Über die Partition von Zahlen in so von der Anzahl wie von der Gattung her gegebene Teile*

Leonhard Euler

§**1** Nachdem ich einst das Problem über die Partition von Zahlen behandelt hatte, in welchem gefragt war, auf wie viele verschiedene Weisen eine gegebene Zahl in zwei oder drei oder vier oder allgemein in so viele Teile, wie es beliebt, geteilt werden kann, habe ich mich hauptsächlich darum gekümmert, dass ich bei seiner Lösung nichts auf Induktion, deren Gebrauch beim Lösen von Problemen dieser Art sehr häufig zu sein pflegt, stütze. Und die Methode, die ich verwendet habe, scheint so beschaffen, dass sie auch auf andere Problem mit gleichem Erfolg angewendet werden kann, was ich hier bei in jenem sehr üblichen Problem, in welchem gefragt wird, auf wie viele Weisen eine gegebene Zahl auf eine gegebene Zahl von Würfeln aufgeteilt werden kann, nachdem es freilich sehr stark verallgemeinert worden ist, zu zeigen beschlossen habe.

§**2** Wannimmer aber gefragt wird, auf wie viele Arten eine gegebene Zahl N aus einer gegebenen Anzahl von n Würfeln entstehen kann, geht die Frage darauf zurück, auf wie viele verschiedene Arten eine gegebene Zahl N in n Teile aufgelöst werden kann, deren einzelne entweder 1 oder 2 oder 3 oder 4 oder 5 oder 6 sind, wenn freilich die Seiten der Würfel mit diesen Zahlen beschriftet sind. Daraus ergibt sich diese sich weiter erstreckende Frage, auf

*Originaltitel: "De partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas", zuerst publiziert in: *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 14* (1770, geschrieben 1768): pp. 168 – 187, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 2, pp. 131 – 147, Eneström Nummer E394, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

wie viele Arten eine gegebene Zahl N in n Teile geteilt werden kann, deren einzelne entweder α oder β oder γ oder δ etc. sind, die Menge welcher Zahlen α, β, γ, δ etc. gleichermaßen gegeben sei, sei diese Menge $= m$, so dass die Teile, in welche die gegebene Zahl aufzulösen ist, so von der Anzahl wie von der Art her gegebenen sind.

§3 Man stelle sich natürlich Würfel von solcher Art vor, die nicht wie gewöhnlich sechs, sondern m Seiten oder Flächen haben, sodass auf den einzelnen die Seiten mit den Zahlen α, β, γ, δ etc. beschriftet sind, und nun wird gefragt, wenn man n solcher Würfel hat, auf wie viele Weisen sie, indem sie geworfen werden, eine gegebene Zahl N ergeben können. Die Würfel könnten auch einander ungleich angenommen werden, sodass die einzelnen eine eigene Anzahl an Seitenflächen haben, welche auch bei dein einzelnen mit eigenen Zahlen beschriftet sind; aber aus dem, was ich über die gewöhnlichen Würfel ausführen werde, wird auch die Lösung dieser sich sehr weit erstreckenden Frage ohne Mühe abgeleitet werden.

§4 Aber die Zahlen, mit denen die Seiten der Würfel beschriftet sind, betrachte ich als Exponenten einer bestimmten Größe x, sodass wir für die gewöhnlichen Würfel diesen Ausdruck haben

$$x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^4 + x^5 + x^6,$$

wo ich jeder Potenz die Einheit als Koeffizienten zuteile, weil ja jeder beliebige mit dem Exponenten gekennzeichnete Zahl gleich leicht fallen kann. Wenn also nun das Quadrat dieses Ausdrucks genommen wird, wird jede Potenz von x nur den Koeffizienten erhalten, welcher anzeigt, auf wie viele Arten die Potenz aus der Multiplikation von zwei Termen dieses Ausdrucks resultieren kann, das heißt, auf wie viele Weisen sein Exponent aus der Addition von zwei Zahlen aus der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6 erzeugt werden kann. Nachdem also das Quadrat unseres Ausdrucks entwickelt worden ist, wenn in ihm der Term Mx^N auftaucht, wird daraus erschlossen, dass die Zahl N durch Werfen von zwei Würfeln auf so viele Weisen hervorgeht, wie der Koeffizient M Einheiten enthält.

