq)}, \\ aa\sqrt{aa-kk} - qr\sqrt{aa-mkk} &= a\sqrt{(aa-qq)(aa-rr)}, \end{aligned}$$

geht diese letzte Gleichung wegen

$$r=-p \quad \text{und} \quad \sqrt{aa-rr} = -\sqrt{aa-pp}$$

in diese über

$$aa\sqrt{aa-kk} + pq\sqrt{aa-mkk} = -a\sqrt{(aa-p)(aa-qq)},$$

welche zur ersten addiert

$$2aa\sqrt{aa-kk} = 0 \quad \text{und daher} \quad k=a;$$

dieser Wert gibt in der anderen eingesetzt

$$-pq\sqrt{1-m} = \sqrt{(aa-pp)(aa-qq)}$$

und daher

$$\frac{-q}{\sqrt{aa-qq}} = \frac{\sqrt{aa-pp}}{p\sqrt{1-m}},$$

als logische Konsequenz

$$q = -\frac{a\sqrt{aa-pp}}{\sqrt{aa-mpp}},$$

wo das negative Zeichen anzeigt, dass q im negativen Teil der Abszissen genommen werden muss. Es werde zu E die Normale zur Kurve EN gezogen; es wird sein

$$\frac{PE}{EN} = \frac{\sqrt{aa-pp}}{\sqrt{aa-mpp}}.$$

Also ist $CQ = \frac{a \cdot PE}{EN}$. Es sei weiter GH der konjugierte Durchmesser, welchen die Normale EN in V schneide; es wird gelten

$$\frac{PE}{EN} = \frac{CV}{CN} = \frac{CQ}{CI},$$

nachdem CG bis zum Schittpunkt mit der Ordinate QM in I verlängert worden ist. Daher geht wegen $CQ = \frac{a \cdot CQ}{CI}$ $CI = a = CA$ hervor. Daher folgt diese leichte Konstruktion: Der konjugierte Durchmesser GH werde über G hinaus bis hin zu I fortgesetzt, dass $CI = CA$ wird; von I aus werde nun zur Achse AB das Lot IQ gefällt, welches die Ellipse im gesuchten Punkt M schneiden wird. Aber wegen $k = a$ wird sein

$$\text{Arc. } EM - \text{Arc. } FM = -\frac{2mpq}{a} = \frac{2mp \cdot PE}{EN} = \frac{2CN \cdot CV}{CN} = 2CV$$

- wegen $CN = mp$. Q. E. I.

KOROLLAR 1

§99 Wenn aus denselben zwei Gleichungen durch Eliminieren von k das vorhergehende Problem allgemein aufgelöst wird, wird die folgende Gleichung erhalten werden

$$mq^4(r\sqrt{aa-pp} - p\sqrt{aa-rr})^2 - 2aaqq(aa+mpr)(aa-pr-\sqrt{(aa-pp)(aa-rr)})$$
$$+a^6(\sqrt{aa-pp} - \sqrt{aa-rr})^2 = 0,$$

woher wir durch Auflösung diese Gleichungen erlangen

$$qq = \frac{aa(aa-pr-\sqrt{(aa-pp)(aa-rr)})(aa+mpr \pm \sqrt{(aa-mpp)(aa-mrr)})}{m(r\sqrt{rr-pp} - p\sqrt{aa-rr})^2},$$

$$q = \frac{a\left(\sqrt{\frac{a+r)(a-p)}{2}} - \sqrt{\frac{a-r)(a+p)}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{a+p\sqrt{m})(a+r\sqrt{m})}{2m}} \pm \sqrt{\frac{a-p\sqrt{m})(a-r\sqrt{m})}{2m}}\right)}{r\sqrt{aa-pp} - p\sqrt{aa-rr}}.$$

Korollar 2

§100 Obwohl diese Lösung in der Sache von der Lösung des vorhergehenden Problems abweicht, gibt sie dennoch sofort eine Lösung des vorhergehenden an die Hand. Wenn wir nämlich festlegen

$$r = -p \quad \text{und} \quad \sqrt{aa - rr} = -\sqrt{aa - pp},$$

geht die erste Gleichung des vorhergehenden Korollars in diese Form über

$$-2aaqq(aa - mpp) \cdot 2aa + a^6(2\sqrt{aa - pp})^2 = 0$$

oder

$$qq = \frac{aa(aa - pp)}{aa - mpp}.$$

Korollar 3

§101 Wenn wir aus den ersten zwei Gleichungen q eliminieren, werden wir erhalten

$$q = \frac{aa(\sqrt{aa - pp} - \sqrt{aa - rr})\sqrt{aa - kk}}{(r\sqrt{aa - pp} - p\sqrt{aa - rr})\sqrt{aa - mkk}}$$

und

$$\sqrt{aa - qq} = \frac{a(r - p)\sqrt{aa - kk}}{r\sqrt{aa - pp} - p\sqrt{aa - rr}};$$

