Bemerkung über die wunderbare Relation zwischen der Reihe der direkten und reziproken Potenzen (E352)*

Leonhard Euler

§1 Die Relation, die ich hier darstellen möchte, betrifft die Summen dieser zwei allgemeinen Reihen:

$$\Theta = 1^m - 2^m + 3^m - 4^m + 5^m - 6^m + 7^m - 8^m + \dots$$
$$\Omega = \frac{1}{1^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \dots$$

Die erste enthält alle positiven Potenzen der natürlichen Zahlen, mit Potenz m, die andere hingegen die negativen Potenzen aller natürlichen Zahlen, hoch n genommen, während jede der beiden Summen mit alternierenden Vorzeichen behaftet ist. Mein Hauptanliegen ist es darzulegen, obgleich diese zwei Reihen vollkommen verschieden sind, dass deren Summen dennoch in einer wunderschönen Beziehung zueinander stehen. Sofern wir also die Summe einer dieser Reihen kennen, so werden wir die Summe der anderen daraus ableiten können. Ich werde darlegen, dass, wenn man die Summe der ersten Reihe kennt, also für die Variable m, wir dann nahezu immer die Summe der anderen Reihe für $n = m + 1$ bestimmen können. Es sollte

*Originaltitel: "Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques", erstmals publiziert in "*Memoires de l'academie des sciences de Berlin 17, 1768, pp. 83 - 106*". Nachdruck in "*Opera Omnia: Series 1, Volume 15, pp. 70 - 90*". Eneström-Nummer E352. Übersetzt von: Alexander Aycock; Textsatz: Josef Blumers angemerkt werden, dass, obgleich ich diese Relation nur für spezielle Fälle beweisen kann, mein Argument von solch einer Sicherheit begleitet ist, dass der Leser es für einen strengen Beweis halten wird.

§2 Für die Reihe erster Gestalt, da ja die Terme unaufhörlich anwachsen, ist es freilich der Wahrheit verträglich, dass wir deren Summe nicht angeben können, wenn wir unter einer Summe den Wert verstehen, zu welchem wir umso näher gelangen, desdo mehr Terme der Reihe wir tatsächlich addieren. Daher, wenn die Summe dieser Reihe $1-2+3-4+5-6\ldots$ gesagt wird $\frac{1}{4}$ zu sein, mag es widersprüchlich erscheinen. Denn durch das Addieren von 100 Terme der Reihe erhalten wir -50, für 101 Terme hingegen $+51$, was im höchsten Maße von $\frac{1}{4}$ verschieden ist und auch noch größer wird, wenn die Anzahl der Terme erhöht wird. Jedoch habe ich bereits vor einiger Zeit bemerkt, dass es von Nöten ist, dem Wort Summe eine Bedeutung im weiteren Sinne zuzuschreiben. Wir wollen unter einer Summe nämlich den Zahlenwert verstehen, oder den analytischen Ausdruck, zu welchem gemäß der Prinzipien der Analysis gelangt wird, welcher dieselbe Reihe hervorbringt, deren Summe wir suchen. Nachdem diese Auffassung also vorausgeschickt worden ist, so besteht kein weiterer Zweifel, dass die Summe der Reihe $1-2+3-4+5-6\ldots$ in der Tat $\frac{1}{4}$ ist; denn sie entspringt aus der Entwicklung der Formel $\frac{1}{(1+1)^2}$, deren Wert unbestreitbar $\frac{1}{4}$ ist. Diese Anschauung wird besser erkannt, indem diese allgemeine Reihe betrachtet wird:

$$1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-6x^5+\ldots$$

die entspringt, indem der Ausdruck $\frac{1}{(1+x)^2}$ entwickelt wird, welche in der Tat der obigen Reihe für $x=1$ gleich ist.

§3 Es ist nun leicht, das Differentialkalkül zu gebrauchen, um die Summen der obigen Reihen zu finden, wodurch wir die folgenden Summationen erhalten:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \frac{1}{(1+x)},$$
$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots = \frac{1}{(1+x)^2},$$
$$1 - 2^2x + 3^2x^2 - 4^2x^3 + \ldots = \frac{1}{(1+x)^3},$$
$$1 - 2^3x + 3^3x^2 - 4^3x^3 + \ldots = \frac{1-4x+xx}{(1+x)^4},$$
$$1 - 2^4x + 3^4x^2 - 4^4x^3 + \ldots = \frac{1-11x+11xx-x^3}{(1+x)^5},$$
$$1 - 2^5x + 3^5x^2 - 4^5x^3 + \ldots = \frac{1-26x+66xx-26x^3+x^4}{(1+x)^6},$$
$$1 - 2^6x + 3^6x^2 - 4^6x^3 + \ldots = \frac{1-57x+302xx-302x^3+57x^4-x^5}{(1+x)^7}$$
$$\ldots.$$

Wir erlangen die Reihen der ersten Gestalt, indem wir $x = 1$ setzen, und erhalten die folgenden Summen:

$$1 - 2^0 + 3^0 - 4^0 + 5^0 - 6^0 + \ldots = \frac{1}{2}$$
$$1 - 2^1 + 3^1 - 4^1 + 5^1 - 6^1 + \ldots = \frac{1}{4}$$
$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \ldots = 0$$
$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + \ldots = -\frac{2}{16}$$
$$1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + \ldots = 0$$
$$1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5 + \ldots = +\frac{16}{64}$$
$$1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + 5^6 - 6^6 + \ldots = 0$$
$$1 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + 5^7 - 6^7 + \ldots = -\frac{272}{256}$$
$$1 - 2^8 + 3^8 - 4^8 + 5^8 - 6^8 + \ldots = 0$$
$$1 - 2^9 + 3^9 - 4^9 + 5^9 - 6^9 + \ldots = +\frac{7936}{1024}$$
$$\ldots$$

§4 Was die Reihen des anderen Geschlechts Ω betrifft, so kennen wir bereits die Summe für den Fall $n = 1$, welche diese ist

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots,$$

deren Summe $\ln 2$ ist. Weiter habe ich zuerst die Summen der reziproken Reihe der Quadrate entdeckt, dann aber auch die Summe für alle geraden Potenzen. Ich habe gezeigt, dass all diese Reihen von π abhängen, wobei dies die Peripherie des Kreises mit Durchmesser $= 1$ meint.