§5 In gleicher Weise ist es ersichtlich, wenn der Kubus dieses Ausdrucks $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3$ genommen wird, dass in seiner Entwicklung eine gewisse Potenz x^N sooft auftaucht, auf wie viele Weisen ihr Exponent

N entspringen kann, indem man drei Zahlen aus der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6 etc. addiert; daher, wenn der Koeffizient dieser Potenz M ist und der ganze Term Mx^N ist, schließen wir aus ihm, dass die Zahl N durch Werfen von drei Würfeln auf so viele Arten erzeugt werden kann, wie der Koeffizient M Einheiten enthält. Wenn also allgemein die n-te Potenz unseres Ausdrucks, also $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^n$, genommen wird, wird, nachdem sie nach Potenzen von x entwickelt worden ist, der Term Mx^N lehren, wenn die Anzahl der Würfel $= n$ war, dass durch Werfen von ihnen die Zahl N auf so viele Arten fallen kann, wie der Koeffizient M Einheiten enthält.

§6 Wenn also die Anzahl der Würfel $= n$ war und gefragt wird, auf wie viele Weisen eine gegebene Zahl durch Werfen von Ihnen fallen kann, wird die Frage durch Ausmultiplizieren dieser Formel aufgelöst

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^n;$$

weil ihr erster Term x^n sein wird, der letzte hingegen x^{6n}, wird eine Progression von Termen dieser Art hervorgehen

$$x^n + Ax^{n+1} + Bx^{n+2} + Cx^{n+3} + \cdots + Mx^N + \cdots + x^{6n},$$

von welcher der Term Mx^N zeigen wird, dass die dem Exponenten gleiche Zahl N auf so viele Weisen fallen kann, wie der Koeffizient M Einheiten enthält; daraus wird sich sofort ergeben, dass die Frage nur Geltung haben kann, wenn die vorgelegte Zahl N innerhalb der Grenzen n und $6n$ liegt. Die ganze Aufgabe geht also darauf zurück, dass diese Progression oder die Koeffizienten der einzelnen Terme angegeben werden.

§7 Um diese also zu finden, setze man die zu entwickelnde Formel auf diese Weise dargestellt an

$$x^n(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^n = V,$$

dann setze man aber für dieselbe Entwicklung

$$V = x^n(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \text{etc.})$$

an. Und nach Setzen von $\frac{V}{x^n} = Z$ wird aus der ersten das logarithmische Differential

$$\frac{xdZ}{Zdx}=\frac{nx+2nx^2+3nx^3+4nx^4+5nx^5}{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5}$$
sein. Aber der Wert derselben geht aus der zweiten als

$$\frac{xdZ}{Zdx}=\frac{Ax+2Bx^2+3Cx^3+4Dx^4+5Ex^5+6Fx^6+\text{etc.}}{1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+Ex^5+Fx^6+\text{etc.}}$$
hervor, welche zwei Ausdrücke einander gleich sein müssen, woher die Werte der Koeffizienten bestimmt werden werden.

§8 Nachdem aber diese beiden Ausdrücke gleich gesetzt worden sind, entspringt diese Gleichung

$$\begin{array}{cccccccc}
nx + nAx^2 + & nBx^3 + & nCx^4 + & nDx^5 + & nEx^6 + & nFx^7 + & nGx^8 + \text{etc.} \\
+\ 2n & +\ 2nA & +\ 2nB & +\ 2nC & +\ 2nD & +\ 2nE & +\ 2nF \\
 & +\ 3n & +\ 3nA & +\ 3nB & +\ 3nC & +\ 3nD & +\ 3nE \\
 & & +\ 4n & +\ 4nA & +\ 4nB & +\ 4nC & +\ 4nD \\
 & & & +\ 5n & +\ 5nA & +\ 5nB & +\ 5nC
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
= Ax + 2Bx^2 + & 3Cx^3 + & 4Dx^4 + & 5Ex^5 + & 6Fx^6 + & 7Gx^7 + & 8Hx^8 + \text{etc.}, \\
A & +\ 2B & +\ 3C & +\ 4D & +\ 5E & +\ 6F & +\ 7G \\
 & +\ A & +\ 2B & +\ 3C & +\ 4D & +\ 5E & +\ 6F \\
 & & +\ A & +\ 2B & +\ 3C & +\ 4D & +\ 5E \\
 & & & +\ A & +\ 2B & +\ 3C & +\ 4D \\
 & & & & +\ A & +\ 2B & +\ 3C
\end{array}$$

welche zwei Ausdrücke, weil sie gemäß der einzelnen Terme einander gleich sein müssen, die Werte der einzelnen Koeffizienten an die Hand geben werden.