daher wird

$$a^4(aa - kk)(\sqrt{aa - pp} - \sqrt{aa - rr})^2 + a^2(aa - kk)(aa - mkk)(r - p)^2$$
$$= aa(aa - mkk)(r\sqrt{aa - pp} - p\sqrt{aa - rr})^2$$

oder

$$mk^4(r - p) = 2kk(aa - mpr)(aa - pr - \sqrt{(aa - pp)(aa - rr)})$$
$$- aa(aa - pr - \sqrt{(aa - pp)(aa - rr)})^2,$$

woher wird

$$kk = \frac{(aa - pr - \sqrt{(aa-pp)(aa-rr)})(aa - mpr - \sqrt{(aa-mpp)(aa-mrr)})}{m(r-p)^2},$$

und daher wird erschlossen

$$k = \frac{\left(\sqrt{\frac{(a+r)(a-p)}{2}} - \sqrt{\frac{(a-r)(a+p)}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{(a+r\sqrt{m})(a-p\sqrt{m})}{2m}} - \sqrt{\frac{(a-r\sqrt{m})(a+p\sqrt{m})}{2m}}\right)}{r-p}.$$

KOROLLAR 4

§102 Daher wird sein

$$kq = \frac{aa(aa - pr - \sqrt{(aa-pp)(aa-rr)})(\sqrt{aa-mpp} - \sqrt{aa-mrr})}{m(r-p)(r\sqrt{aa-pp} - p\sqrt{aa-rr}}.$$

Daher, weil die Differenz der Bogen pq und $qr = \frac{mkq}{aa}(r-p)$ ist, werden wir allgemein haben

$$\text{Arc. } pq - \text{Arc. } qr = \frac{(aa - pr - \sqrt{(aa-pp)(aa-rr)})(\sqrt{aa-mpp} - \sqrt{aa-mrr})}{r\sqrt{aa-pp} - p\sqrt{aa-rr}},$$

wenn freilich der Punkt p aus Korollar 1 bestimmt wird. Es wird also sein

$$\text{Arc. } pq - \text{Arc. } qr = \frac{(\sqrt{aa-pp} - \sqrt{aa-rr})(\sqrt{aa-mpp} - \sqrt{aa-mrr})}{r+p}$$

und

$$q = \frac{\left(\sqrt{\frac{(a+r)(a+p)}{2}} - \sqrt{\frac{(a-r)(a-p)}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{(a+p\sqrt{m})(a+r\sqrt{m})}{2m}} - \sqrt{\frac{(a-p\sqrt{m})(a-r\sqrt{m})}{2m}}\right)}{p+r}.$$

Problem 7

§103 Nachdem irgendein Ellipsenbogen fg (Fig. 6) vorgelegt worden ist, vom gegebenen Punkt p aus den Bogen $pqrs$ abzutrennen, der vom Dreifachen jenes Bogens fg um eine geometrisch angebbare Größe abweicht.

Lösung

Es seien wie bisher die Abszissen der gegebenen Punkte f, g und p $AF = f$, $AG = g$, $AP = p$ und es werde zuerst der Bogen ak gesucht, dessen Abszisse diese sei

$$AK = k = \frac{gF - fG}{a^4 - mffgg} = \frac{a^4(pp - ff)}{gF + fG},$$

dass gilt

$$\text{Arc. } ak - \text{Arc. } fg = \frac{mkfg}{aa}.$$

Dann werde ein Punkt q gesucht, dass gilt

$$AQ = q = \frac{pK + kP}{a^4 - mkkpp} = \frac{a^4(pp - kk)}{pK - kP}$$

und daher

$$Q = \frac{a^4(qq - pp) - kk(a^4 - mppqq)}{2kp} = \frac{pq(qq - pp)K - kq(qq - kk)P}{kp(pp - kk)},$$

und es wird sein

$$\text{Arc. } fg - \text{Arc. } pq = \frac{mk}{aa}(pq - fg).$$

Auf die gleiche Weise werde weiter der Punkt r gesucht, dass ist

$$AR = r = \frac{qK + kQ}{aa - mkkqq} = \frac{a^4(qq - kk)}{qK - kQ}$$

und

$$R = \frac{a^4(rr - qq) - kk(a^4 - mqqrr)}{2kq} = \frac{qr(rr - qq)K - kr(rr - kk)Q}{kq(qq - kk)},$$

und weil gilt

$$\text{Arc. } fg - \text{Arc. } qr = \frac{mk}{aa}(qr - fg),$$

wird sein

$$2\text{Arc. } fg - \text{Arc. } pqr = \frac{mk}{aa}(pq + qr - 2fg).$$

Daher wollen wir auf die gleiche Weise einen Punkt s bestimmen, dass die Abszisse diese ist

$$S = \frac{a^4(ss - rr) - kk(a^4 - mrrss)}{2kr} = \frac{rs(ss - rr)K - ks(ss - kk)R}{kr(rr - kk)},$$

und weil gelten wird

$$\text{Arc. } fg - \text{Arc. } rs = \frac{mk}{aa}(rs - fg),$$

wird man haben

$$3\text{Arc. } fg - \text{Arc. } pqrs = \frac{mk}{aa}(pq + qr + rs - 3fg).$$

Q. E. I.

KOROLLAR 1

§104 Es ist offenbar, dass, indem auf die gleiche Weise weiter fortgeschritten wird, von einem gegebenen Punkt p aus ein Bogen pt bestimmt werden kann, der vom Vierfachen des gegebenen Bogens fg um eine algebraische Größe abweicht, und dass die Operation auf diese Weise beliebig weit fortgesetzt werden kann.