Ich habe die folgenden Summen für diese Reihen gefunden

$$\begin{array}{rl|l}
\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots & = A\pi^2 & A = \frac{1}{6}, \\
\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots & = B\pi^4 & B = \frac{2}{5}A^2, \\
\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \dots & = C\pi^6 & C = \frac{4}{7}AB, \\
\frac{1}{1^8} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \dots & = D\pi^8 & D = \frac{4}{9}AC + \frac{2}{9}B^2, \\
\frac{1}{1^{10}} + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \dots & = E\pi^{10} & E = \frac{4}{11}AD + \frac{4}{11}BC, \\
 & \dots & \dots
\end{array}$$

woraus ich die Summen unserer Reihen des zweiten Types, also mit alternierenden Vorzeichen, berechnet habe

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \dots &= \frac{2-1}{2}A\pi^2 \\
1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{6^4} + \dots &= \frac{2^3-1}{2^3}B\pi^4 \\
1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} - \frac{1}{6^6} + \dots &= \frac{2^5-1}{2^5}C\pi^6 \\
1 - \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} - \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} - \frac{1}{6^8} + \dots &= \frac{2^7-1}{2^7}D\pi^8 \\
1 - \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} - \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} - \frac{1}{6^{10}} + \dots &= \frac{2^9-1}{2^9}E\pi^{10} \\
1 - \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} - \frac{1}{4^{12}} + \frac{1}{5^{12}} - \frac{1}{6^{12}} + \dots &= \frac{2^{11}-1}{2^{11}}F\pi^{12} \\
&\dots.
\end{aligned}$$

Jedenfalls habe ich in den Fällen, in denen n eine ungerade Zahl ist, deren Summe vergebens zu finden versucht. Dennoch ist es gewiss, dass sie nicht in gleicher Weise von den Potenzen von π abhängen. Vielleicht werden die folgenden Bemerkungen ein wenig Licht darauf werfen.

§5 Weil die Zahlen $A, B, C, D, \ldots$ von größter Bedeutung bei diesem Unterfangen sind, so möchte ich sie zuerst so weit auflisten, wie ich sie errechnet habe.

$$A = \frac{2^0 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad B = \frac{2^2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdots 5 \cdot 3}, \quad C = \frac{2^4 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdots 7 \cdot 3},$$
$$D = \frac{2^6 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdots 9 \cdot 5}, \quad E = \frac{2^8 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdots 11 \cdot 3}, \quad F = \frac{2^{10} \cdot 691}{1 \cdot 2 \cdots 13 \cdot 105},$$
$$G = \frac{2^{12} \cdot 35}{1 \cdot 2 \cdots 15 \cdot 1}, \quad H = \frac{2^{14} \cdot 3617}{1 \cdot 2 \cdots 17 \cdot 15}, \quad I = \frac{2^{16} \cdot 43867}{1 \cdot 2 \cdots 19 \cdot 21},$$
$$K = \frac{2^{18} \cdot 1222277}{1 \cdot 2 \cdots 21 \cdot 55}, \quad L = \frac{2^{20} \cdot 854513}{1 \cdot 2 \cdots 23 \cdot 3}, \quad M = \frac{2^{22} \cdot 1181820455}{1 \cdot 2 \cdots 25 \cdot 273},$$
$$N = \frac{2^{24} \cdot 76977927}{1 \cdot 2 \cdots 27 \cdot 1}, \quad O = \frac{2^{26} \cdot 23749461029}{1 \cdot 2 \cdots 29 \cdot 15}, \quad P = \frac{2^{28} \cdot 8615841276005}{1 \cdot 2 \cdots 31 \cdot 231},$$
$$Q = \frac{2^{30} \cdot 84802531453387}{1 \cdot 2 \cdots 33 \cdot 85}, \quad R = \frac{2^{32} \cdot 90219075042845}{1 \cdot 2 \cdots 35 \cdot 3}$$

§6 Die Summation der Reihen der ersten Gattung beinhaltet in den Fällen, in denen die Variable m eine ungerade Zahl ist, ebenfalls dieselben Zahlen $A, B, C, D, \ldots$. Wir rufen uns in Erinnerung, dass , sofern diese Variable eine gerade Zahl ist, die Summe gleich Null wird. So sollten wir eine Methode gebrauchen, die diese schöne Abhängigkeit aufzeigt. Um also zu diesem Beweis zu gelangen, ist die allgemeine Methode zu gebrauchen, die ich einst mitgeteilt habe, und die dazu dient, die Summen aus dem allgemeinen Term zu bestimmen. Es sei X eine Funktion von x und werde mit $X = f : x$ dargestellt. Wir wollen nun diese unendliche Reihe betrachten

$$f : x + f : (x + \alpha) + f : (x + 2\alpha) + f : (x + 3\alpha) + f : (x + 4\alpha) + \ldots,$$

wo also die folgenden Terme Funktionen von $(x + \alpha), (x + 2\alpha), (x + 3\alpha), \ldots$ sind. Wir wollen die Summe dieser Reihe S nennen, die also auch eine Funktion von x ist. Setzen wir $(x + \alpha)$ anstelle von x, so wird daraus

$$S + \frac{\alpha dS}{1dx} + \frac{\alpha^2 ddS}{1 \cdot 2dx^2} + \frac{\alpha^3 d^3 S}{1 \cdot 2 \cdot 3dx^3} + \frac{\alpha^4 d^4 S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4dx^4} + \ldots.$$

Dieser Ausdruck ist also die Summe der Reihe

$$f : (x + \alpha) + f : (x + 2\alpha) + f : (x + 3\alpha) + f : (x + 4\alpha) + \ldots$$

und ist $S - f:x = S - X$ gleich, so dass gilt

$$-X = \frac{\alpha dS}{1dx} + \frac{\alpha^2 ddS}{1 \cdot 2dx^2} + \frac{\alpha^3 d^3 S}{1 \cdot 2 \cdot 3dx^3} + \frac{\alpha^4 d^4 S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4dx^4} + \ldots.$$

Daraus habe ich dann freilich diese Formel deriviert

$$S = -\frac{1}{\alpha}\int Xdx + \frac{1}{2}X - \frac{\alpha AdX}{2dx} + \frac{\alpha^3 Bd^3 X}{2^3 dx^3} - \frac{\alpha^5 Cd^5 X}{2^5 dx^5} + \ldots,$$

wo $A, B, C, \ldots$ die oben aufgelisteten Zahlen sind. Damit sind wir bei der verlangten Summe S angelangt, indem wir das Integral $\int Xdx$ und die Ableitung jeder Ordnung der Funktion X zu Hilfe genommen haben.