§9 Daher erhält man aber die folgenden Bestimmungen:

$$\begin{aligned}
A &= n,\\
2B &= (n-1)A + 2n,\\
3C &= (n-2)B + (2n-1)A + 3n,\\
4D &= (n-3)C + (2n-2)B + (3n-1)A + 4n,\\
5E &= (n-4)D + (2n-3)C + (3n-2)B + (4n-1)A + 5n,\\
6F &= (n-5)E + (2n-4)D + (3n-3)C + (4n-2)B + (5n-1)A,\\
7G &= (n-6)F + (2n-5)E + (3n-4)D + (4n-3)C + (5n-2)B,\\
8H &= (n-7)G + (2n-6)F + (3n-5)C + (4n-4)D + (5n-3)C
\end{aligned}$$

etc.

Also wird jeder beliebige Koeffizient durch die fünf vorhergehenden bestimmt, nach Finden von welchen

$$V = x^n + Ax^{n+1} + Bx^{n+2} + Cx^{n+3} + Dx^{n+4} + Ex^{n+5} + \text{etc.}$$

sein wird, und so ist das Problem für n Würfel gelöst.

§10 Wenn von einer beliebigen der obigen Gleichungen die vorhergehenden abgezogen wird, werden die folgenden um vieles einfacheren Bestimmungen erhalten werden:

$$
\begin{aligned}
A &= n,\\
2B &= nA + n,\\
3C &= nB + nA + n,\\
4D &= nC + nB + nA + n,\\
5E &= nD + nC + nB + nA + n,\\
6F &= nE + nD + nC + nB + nA - 5n,\\
7G &= nF + nE + nD + nC + nB - (5n-1)A,\\
8H &= nG + nF + nE + nD + nC - (5n-2)B
\end{aligned}
$$

etc.

Wenn erneut die Differenz genommen würden, würden auf diese Weise diese noch einfacheren Relationen hervorgehen:

$$
\begin{aligned}
2B &= (n+1)A,\\
3C &= (n+2)B,\\
4D &= (n+3)C,\\
5E &= (n+4)D,\\
6F &= (n+5)E - 6n,\\
7G &= (n+6)F - (6n-1)A + 5n,\\
8H &= (n+7)G - (6n-2)B + (5n-1)A,\\
9I &= (n+8)H - (6n-3)C + (5n-2)B,\\
10K &= (n+9)I - (6n-4)D + (5n-3)C
\end{aligned}
$$

etc.

§11 Daher, je nachdem ob die Anzahl der Würfel entweder 2 oder 3 oder 4 war, wird das Fortschreitungsgesetz sein wie folgt,

für zwei	für drei	für vier
$A = 2$	3	4
$2B = 3A$	$4A$	$5A$
$3C = 4B$	$5B$	$6B$
$4D = 5C$	$6C$	$7C$
$5E = 6D$	$7D$	$8D$
$6F = 7E - 12$	$8E - 18$	$9E - 24$
$7G = 8F - 11A + 10$	$9F - 17A + 15$	$10F - 23A + 20$
$8H = 9G - 10B + 9A$	$10G - 16B + 14A$	$11G - 22B + 19A$
$9I = 10H - 9C + 8B$	$11H - 15C + 13B$	$12H - 21C + 18B$
$10K = 11I - 8D + 7C$	$12I - 14D + 12C$	$13I - 20D + 17C$
$11L = 12K - 7E + 6D$	$13K - 13E + 11D$	$14K - 19E + 16D$
$12M = 13L - 6F + 5E$	$14L - 12F + 10E$	$15L - 18F + 15E$
etc.	etc.	etc.

Jeder beliebige Koeffizient wird also durch die drei vorhergehenden bestimmt, wo es besonders bemerkenswert ist, dass sie schließlich verschwinden und die letzten den ersten gleich werden, was sich aus diesem Gesetz weniger erkennen lässt.