KOROLLAR 2

§105 Wenn der gegebene Bogen fg dem ganzen Quadranten gleich wird, dass $f = 0$ und $g = a$ und daher $F = a^4$ und $G = 0$ ist, wird $k = a$ und $K = 0$ sein. Daher wird aufgefunden

$$q = \frac{P}{a(aa - mpp)} = a\sqrt{\frac{aa - pp}{aa - mpp}}$$

und auch

$$Q = \frac{-q(qq-aa)}{p(pp-aa)}P = \frac{-(aa-qq)PP}{ap(aa-,pp)(aa-pp)} = -\frac{a^3(aa-qq)}{p};$$

aber es ist

$$aa-qq = \frac{a(1-m)pp}{aa-mpp}, \text{qoher wird} \quad Q = \frac{-(1-m)a^5p}{aa-mpp}.$$

Weiter

$$r = \frac{Q}{a(aa-mqq)} = -p$$

und

$$R = -aa\sqrt{(aa-pp)(aa-mpp)} = -P.$$

Schließlich wird gelten

$$s = \frac{-P}{a(aa-mpp)} = -a\sqrt{\frac{aa-pp}{aa-mpp}} = -q \quad \text{und} \quad S = -Q = \frac{(1-m)a^5p}{aa-mpp}$$

und es wird werden

$$3\text{Arc. } fg - \text{Arc. } pqrs = \frac{m}{a}pq = mp\sqrt{\frac{aa-pp}{aa-mpp}}.$$

KOROLLAR 3

§106 Der Punkt p wird auch so bestimmt werden können, dass wird

$$pq + qr + rs = 3fg,$$

in welchem Fall der Bogen $pqrs$ dem Dreifachen des gegebenen Bogens fg exakt gleich wird. Und so wird weiter ein Bogen gefunden werden können, der zum gegebenen Bogen fg in einem bestimmten anderen vielfachen Verhältnis steht.

Bemerkung

§107 All diese Probleme, welche ich hier für die Ellipse behandelt habe, werden auf die gleiche Weise für die Hyperbel aufgelöst werden können; so wird auch, nachdem irgendein Hyperbelbogen gegeben worden ist, von jeglichem gegebenen Punkt derselben Hyperbel aus ein Bogen abgetrennt werden können, der entweder von jenem Bogen selbst oder von seinem Doppelten oder seinem Dreifachen oder von jeglichem anderen Vielfachen um eine geometrisch angebbare Größe abweicht. Des Weiteren wird sich dieser Punkt auch so annehmen lassen, dass die Differenz gänzlich ins Nichts übergeht, in welchem Fall, nachdem irgendein Hyperbelbogen gegeben worden ist, ein anderer Bogen abgegeben werden können wird, der entweder seinem Doppelten oder Dreifachen oder jeglichem anderen Vielfachen exakt gleich ist. Daher ist es klar, wenn, nachdem ein Bogen vorgelegt worden ist, ein anderer Bogen gefunden worden ist, der zu jenem in einem Verhältnis von μ zu 1 stehe, und auf auf die gleiche Weise ein anderer Bogen gesucht wird, der zu demselben in einem Verhältnis von n zu 1 stehe, dass man dann auf diese Weise zwei Hyperbelbogen hat, die in einem Verhältnis von μ zu ν zueinander stehen, und so werden auf unendlich viele Weisen zwei Bogen dargeboten werden können, die in einem beliebigen Zahlenverhältnis zueinander stehen. Und daher werden Probleme von dieser Art nicht nur für die Hyperbel aufgelöst werden können, sondern für ganz und gar alle anderen Kurven, die so beschaffen sind, dass der Bogen, der der Abszisse oder irgendeiner anderen variablen geraden Linie x entspricht, in dieser Formel enthalten ist

$$\int \frac{dx(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}xx + \mathfrak{C}x^4)}{\sqrt{A + Cxx + Ex^4}},$$

welche auch durch die anfangs angegeben Regeln so weiter ausgedehnt werden kann, dass sie auf diese Form zurückgeführt wird

$$\int \frac{dx(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}xx + \mathfrak{C}x^4 + \mathfrak{D}x^6 + \mathfrak{E}x^8 + \text{etc.})}{\sqrt{A + Cxx + Ex^4}};$$

aber ich glaube, dass sich im Augenblick weder mit der Hyperbel noch mit anderen Kurven dieses Geschlechts länger aufzuhalten ist.