§7 Um nun die alternierenden Vorzeichen zu erlangen, wollen wir 2α anstelle von α schreiben, damit erhalten wir die Summation:

$$\begin{aligned} &f:x + f:(x+2\alpha) + f:(x+4\alpha) + \ldots \\ = &-\frac{1}{2\alpha}\int Xdx + \frac{1}{2}X - \frac{\alpha AdX}{dx} + \frac{\alpha^3 Bd^3 X}{dx^3} - \frac{\alpha^5 Cd^5 X}{dx^5} + \ldots \end{aligned}$$

und indem das Doppelte dieser von der vorhergehenden abgezogen wird, bekommen wir

$$\begin{aligned} &f:x - f:(x+\alpha) + f:(x+2\alpha) - f:(x+3\alpha) + f:(x+4\alpha) - \ldots \\ = &\frac{1}{2}X - \frac{(2^2-1)\,\alpha AdX}{2dx} + \frac{(2^4-1)\,\alpha^3 Bd^3 X}{2^3 dx^3} - \frac{(2^6-1)\,\alpha^5 Cd^5 X}{2^5 dx^5} + \ldots, \end{aligned}$$

wo der Term, der das Integral $\int Xdx$ enthält, verschwunden ist. Wir wollen nun zu unserem Ziel voranschreiten und setzen $f:x = X = x^m$, und erhalten die folgende Summe der Reihe:

$$\begin{aligned} &x^m - (x+\alpha)^m + (x+2\alpha)^m - (x+3\alpha)^m + (x+4\alpha)^m - \ldots \\ = &\frac{1}{2}x^m - \frac{(2^2-1)\,m\alpha Ax^{m-1}}{2} + \frac{(2^4-1)\,m(m-1)(m-2)\alpha^3 Bx^{m-3}}{2^3} \\ &- \frac{(2^6-1)\,m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)\alpha^5 Cx^{m-5}}{2^5} \\ &+ \frac{(2^8-1)\,m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)\alpha^7 Dx^{m-7}}{2^7} \\ &- \ldots, \end{aligned}$$

welche nur eine endliche Anzahl von Terme umfasst, wenn die Variable m eine positive Zahl ist. Deshalb ergibt sich für $\alpha = 1$ in unserer Reihe der ersten Gestalt

$$\begin{aligned}
&x^m - (x+1)^m + (x+2)^m - (x+3)^m + (x+4)^m - (x+5)^m + \dots \\
=&\frac{1}{2}x^m - \frac{m}{2}\left(2^2-1\right)Ax^{m-1} + \frac{m}{2}\frac{(m-1)}{2}\frac{(m-2)}{2}\left(2^4-1\right)Bx^{m-3} \\
&-\frac{m}{2}\frac{(m-1)}{2}\frac{(m-2)}{2}\frac{(m-3)}{2}\frac{(m-4)}{2}\left(2^6-1\right)Cx^{m-5} \\
&+\frac{m}{2}\frac{(m-1)}{2}\frac{(m-2)}{2}\frac{(m-3)}{2}\frac{(m-4)}{2}\frac{(m-5)}{2}\frac{(m-6)}{2}\left(2^8-1\right)Dx^{m-7} \\
&-\dots.
\end{aligned}$$

§8 Nun haben wir bloß $x = 1$ zu setzen, um die allgemeine Summe all unserer Reihen der ersten Gattung zu erlangen. Es ist jedoch leichter, die Summe zu finden, wenn $x = 0$ gesetzt wird, wobei wir erhalten.

$$0^m - 1^m + 2^m - 3^m + 4^m - 5^m + 6^m - 7^m + \dots,$$

welches gerade das Negative der Reihe ist, die wir suchen. Indem $x = 0$ gesetzt wird, verschwinden alle Zahlen, außer einer einzigen, nämlich die, wo die Potenz von x Null ist. Dies tritt auf, immer wenn m eine ungerade Zahl ist, denn wenn es gerade ist, verschwinden alle Glieder und die Summe dieser Reihe vereinfacht sicht zu Null. Deshalb finden wir durch Nehmen des Negativen dieser Summen folgendes

$$
\begin{array}{l|lllllll}
m=0 & 1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +\dots = 1, \\
m=1 & 1 & -2 & +3 & -4 & +5 & -6 & +\dots = +1\frac{(2^2-1)}{2}A, \\
m=2 & 1 & -2^2 & +3^2 & -4^2 & +5^2 & -6^2 & +\dots = 0, \\
m=3 & 1 & -2^3 & +3^3 & -4^3 & +5^3 & -6^3 & +\dots = -1\cdot 2\cdot 3\frac{(2^4-1)}{2^3}B, \\
m=4 & 1 & -2^4 & +3^4 & -4^4 & +5^4 & -6^4 & +\dots = 0, \\
m=5 & 1 & -2^5 & +3^5 & -4^5 & +5^5 & -6^5 & +\dots = +1\cdot 2\cdots 5\frac{(2^6-1)}{2^5}C, \\
m=6 & 1 & -2^6 & +3^6 & -4^6 & +5^6 & -6^6 & +\dots = 0, \\
m=7 & 1 & -2^7 & +3^7 & -4^7 & +5^7 & -6^7 & +\dots = -1\cdot 2\cdots 7\frac{(2^8-1)}{2^7}D, \\
m=8 & 1 & -2^8 & +3^8 & -4^8 & +5^8 & -6^8 & +\dots = 0, \\
m=9 & 1 & -2^9 & +3^9 & -4^9 & +5^9 & -6^9 & +\dots = +1\cdot 2\cdots 9\frac{(2^{10}-1)}{2^9}E, \\
m=10 & 1 & -2^{10} & +3^{10} & -4^{10} & +5^{10} & -6^{10} & +\dots = 0, \\
 & & & & \dots & & &
\end{array}
$$

Nachdem all diese Summen berechnet worden sind, findet man, dass sie dieselben Werte haben wie die, die ich oben aufgelistet habe, aber nun sehen wir deren Verbindung zu den Werten $A, B, C, \dots$.