§12 Damit wir dieses Gesetz besser verstehen, bezeichne diese Formel

$$(N)^{(n)}$$

die Anzahl der Fälle, in denen die Zahlen N durch n Würfel erzeugt werden kann, sodass gilt

$$(n)^{(n)} = 1, \quad (n+1)^{(n)} = A, \quad (n+2)^{(n)} = B, \quad (n+3)^{(n)} = C,$$
$$(n+4)^{(n)} = D, \cdots (n+9)^{(n)} = I \quad \text{und} \quad (n+10)^{(n)} = K.$$

Daher wird also

$$10(n+10)^{(n)} = (n+9)(n+9)^{(n)} - (6n-4)(n+4)^{(n)} + (5n-3)(n+3)^{(n)}$$

werden, woher man schließt, dass im Allgemeinen

$$\lambda(n+\lambda)^{(n)} = (n+\lambda-1)(n+\lambda-1)^{(n)} - (6n+6-\lambda)(n+\lambda-6)^{(n)}$$
$$+(5n+7-\lambda)(n+\lambda-7)^{(n)}$$

sein wird. Wir wollen nun $n+\lambda = N$ setzen, dass $\lambda = N-n$ ist, und es wird

$$(N)^{(n)} = \frac{(N-1)(N-1)^{(n)} - (7n+6-N)(N-6)^{(n)} + (6n+7-N)(N-7)^{(n)}}{N-n}$$

sein, wo zu bemerken ist, dass immer $(P)^{(n)} = 0$ sein wird, wenn $P < n$ war.

§13 Aber diese Koeffizienten können leichter für jede Anzahl an Würfeln bestimmt werden, wenn diese für die um eine Einheit kleinere Anzahl an Würfeln schon gefunden worden waren. Wenn nämlich

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^n$$
$$= x^n + Ax^{n+1} + Bx^{n+2} + Cx^{n+3} + Dx^{n+4} + \text{etc.}$$

ist und man

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^{n+1}$$
$$= x^{n+1} + A'x^{n+2} + B'x^{n+3} + C'x^{n+4} + D'x^{n+5} + \text{etc.}$$

setzt, wird, weil dieser letzte Ausdruck dem ersten mit $x+x^2+x^3+x^+x^5+x^6$ multipliziert gleich ist,

$A' = A + 1$	daher durch Nehmen der Differenzen
$B' = B + A + 1$	$B' = A' + B$
$C' = C + B + A + 1$	$C' = B' + C$
$D' = D + C + B + A + 1$	$D' = C' + D$
$E' = E + D + C + B + A + 1$	$E' = D' + E$
$F' = F + E + D + C + B + A$	$F' = E' + F - 1$
$G' = G + F + E + D + C + B$	$G' = F' + G - A$
etc.	etc.

§14 Wenn wir also die zuvor eingeführte Bezeichungsweise gebrauchen, entsteht aus der Gleichung $G' = F + G - A$ diese

$$(n+8)^{(n+1)} = (n+7)^{(n+1)} - (n+7)^{(n)} - (n+1)^{(n)},$$

welche im Allgemeinen so dargestellt werden wird

$$(n+1+\lambda)^{(n+1)} = (n+\lambda)^{(n+1)} + (n+\lambda)^{(n)} - (n+\lambda-6)^{(n)}.$$

Wenn nun N für $n+\lambda$ geschrieben wird, wird

$$(N+1)^{(n+1)} = (N)^{(n+1)} + (N)^{(n)} - (N-6)^{(n)}$$

sein, wo zu bemerken ist, solange $N - 6 < n$ war, dass $(N-6)^{(n)} = 0$. Daher ist zugleich klar, dass all diese Zahlen ganz sein werden, was aus dem ersten Gesetz weniger klar erscheint.

Eine Tabelle,

zeigend auf wie viele Weisen eine beliebige Zahl N durch n Würfel fallen kann

N	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0
3	1	2	1	0	0	0	0	0
4	1	3	3	1	0	0	0	0
5	1	4	6	4	1	0	0	0
6	1	5	10	10	5	1	0	0
7	0	6	15	20	35	6	1	0
8	0	5	21	35	70	21	7	1
9	0	4	25	56	126	56	28	8
10	0	3	27	80	205	126	84	36
11	0	2	27	104	305	252	210	120
12	0	1	25	125	420	456	462	330
13	0	0	21	140	540	756	917	792
14	0	0	15	146	651	1161	1667	1708
15	0	0	10	140	735	1666	2807	3368
16	0	0	6	125	780	2247	4417	6147
17	0	0	3	104	780	2856	6538	10480
18	0	0	1	80	735	3431	9142	16808
19	0	0	0	56	651	3906	12117	25488
20	0	0	0	35	540	4221	15267	36688
21	0	0	0	20	420	4332	18327	50288
22	0	0	0	10	305	4221	20993	65808
23	0	0	0	4	205	3906	22967	82384
24	0	0	0	1	126	3431	24017	98813
25	0	0	0	0	70	2856	24017	113688
26	0	0	0	0	35	2247	22967	125588
27	0	0	0	0	15	1666	20993	133288
28	0	0	0	0	5	1161	18327	135954
29	0	0	0	0	1	756	15267	133288
30	0	0	0	0	0	456	12117	125588
31	0	0	0	0	0	252	9142	113688
32	0	0	0	0	0	126	6538	98813
33	0	0	0	0	0	56	4417	82384
34	0	0	0	0	0	21	2807	65808
35	0	0	0	0	0	6	1667	50288
36	0	0	0	0	0	1	917	36688

§15 In diesen Reihen hat also auch die in § 12 gefundene Eigenschaft Geltung; wenn also $n = 6$ war, wird

$$(N)^{(6)} = \frac{(N-1)(N-1)^{(6)} - (48-N)(N-6)^{(6)} + (43-N)(N-7)^{(6)}}{N-6}$$

sein, woher, wenn eines Beispiels wegen $N = 25$ ist,

$$(25)^{(6)} = \frac{24 \cdot (24)^{(6)} - 23 \cdot (19)^{(6)} + 18 \cdot (18)^{(6)}}{19}$$

sein wird; aber es ist $(24)^{(6)} = 3431$, $(19)^{(6)} = 3906$, $(18)^{(6)} = 3431$ und daher

$$(25)^{(6)} = \frac{24 \cdot 3431 - 23 \cdot 3906 + 18 \cdot 3431}{19} = \frac{54264}{19} = 2856,$$

wie es die Tabelle zeigt. Gleichermaßen, wenn $N = 29$ ist, wird

$$(29)^{(6)} = \frac{28 \cdot (28)^{(6)} - 19 \cdot (23)^{(6)} + 14 \cdot (22)^{(6)}}{23}$$

sein; daher wird wegen $(28)^{(6)} = 1161$, $(23)^{(6)} = 3906$ und $(22)^{(6)} = 4221$

$$(29)^{(6)} = \frac{32508 - 74214 + 59094}{23} = \frac{17388}{23} = 756$$

sein.

§16 Aber die Entwicklung der Formel V (§ 7) kann auf eine andere Weise durchgeführt werden, dass jeder beliebige Term absolut angegeben wird und dafür auch die vorhergehenden nicht vonnöten sind. Weil nämlich

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = \frac{1-x^6}{1-x}$$

ist, wird

$$V = \frac{x^n(1-x^6)^n}{(1-x)^n}$$

sein und nach der Entwicklung

$$(1-x^6) = 1 - \frac{n}{1}x^6 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{12} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{18}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{24}-\text{etc.}$$

$$\frac{x^n}{(1-x)^n}=x^n+\frac{n}{1}x^{n+1}+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^{n+2}+\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n+3}$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n+4}+\text{etc.}$$

daher berechnet man, dass gelten wird:

$$
\begin{aligned}
(n+\ \ 0)^{(n)} &= 1,\\
(n+\ \ 1)^{(n)} &= \frac{n}{1},\\
(n+\ \ 2)^{(n)} &= \frac{n(n+1)}{1\cdot 2},\\
(n+\ \ 3)^{(n)} &= \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3},\\
(n+\ \ 4)^{(n)} &= \frac{n(n+1)\cdots(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\\
(n+\ \ 5)^{(n)} &= \frac{n(n+1)\cdots(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},\\
(n+\ \ 6)^{(n)} &= \frac{n(n+1)\cdots(n+5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 6} - \frac{n}{1}1,\\
(n+\ \ 7)^{(n)} &= \frac{n(n+1)\cdots(n+6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 7} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n}{1},\\
(n+\ \ 8)^{(n)} &= \frac{n(n+1)\cdots(n+7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 8} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n(n+1)}{1\cdot 2},\\
(n+\ \ 9)^{(n)} &= \frac{n(n+1)\cdots(n+8)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 9} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3},\\
(n+10)^{(n)} &= \frac{n(n+1)\cdots(n+9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 10} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n(n+1)\cdots(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\\
(n+11)^{(n)} &= \frac{n(n+1)\cdots(n+10)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 11} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n(n+1)\cdots(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},\\
(n+12)^{(n)} &= \frac{n(n+1)\cdots(n+11)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 12} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n(n+1)\cdots(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 6} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot 1,\\
(n+13)^{(n)} &= \frac{n(n+1)\cdots(n+12)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 13} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n(n+1)\cdots(n+6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 7} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{n}{1},\\
&\quad \text{etc.,}
\end{aligned}
$$