§9 Wir wollen nun jede dieser Reihen des ersten Geschlechts durch diejenige Reihe der zweiten Gattung dividieren, welche dieselbe der Zahlen $A, B, C, \dots$

enthält, um die folgenden Gleichungen zu erhalten

$$
\begin{aligned}
\frac{1-2+3-4+5-6+\dots}{\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\dots} &= +\frac{1\left(2^2-1\right)}{(2-1)\,\pi^2}, \\
\frac{1-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\dots}{\frac{1}{1^3}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{6^3}+\dots} &= 0, \\
\frac{1-2^3+3^3-4^3+5^3-6^3+\dots}{\frac{1}{1^4}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}-\frac{1}{6^4}+\dots} &= -\frac{1\cdot 2\cdot 3\left(2^4-1\right)}{\left(2^3-1\right)\pi^4}, \\
\frac{1-2^4+3^4-4^4+5^4-6^4+\dots}{\frac{1}{1^5}-\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}-\frac{1}{4^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{6^5}+\dots} &= 0, \\
\frac{1-2^5+3^5-4^5+5^5-6^5+\dots}{\frac{1}{1^6}-\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}-\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}-\frac{1}{6^6}+\dots} &= +\frac{1\cdot 2\cdots 5\left(2^6-1\right)}{\left(2^5-1\right)\pi^6}, \\
\frac{1-2^6+3^6-4^6+5^6-6^6+\dots}{\frac{1}{1^7}-\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}-\frac{1}{4^7}+\frac{1}{5^7}-\frac{1}{6^7}+\dots} &= 0, \\
\frac{1-2^7+3^7-4^7+5^7-6^7+\dots}{\frac{1}{1^8}-\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}-\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}-\frac{1}{6^8}+\dots} &= -\frac{1\cdot 2\cdots 7\left(2^8-1\right)}{\left(2^7-1\right)\pi^8}, \\
\frac{1-2^8+3^8-4^8+5^8-6^8+\dots}{\frac{1}{1^9}-\frac{1}{2^9}+\frac{1}{3^9}-\frac{1}{4^9}+\frac{1}{5^9}-\frac{1}{6^9}+\dots} &= 0, \\
\frac{1-2^9+3^9-4^9+5^9-6^9+\dots}{\frac{1}{1^{10}}-\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}-\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}-\frac{1}{6^{10}}+\dots} &= +\frac{1\cdot 2\cdots 9\left(2^{10}-1\right)}{\left(2^9-1\right)\pi^{10}}, \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Aber die Gleichung, die diesen vorausgeht, ist

$$\frac{1-1+1-1+1-1+\dots}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots} = \frac{1}{2\ln 2},$$

deren Verbindung zu den folgenden völlig im Verborgenen liegt.

§10 Die Betrachtung dieser Gleichung hat mich zu dieser allgemeinen Formel geführt:

$$\frac{1-2^{n-1}+3^{n-1}-4^{n-1}+5^{n-1}-6^{n-1}+\dots}{1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{6^n}+\dots} = N\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\left(2^n-1\right)}{\left(2^{n-1}-1\right)\pi^n},$$

wo wir nun dazu voranschreiten müssen, den Koeffizienten N genau zu bestimmen und zwar in Abhängigkeit von der Variable n. Um dies zu erreichen, wollen wir die Werte des Koeffizienten N betrachten, die der Variable n entsprechen, für die gerade betrachteten Fälle finden wir:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
N	$+1$	0	-1	0	$+1$	0	-1	0	$+1$	...

Weil ja N stets verschwinden muss, wann immer n eine ungerade Zahl ist, und für den Fall $n = 4i + 2$, notwendigerweise $N = +1$ ist, für den Fall $n = 4i$ hingegen $N = -1$ wird, so ist es offenbar, dass wir diesen Bedingungen Genüge leisten, indem wir $N = -\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ nehmen. Dieses Grundes wegen wage ich es, die folgende Vermutung auszusprechen, dass für jede Variable n, die folgende Gleichung stets gilt:

$$\begin{aligned}&\frac{1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + 5^{n-1} - 6^{n-1} + \dots}{1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \dots}\\ =\ &\frac{-1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)\,(2^n - 1)}{(2^{n-1} - 1)\,\pi^n} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Diese Vermutung mag freilich gewagt erscheinen, aber da sie für den Fall, wo n eine ganze Zahl größer als die Einheit ist, gezeigt worden ist, wahr zu sein, so möchte ich diese Relation für den Fall $n = 1$ und dann für $n = 0$ nachweisen. Danach möchte ich zeigen, dass, wenn diese Vermutung für die Fälle, wo n eine positive ganze Zahl ist, gezeigt worden ist, sie auch wahr ist, wenn n eine ganze negative Zahl ist. Schließlich werde ich einige Fälle dartun, wo wir n einen gebrochenen Wert zuteilen.

§11 Sei also $n = 1$ und wir erhalten den Ausdruck

$$\frac{1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots},$$

dessen Wert $\frac{1}{2\ln 2}$ ist. Jedenfalls enthält die vermutete Relation für diesen Fall den Ausdruck $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) = 1$ und $\pi^n = \pi$, während die zwei anderen Ausdrücke $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ und $\left(2^{n-1} - 1\right)$ beide Null sind, während der eine den anderen teilt. Daher schreibe den Ausdruck, den unsere Vermutung gibt, in diesem Fall als:

$$-\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{(2^{n-1} - 1)},$$

wo die Frage nun darin besteht, den Wert des Bruches $\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{(2^{n-1}-1)}$ zu bestimmen, wenn Zähler sowie Nenner Null ist. Wir wollen dafür die Variable n als Variable behandeln, und da das Differential des Zählers $-\frac{\pi dn}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ und das des Nenners $2^{n-1}dn\ln 2$ ist, wird unser Bruch für diesen Fall dasselbe sein wie $-\frac{\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2^{n-1}\ln 2}$. Für $n=1$ reduziert sich das zu $-\frac{\pi}{2\ln 2}$, so dass der Wert, den wir zu finden wünschen, dieser sein wird:

$$-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{(2^{n-1}-1)}=+\frac{1}{2\ln 2}.$$

Also ist unsere Vermutung auch im Fall $n=1$ mit der Wahrheit verträglich, welcher Fall Anfangs vollkommen von der Regel für die übrigen Fälle abzuweichen schien. Dies ist schon eine Art von Beweis für die Allgemeingültigkeit dieser Vermutung, da es ziemlich unwahrscheinlich scheint, dass eine falsche Annahme dieser Probe standhält. Wir dürfen unsere Vermutung also bereits als sehr bestätigt ansehen. Dennoch möchte ich noch mehr überzeugende Argumente anführen.