woher man im Allgemeinen

$$(n+\lambda)^{(n)}$$
$$= \frac{n(n+1)\cdots(n+\lambda-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\lambda} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n(n+1)\cdots(n+\lambda-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(\lambda-6)} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{n(n+1)\cdots(n+\lambda-13)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(\lambda-12)}$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{n(n+1)\cdots(n+\lambda-19)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(\lambda-18)} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{n(n+1)\cdots(n+\lambda-25)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(\lambda-24)}$$
$$-\text{etc.}$$

erschließt.

§17 Daher kann die Lösung auf Würfel mit einer beliebigen anderen Anzahl an Seiten angewandt werden. Es sei nämlich m die Anzahl der Flächen bei den einzelnen Würfeln, welche mit den Zahlen 1, 2, 3, $\cdots m$ beschriftet seien, aber die Anzahl solcher Würfel sei $= n$, nach Werfen von welchen gefragt wird, auf wie viele Arten ein gegebene Zahl N in n Teile aufgelöst werden kann, welche einzelnen in dieser Zahlenreihe 1, 2, 3, $\cdots m$ enthalten sind; dort ist freilich zu bemerken, dass nicht nur die verschiedenen Partitionen, sondern auch verschiedene Reihenfolgen derselben Teile gezählt werden, wie es bei Würfeln zu passieren pflegt, wo eines Beispiels wegen der Wurf 3, 4 und 4, 3 für verschiedene Fälle gehalten werden.

§18 Wenn also dieses Zeichen $(N)^{(n)}$ die Anzahl der Fälle, in denen die Zahl N durch Werfen von n Würfeln, deren einzelne m Flächen mit den Zahlem 1, 2, 3, $\cdots m$ beschriften sind, erzeugt werden kann, ist zuerst zu bemerken, dass $(n)^{(n)} = 1$ sein wird, und wenn $N < n$ ist, dass $(N)^{(n)} = 0$ ist. Weiter wenn $N = mn$ ist, ist auch $(mn)^{(n)} = 1$, und wenn $N > mn$ ist, wird $(N)^{(n)} = 0$ sein. Schließlich, ob $N = n + \lambda$ oder $N = mn - \lambda$ ist, ist die Anzahl der Fälle dieselbe oder

$$(n+\lambda)^{(n)} = (mn-\lambda)^{(n)}.$$

Aber die letzte Formel liefert

$$(n+\lambda)^{(n)} = \frac{n(n+1)\cdots(n+\lambda-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\lambda} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n(n+1)\cdots(n+\lambda-3m-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(\lambda-m)}$$
$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{n(n+1)\cdots(n+\lambda-2m-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(\lambda-2m)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{n(n+1)\cdots(n+\lambda-3m-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(\lambda-3m)} + \text{etc.}$$

§19 Am leichtesten werden diese Zahlen aber sowohl aus den vorhergehenden als auch aus den Fällen, wo die Anzahl der Würfel um eine Einheit kleiner ist, bestimmt werden. Im Allgemeinen, wenn die Anzahl der Flächen der einzelnen Würfel $= m$ war und sie mit den Zahlen $1, 2, 3, \cdots m$ beschriftet sind, wird nämlich

$$(N+1)^{(n+1)} = (N)^{(n+1)} + (N)^{(n)} - (N-m)^{(n)}$$

oder

$$(N+1)^{(n)} = (N)^{(n)} + (N)^{(n-1)} - (N-m)^{(n-1)}$$

sein. Daher, wenn $n+\lambda$ für $N+1$ geschrieben wird, wird man

$$(n+\lambda)^{(n)} = (n+\lambda-1)^{(n)} + (n+\lambda-1)^{(n-1)} - (n+\lambda-m-1)^{(n-1)}$$

haben. Schließlich hängen für dieselbe Anzahl n an Würfeln diese Zahlen so von den vorhergehenden ab, dass

$$\lambda(n+\lambda)^{(n)} = (n+\lambda-1)(n+\lambda-1)^{(n-1)} - (mn+m-\lambda)(n+\lambda-m-1)^{(n)}$$
$$+(mn-n+m-1-\lambda)(n+\lambda-m-1)^{(n)}$$

ist. Im Übrigen ist bekannt, dass die Summe all dieser Zahlen $= m^n$ ist.

§20 In gleicher Weise kann diese Frage aufgelöst werden, wenn nicht alle Würfel die gleiche Anzahl an Seitenflächen haben. Wir wollen festlegen, dass drei Würfel gegeben sind, der erste ein Hexaeder mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, der zweite ein Oktaeder mit den Zahlen $1, 2, 3, \cdots 8$ und der dritte eine Dodekaeder mit den Zahlen $1, 2, 3, \cdots 12$; wenn nun gesucht wird, auf wie viele Weisen eine gegebene Zahl N fallen kann, entwickle man das Produkt

$$(x+x^2+x^3+\cdots+x^6)(x+x^2+x^3+\cdots+x^8)(x+x^2+x^3+\cdots+x^{12}) = V$$

und der Koeffizient der Potenz x^N wird die Anzahl der Fälle zeigen. Weil nun

$$V = \frac{x^3(1-x^6)(1-x^8)(1-x^{12})}{(1-x)^3}$$

ist, wird durch Ausmultiplizieren des Zählers

$$V = \frac{x^3 - x^9 - x^{11} - x^{15} + x^{17} + x^{21} + x^{23} - x^{29}}{(1-x)^3}$$

sein.

§21 Diesen Zähler multipliziere man mit $\frac{1}{(1-x)^3}$ oder dieser Reihe

$$1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + 21x^5 + 28x^6 + 36x^7 + \text{etc.},$$

deren Koeffizienten die Dreieckszahlen sind; daher, weil die n-te Dreieckszahl $\frac{n(n+1)}{2}$ ist, wird der allgemeine Term dieser Reihe

$$\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1} \quad \text{oder} \quad \frac{(n-1)(n-2)}{2}x^{n-3}$$

sein. Indem nun mit dem Zähler multipliziert, findet man den Koeffizienten der Potenz x^n als

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{(n-7)(n-8)}{2} - \frac{(n-9)(n-10)}{2} - \frac{(n-13)(n-14)}{2}$$
$$+ \frac{(n-15)(n-16)}{2} + \frac{(n-19)(n-20)}{2} + \frac{(n-21)(n-22)}{2} + \frac{(n-27)(n-28)}{2},$$

welcher Ausdruck aber in jedem Fall nicht weiter fortgesetzt werden muss, bis man schließlich zu negativen Faktoren gelangt.

§22 Nachdem aber der Nenner $(1-x)^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$ zurückgelassen worden ist, wird die Reihe rekurrent – aus der Verhältnisskala $3, -3, +1$ entstanden – sein, solange man nur der Natur der Terme des Zählers Rechnungträgt. Daher findet man für jeden Exponenten die folgenden Koeffizienten:

Exponenten	Koeffizienten	Exponenten	Koeffizienten
3	1	15	47
4	3	16	45
5	6	17	42
6	10	18	38
7	15	19	33
8	21	20	27
9	27	21	21
10	33	22	15
11	38	23	10
12	42	24	6
13	45	25	3
14	47	26	1

Hier können keine Zahlen größer als 26 erzeugt werden, weil $26 = 6 + 8 + 12$ ist, und die Summe aller Fälle ist $576 = 6 \cdot 8 \cdot 12$.

§23 Weil auf diese Weise die Auflösung von Zahlen in von der Anzahl und Art gegebene Teile ohne Hilfe von Induktion durchgeführt werden kann, kommen mir gewisse elegante Lehrsätze von Fermat in den Sinn; weil diese noch nicht bewiesen sind, scheint diese Methode vielleicht zu Beweisen derer zu führen. Nachdem Fermat nämlich versichert hatte, dass alle Zahlen Aggregate von entweder zwei oder drei Dreieckszahlen sind, weil die Null ja in der ebenfalls zu den Dreickszahlen zählt, kann der Lehrsatz so formuliert werden, dass alle Zahlen als in drei Dreickszahlen auflösbar bezeichnet werden. Wenn also, nachdem die Dreieckszahlen für die Exponenten genommen worden sind, diese Reihe gebildet wird

$$1 + x^1 + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + x^{21} + x^{28} + \text{etc.} = S,$$

muss bewiesen werden, wenn der Kubus dieser Reihe entwickelt wird, dass dann vollkommen alle Potenzen von x auftreten werden und keine ausgelassen wird; wenn das bewiesen werden könnte, hätte man einen Beweis dieses FERMAT'SCHEN Lehrsatzes.