§12 Sei $n=0$, und wir werden nun diesen Ausdruck zu betrachten haben

$$\frac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots}{1-1+1-1+1-1+\dots}$$

dessen Wert offenbar gleich $2\ln 2$ ist. Unsere Vermutung gibt uns freilich die Ausdrücke $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)=1$ und $\pi^n=1$, sowie $2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\,(2^n-1)$. Der Faktor $1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)$ ist unendlich und der andere Ausdruck (2^n-1) ist Null, woraus wir erkennen, dass dies unsere Vermutung auch in diesem Fall nicht widerspricht. Aber, um zu dem Beweis voranzuschreiten, bemerke ich, dass gilt:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)=\frac{1}{n}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$$

und im Fall $n=0$ haben wir $1\cdot 2\cdots n=1$. Daher ist in diesem Fall $1\cdot 2\cdots(n-1)=\frac{1}{n}$, und der Wert aus unserer Vermutung ist dann $\frac{2(2^n-1)}{n}$, wo wir, da Zähler sowie Nenner für $n=0$ verschwinden, nur deren Differentiale einzusehen haben. Daher haben wir den anderen Bruch $\frac{2\cdot 2^n dn\ln 2}{dn}=2\cdot 2^n\ln 2$, der dem für den Fall $n=0$ gleichwertig ist. Dies gibt uns nun denselben Wert $2\ln 2$, den die Natur der Reihe erfordert. Dies ist also eine weitere Bestätigung, die mit der vorhergehenden verbunden uns einen vollständigeren Beweis unserer Vermutung geben wird. Dennoch haben wir keinen direkten Beweis gegeben, der auf einmal alle möglichen Fälle in sich umfasst.

§13 Da unsere Vermutung nun für alle Fälle bewiesen worden ist, in denen n eine positive ganze Zahl ist, so möchte ich nun zeigen, dass sie ebenso wahr ist, wenn wir für n eine beliebige negative ganze Zahl nehmen. In diesen Fällen ist der Wert des Ausdrucks $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)$ unendlich, und dies scheint freilich meiner Vermutung zu widersprechen; dennoch lässt sich dieser Umstand mit einer Rechnung, die ich einst durchgeführt habe, entgegnen. Man gebrauche die Notation $[\lambda]$, um das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \lambda$ darzustellen. Ich habe einst gezeigt, dass stets $[\lambda] \cdot [-\lambda] = \frac{\lambda\pi}{\sin\lambda\pi}$ gilt. Für $n-1 = -m$ oder $n = -m+1$ erhalten wir also den Ausdruck:

$$\begin{aligned} &\frac{1 - 2^{-m} + 3^{-m} - 4^{-m} + 5^{-m} - 6^{-m} + \dots}{1 - 2^{m-1} + 3^{m-1} - 4^{m-1} + 5^{m-1} - 6^{m-1} + \dots} \\ = &\frac{-1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (-m)\left(2^{-m+1} - 1\right)}{\left(2^{-m} - 1\right)\pi^{-m+1}} \cdot \cos\left(\frac{(1-m)\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

woher, da ja $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (-m) = [-m]$ und $[m] \cdot [-m] = \frac{m\pi}{\sin m\pi}$ gilt, wir haben werden

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (-m) = \frac{m\pi}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m \sin m\pi} = \frac{\pi}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1) \sin m\pi}.$$

Da nun $\cos\left(\frac{(1-m)\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)$ ist, nimmt der Ausdruck unserer Vermutung nach diesen Einsetzungen die folgende Form an:

$$\begin{aligned} &-\frac{2\left(2^{m-1} - 1\right)\pi^m}{\left(2^m - 1\right) 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1) \sin m\pi} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \\ = &-\frac{\left(2^{m-1} - 1\right)\pi^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1)\left(2^m - 1\right)\cos\frac{m\pi}{2}}, \end{aligned}$$

wo wir die Gleichung $\sin m\pi = 2\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)$ gebraucht haben. Nun haben wir die gefundene Gleichung nur zu invertieren, indem wir den Nenner nach oben und den Zähler nach unten schreiben, und wir werden diese Gleichung erhalten:

$$\begin{aligned} &\frac{1 - 2^{m-1} + 3^{m-1} - 4^{m-1} + 5^{m-1} - 6^{m-1} + \dots}{1 - 2^{-m} + 3^{-m} - 4^{-m} + 5^{-m} - 6^{-m} + \dots} \\ = &-\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1)\left(2^m - 1\right)}{\left(2^{m-1} - 1\right)\pi^m} \cdot \cos\frac{m\pi}{2}, \end{aligned}$$

wie vermutet worden war. Nun sieht man also deutlich, dass, wenn der vermutete Ausdruck im Fall richtig ist, wo n eine positive Zahl ist, er auch wahr sein wird, wenn n eine negative Zahl ist, da ja $m = -n + 1$ ist.

§14 Man findet einen bemerkenswerten Fall, wenn man $n = \frac{1}{2}$ setzt, der zu diesem Bruch führt

$$\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots},$$

weil dessen Zähler und Nenner gleich sind, ergibt er den Wert 1. Wir haben also den Wert des Ausdrucks zu finden, welchem die Vermutung andeutet, diesem gleich zu sein:

$$-\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{2} - 1\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)\sqrt{\pi}} \cdot \cos\frac{\pi}{4} = +\frac{\left[-\frac{1}{2}\right]\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\left[-\frac{1}{2}\right]}{\sqrt{\pi}}.$$

Ich habe aber bereits an anderer Stelle gezeigt, als ich hypergeometrische Progression 1, $1 \cdot 2$, $1 \cdot 2 \cdot 3$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, ... untersucht habe, deren allgemeiner Term also $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = [n]$ ist, dass wir $\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ für $n = \frac{1}{2}$ haben , und da ja $\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\right]$ gilt, ist es ersichtlich, dass $\left[-\frac{1}{2}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ gilt (*muss* $\left[-\frac{1}{2}\right] = \sqrt{\pi}$ *sein*), was unseren Ausdruck in der Tat gleich werden lässt. Es sollte also kein weiterer Zweifel an unserer Vermutung aufkommen, da sie nun nicht nur für alle Fälle bestätigt ist, in denen die Variable n eine ganze Zahl ist, sei sie positiv oder negativ, oder sogar $n = \frac{1}{2}$. Für die anderen Fälle, die gebrochene Zahlen enthalten, die wir anstelle von n einzusetzen wünschen, können wir keinen eigenen Beweis angeben, da ja bis jetzt niemand eine Methode erdacht hat, die Summe der Reihe $1 - 2^n + 3^n - 4^n + 5^n - \dots$ zu bestimmen, wenn n ein Bruch ist. In diesen Fällen müssen wir mit Approximationen zufrieden sein: Wir werden sehen, dass unsere Vermutung richtig bleibt.

§15 Um dies zu erproben, sei $n = \frac{3}{2}$. Weil $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) = \left[\frac{1}{2}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ gilt, sowie $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, muss dieser Bruch

$$\frac{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \sqrt{5} - \sqrt{6} + \dots}{1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} - \frac{1}{6\sqrt{6}} + \dots}$$

dieser Größe gleich sein

$$\frac{2\sqrt{2} - 1}{2\left(2 - \sqrt{2}\right)\pi} = \frac{3 + \sqrt{2}}{2\pi\sqrt{2}} = 0,4967738.$$

Berechnet man aber die ersten neun Terme der Reihe im Zähler, finden wir

$$1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7}-\sqrt{8}+\sqrt{9}=1,9217396662,$$

von welchem wir also folgende Summe $\sqrt{10}-\sqrt{11}+\sqrt{12}-\sqrt{13}+\sqrt{14}-\ldots$. bis ins Unendliche subtrahieren müssen. Nach §7 ist dies

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sqrt{10}-\frac{1\left(2^2-1\right)}{4}\frac{A}{\sqrt{10}}+\frac{1\cdot 1\cdot 3\left(2^4-1\right)}{4^3}\frac{B}{10^2\sqrt{10}}\\&-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\left(2^6-1\right)}{4^5}\frac{C}{10^3\sqrt{10}}+\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\left(2^8-1\right)}{4^7}\frac{D}{10^4\sqrt{10}}-\ldots\\=&\frac{\sqrt{10}}{2}\left(1-\frac{1\cdot 3}{2}\frac{A}{10}+\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 15}{2^5}\frac{B}{10^3}-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 63}{2^9}\frac{C}{10^5}+\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 255}{2^{13}}\frac{D}{10^7}-\ldots\right)\end{aligned}$$

und mit den Werten $A=\frac{1}{6}, B=\frac{1}{90}, C=\frac{1}{945}, D=\frac{1}{9450}, E=\frac{1}{93555}$ errechnen wir für den Ausdruck $0,48750774577\cdot\sqrt{10}$, was ungefähr $1,541610$ *(muss* $1,541634853$ *sein)* ist und für die Reihe im Zähler gibt $1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\sqrt{5}-\sqrt{6}+\cdots=0,380129$ *(muss* $0,380104812$ *sein)*. Für die untere Reihe geben die ersten 9 Terme $0,7821470744$ *(muss* $0,782135824$ *sein)*, wovon die Summe von allen folgenden Werten zu subrahieren ist

$$\frac{1}{20\sqrt{10}}\left(1+\frac{3\cdot 3}{2}\frac{A}{10}-\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 15}{2^5}\frac{B}{10^3}+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 63}{2^9}\frac{C}{10^5}-\ldots\right),$$

was ca. $0,01698880$ gibt, womit die Summe der unendlichen Reihe $0,765158$ *(muss* $0,765147024$ *sein)* sein wird. Nun wollen wir sehen, ob diese Reihe durch jene dividiert, also der Bruch $\frac{0,380129}{0,765158}$, gleich $0,4967738$ ist *(muss* $\frac{0,380104812}{0,765147024}=0,496773561$ *sein)*. Der Unterschied ist derart gering, lediglich 2 Hundert-Tausendstel der Einheit *(muss 2 Zehn-Millionstel sein)*, dass keiner an der Gültigkeit in diesem Fall zweifeln kann.

§16 Weil unsere Vermutung bis zu einem sehr hohen Grad an Sicherheit nachgewiesen worden ist, dass an ihrer Gültigkeit kein Zweifel mehr besteht, wenn n ein Bruch ist, wollen wir unser Ergebnis für den Fall auflisten, in dem

n ein Bruch der Form $\frac{2i+1}{2}$ ist

$$\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\ldots}{1-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{4\sqrt{4}}+\ldots}=+\frac{1\left(2\sqrt{2}-1\right)}{2^1\left(2-\sqrt{2}\right)\pi},$$

$$\frac{1-2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-4\sqrt{4}+\ldots}{1-\frac{1}{2^2\sqrt{2}}+\frac{1}{3^2\sqrt{3}}-\frac{1}{4^2\sqrt{4}}+\ldots}=+\frac{1\cdot 3\left(4\sqrt{2}-1\right)}{2^2\left(4-\sqrt{2}\right)\pi^2},$$

$$\frac{1-2^2\sqrt{2}+3^2\sqrt{3}-4^2\sqrt{4}+\ldots}{1-\frac{1}{2^3\sqrt{2}}+\frac{1}{3^3\sqrt{3}}-\frac{1}{4^3\sqrt{4}}+\ldots}=-\frac{1\cdot 3\cdot 5\left(8\sqrt{2}-1\right)}{2^3\left(8-\sqrt{2}\right)\pi^3},$$

$$\frac{1-2^3\sqrt{2}+3^3\sqrt{3}-4^3\sqrt{4}+\ldots}{1-\frac{1}{2^4\sqrt{2}}+\frac{1}{3^4\sqrt{3}}-\frac{1}{4^4\sqrt{4}}+\ldots}=-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\left(16\sqrt{2}-1\right)}{2^4\left(16-\sqrt{2}\right)\pi^4},$$

$$\frac{1-2^4\sqrt{2}+3^4\sqrt{3}-4^4\sqrt{4}+\ldots}{1-\frac{1}{2^5\sqrt{2}}+\frac{1}{3^5\sqrt{3}}-\frac{1}{4^5\sqrt{4}}+\ldots}=+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\left(32\sqrt{2}-1\right)}{2^5\left(32-\sqrt{2}\right)\pi^5},$$

$$\frac{1-2^5\sqrt{2}+3^5\sqrt{3}-4^5\sqrt{4}+\ldots}{1-\frac{1}{2^6\sqrt{2}}+\frac{1}{3^6\sqrt{3}}-\frac{1}{4^6\sqrt{4}}+\ldots}=+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\left(64\sqrt{2}-1\right)}{2^6\left(64-\sqrt{2}\right)\pi^6},$$

$$\frac{1-2^6\sqrt{2}+3^6\sqrt{3}-4^6\sqrt{4}+\ldots}{1-\frac{1}{2^7\sqrt{2}}+\frac{1}{3^7\sqrt{3}}-\frac{1}{4^7\sqrt{4}}+\ldots}=-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\left(128\sqrt{2}-1\right)}{2^7\left(128-\sqrt{2}\right)\pi^7}.$$

$$\ldots$$

Es sei angemerkt, dass $\frac{2^\lambda\sqrt{2}-1}{2^\lambda-\sqrt{2}}$ auf diesen Ausdruck zurückgeführt werden kann $\frac{\left(2^{2\lambda}-1\right)\sqrt{2}+2^\lambda}{2^{2\lambda}-2}$. Deshalb finden wir für jedes Reihenpaar, sofern wir die Summe für eine gefunden haben, aus dieser die Summe der anderen über eine Relation von π.

§17 Die Summe der reziproken Potenzen

$$1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{6^n}+\ldots$$

betreffend, habe ich bereits bemerkt, dass ihre Summen nur gefunden worden sind, wenn n eine gerade ganze Zahl ist, und für ungerade Zahlen n waren alle meine Bemühungen vergebens. Nachdem also die Summen dieser reziproken in Beziehung zu den direkten gesetzt worden sind, und da wir die Summe von

$$1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + 5^{n-1} - 6^{n-1} + \dots$$

im Allgemeinen kennen, könnten wir erwarten einen Weg zu finden unser Ziel zu erreichen, aber unglücklicherweise ist die direkte Summe für ungerade Zahlen n stets 0. Daher können wir nichts schließen, denn für $n = 2\lambda + 1$ finden wir nach unserer Vermutung

$$\begin{aligned} &1 - \frac{1}{2^{2\lambda+1}} + \frac{1}{3^{2\lambda+1}} - \frac{1}{4^{2\lambda+1}} + \frac{1}{5^{2\lambda+1}} - \dots \\ = &-\frac{\left(2^{2\lambda} - 1\right)\pi^{2\lambda+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2\lambda\,(2^{2\lambda+1} - 1)} \cdot \frac{1 - 2^{2\lambda} + 3^{2\lambda} - 4^{2\lambda} + 5^{2\lambda} - \dots}{\cos\frac{2\lambda+1}{2}\pi}. \end{aligned}$$

In diesem letzten Ausdruck sind der Wert sowohl des Zählers $1^{2\lambda} - 2^{2\lambda} + 3^{2\lambda} - 4^{2\lambda} + 5^{2\lambda} - \dots$ so wie des Nenners $\cos\frac{2\lambda+1}{2}\pi = -\sin\lambda\pi$ beide Null, wenn λ eine ganze Zahl ist. Es ist freilich richtig, dass wir leicht den Wert eines solchen Bruchs finden können, indem wir anstelle von Zähler und Nenner die jeweiligen Differentiale einsetzen; aber unglücklicherweise ist diese Methode hier nicht erfolgreich, wie ich zeigen werde.

§18 Um dies aufzuzeigen, berechnen wir es konkret. Wir finden das Differential des Zählers als

$$2d\lambda\left(1^{2\lambda}\ln 1 - 2^{2\lambda}\ln 2 + 3^{2\lambda}\ln 3 - 4^{2\lambda}\ln 4 + \dots\right)$$

und den des Nenners als $-\pi d\lambda\cos\lambda\pi$. Wir finden für unseren Fall die Summe in dieser Form ausgedrückt

$$\begin{aligned} &1 - \frac{1}{2^{2\lambda+1}} + \frac{1}{3^{2\lambda+1}} - \frac{1}{4^{2\lambda+1}} + \frac{1}{5^{2\lambda+1}} - \dots \\ = &\frac{2\left(2^{2\lambda} - 1\right)\pi^{2\lambda}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2\lambda\,(2^{2\lambda+1} - 1)\cos\lambda\pi} \cdot \left(1^{2\lambda}\ln 1 - 2^{2\lambda}\ln 2 + 3^{2\lambda}\ln 3 - \dots\right). \end{aligned}$$

Setzen wir für λ die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ ein, erhalten wir die folgenden Summationen:

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \ldots = -\frac{2 \cdot 3 \cdot \pi^2 \left(1 \ln 1 - 2^2 \ln 2 + 3^2 \ln 3 - 4^2 \ln 4 + \ldots\right)}{1 \cdot 2 \cdot 7}$$
$$1 - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} - \frac{1}{4^5} + \ldots = +\frac{2 \cdot 15 \cdot \pi^4 \left(1 \ln 1 - 2^4 \ln 2 + 3^4 \ln 3 - 4^4 \ln 4 + \ldots\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 31}$$
$$1 - \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} - \frac{1}{4^7} + \ldots = -\frac{2 \cdot 63 \cdot \pi^6 \left(1 \ln 1 - 2^6 \ln 2 + 3^6 \ln 3 - 4^6 \ln 4 + \ldots\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 6 \cdot 127}$$
$$1 - \frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9} - \frac{1}{4^9} + \ldots = +\frac{2 \cdot 255 \cdot \pi^8 \left(1 \ln 1 - 2^8 \ln 2 + 3^8 \ln 3 - 4^8 \ln 4 + \ldots\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 8 \cdot 511}$$
$$1 - \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{3^{11}} - \frac{1}{4^{11}} + \ldots = -\frac{2 \cdot 1023 \cdot \pi^{10} \left(1 \ln 1 - 2^{10} \ln 2 + 3^{10} \ln 3 - \ldots\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 10 \cdot 2047}$$
$$\ldots$$

Daher ist es notwendig, dass wir die Summen der Reihen dieser Form finden:

$$1^{2\lambda} \ln 1 - 2^{2\lambda} \ln 2 + 3^{2\lambda} \ln 3 - 4^{2\lambda} \ln 4 + \ldots.$$

Aber diese Reihenauswertung ist vielleicht sogar schwieriger als die, die wir zu finden suchen, und ich erkenne keine Methode, die uns zu diesem Ziel führen könnte.

§19 Diese Gleichungen werden ein wenig leichter, wenn man betrachtet, dass die Reihe $1 + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{7^m} + \frac{1}{9^m} + \ldots$ dieser gleich ist

$$\frac{2^m - 1}{2\left(2^{m-1} - 1\right)} \left(1 - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} - \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} - \ldots\right).$$

Die vorhergehenden Methoden gebrauchend, finden wir die allgemeine Summe

$$1 + \frac{1}{3^{2\lambda+1}} + \frac{1}{5^{2\lambda+1}} + \frac{1}{7^{2\lambda+1}} + \frac{1}{9^{2\lambda+1}} + \ldots$$
$$= \frac{\pi^{2\lambda}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2\lambda \cos \lambda\pi} \left(2^{2\lambda} \ln 2 - 3^{2\lambda} \ln 3 + 4^{2\lambda} \ln 4 - 5^{2\lambda} \ln 5 + \ldots\right)$$

und zählen nun die speziellen Fälle auf:

$$1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \ldots = + \frac{\pi^2 \left(2^2 \ln 2 - 3^2 \ln 3 + 4^2 \ln 4 - \ldots\right)}{1 \cdot 2}$$
$$1 + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{7^5} + \ldots = + \frac{\pi^4 \left(2^4 \ln 2 - 3^4 \ln 3 + 4^4 \ln 4 - \ldots\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$
$$1 + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} + \frac{1}{7^7} + \ldots = + \frac{\pi^6 \left(2^6 \ln 2 - 3^6 \ln 3 + 4^6 \ln 4 - \ldots\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$
$$1 + \frac{1}{3^9} + \frac{1}{5^9} + \frac{1}{7^9} + \ldots = + \frac{\pi^8 \left(2^8 \ln 2 - 3^8 \ln 3 + 4^8 \ln 4 - \ldots\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}$$
$$\cdots$$

Hier sollte aber bemerkt werden, dass die allgemeine Summe in diesen zwei letzten Paragraphen nur gültig wird, wenn die Variable λ eine positive ganze Zahl ist, weil sie darauf beruht, dass die Summe der Reihe: $1 - 2^{2\lambda} + 3^{2\lambda} - 4^{2\lambda} + \ldots$ Null ist. Diese Summe ist im Fall $\lambda = 0$ nicht mehr Null, daher können wir für λ nur die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ verwenden. Ich bemerke, dass die Reihe $\ln 2 - \ln 3 + \ln 4 - \ln 5 + \ldots$ die Summe $\frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2}$ hat, was uns Veranlassung gibt, auf einen Erfolg beim Finden der Summe der Reihe, die uns hierher geführt hat, zu hoffen.

§20 In gleicher Weise können wir die Summen dieser zwei Reihen vergleichen

$$1 - 3^{n-1} + 5^{n-1} - 7^{n-1} + \ldots \quad \text{und} \quad 1 - \tfrac{1}{3^n} + \tfrac{1}{5^n} - \tfrac{1}{7^n} + \tfrac{1}{9^n} - \ldots$$

und gelangen so zur ähnlichen Vermutung

$$\frac{1 - 3^{n-1} + 5^{n-1} - 7^{n-1} + \ldots}{1 - 3^{-n} + 5^{-n} - 7^{-n} + \ldots} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot 2^n}{\pi^n} \sin \frac{n\pi}{2},$$

wann immer n eine gerade positive Zahl ist, verschwindet der Zähler der Reihe, und in diesen Fällen wird auch der Sinus des Winkels Null. Also haben wir für $n = 2\lambda$:

$$1 - \frac{1}{3^{2\lambda}} + \frac{1}{5^{2\lambda}} - \frac{1}{7^{2\lambda}} + \cdots = - \frac{\pi^{2\lambda-1} \left(3^{2\lambda-1} \ln 3 - 5^{2\lambda-1} \ln 5 + 7^{2\lambda-1} \ln 7 - \ldots\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2\lambda - 1) 2^{2\lambda-1} \cos \lambda\pi}.$$

Ist n eine positive ganze Zahl, berechnen wir die folgenden Summen:

$$
\begin{aligned}
1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\dots &= +\frac{\pi\left(3\ln 3-5\ln 5+7\ln 7-\dots\right)}{1\cdot 2^1}\\
1-\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}-\frac{1}{7^4}+\dots &= -\frac{\pi^3\left(3^3\ln 3-5^3\ln 5+7^3\ln 7-\dots\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^3}\\
1-\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}-\frac{1}{7^6}+\dots &= +\frac{\pi^5\left(3^5\ln 3-5^5\ln 5+7^5\ln 7-\dots\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 2^5}\\
1-\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}-\frac{1}{7^8}+\dots &= -\frac{\pi^7\left(3^7\ln 3-5^7\ln 5+7^7\ln 7-\dots\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 2^7}\\
1-\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{5^{10}}-\frac{1}{7^{10}}+\dots &= +\frac{\pi^9\left(3^9\ln 3-5^9\ln 5+7^9\ln 7-\dots\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 9\cdot 2^9}\\
&\dots
\end{aligned}
$$

Diese letzte Vermutung enthält einen leichteren Ausdruck als die vorhergehende, deshalb existiert die Hoffnung, dass weitere Entwicklung Erfolg mit sich bringen wird. Einen Beweis zu finden, wird nicht wenig an Erkenntnis für eine große Anzahl anderer Probleme dieser Art mit sich bringen.