§24 Wenn in gleicher Weise von dieser Reihe

$$1 + x^1 + x^4 + x^9 + x^{16} + x^{25} + x^{36} + \text{etc.} = S$$

die vierte Potenz genommen wird und gezeigt werden kann, dass in ihr vollkommen alle Potenzen von x gefunden werden, wird man einen Beweis dieses FERMAT'SCHEN Lehrsatzes haben, nach welchem alle Zahlen aus der Addition von vier Quadratzahlen zu resultieren festgelegt werden.

Wenn man aber allgemein

$$S = 1 + x^1 + x^m + x^{3m-3} + x^{6m-8} + x^{10m-15} + x^{15m-24} + x^{21m-35} + \text{etc.}$$

gesetzt wird und von dieser Reihe die Potenz zum Exponenten m genommen wird, ist zu beweisen, dass in ihr alle Potenzen von x hervorgehen werden, sodass jede Zahl das Aggregat von m oder weniger Polygonalzahlen ist, während die Anzahl der Seiten $= m$ ist.

§25 Aus diesen selben Prinzipien eröffnet sich ein anderer Weg diese Beweise zu finden, welcher vom vorhergehenden darin abweicht, dass, wie dort nicht nur auf die Verschiedenheit, sondern auch die Reihenfolge der Teile geachtet worden ist, hier die Reihenfolge ignoriert wird. Für die Auflösung in Dreieckszahlen setze man natürlich diese Formel

$$\frac{1}{(1-z)(1-xz)(1-x^3z)(1-x^6z)(1-x^{10}z)(1-x^{15}z)\text{etc.}}$$

an, welche entwickelt diese Reihe liefere

$$1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + Tz^5 + \text{etc.},$$

sodass P, Q, R, S etc. Funktionen nur von x sind. Es ist aber offensichtlich, dass

$$P = 1 + x + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + x^{21} + \text{etc.}$$

sein wird, aber Q wird außerdem die Potenzen von x enthalten, deren Exponenten die Aggregate zweier Dreickszahlen sind. Es muss also bewiesen werden, dass in der Funktion R vollkommen alle Potenzen von x auftreten werden.

§26 In gleicher Weise entwickle man für die Auflösungen von Zahlen in vier Quadratzahlen diesen Bruch

$$\frac{1}{(1-z)(1-xz)(1-x^4z)(1-x^9z)(1-x^{16}z)(1-x^{25}z)\text{etc.}},$$

wenn diese in diese Form

$$1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Qz^4 + \text{etc.}$$

übergeht, ist zu beweisen, dass die Funktion S alle Potenzen von x umfasst. Denn P wird der Reihe $1 + x^4 + x^6 + x^{16} + \text{etc.}$ gleich und Q wird außerdem die Potenzen von x enthalten, deren Exponenten die Aggregate von zwei Quadraten sind, in welcher Reihe also noch viele Potenzen fehlen. in R treten aber darüber hinaus die Potenzen, deren Exponenten die Summe von drei Quadraten sind, hinzu und in S auch die, deren Exponenten die Summen von vieren sind, sodass in S alle Zahlen in den Exponenten auftreten müssen.

§27 Aus diesem Prinzip kann bestimmt werden, wie viele Lösungen die Probleme, die von den Arithmetikern zur *Regula Virginum* gezählt zu werden pflegen, zulassen. Probleme von dieser Art gehen darauf zurück, dass die Zahlen p, q, r, s, t etc. gefunden werden müssen, sodass diesen zwei Bedingungen Genüge geleistet wird

$$ap + bq + cr + ds + \text{etc.} = n$$

und

$$\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s + \text{etc.} = \nu,$$

und nun ist die Frage, wie viele Lösungen in positiven ganzen Zahlen hier Geltung haben werden; hier ist freilich festzuhalten, dass die Zahlen a, b, c, d etc., n und α, β, γ, δ etc., ν ganzzahlig sind, weil, wenn sie es nicht wären, sie leicht darauf zurückgeführt werden würden. Es es freilich sofort klar, wenn nur zwei zu findende Zahlen p und q vorgelegt werden, dass nicht mehr als eine Lösung gegeben ist, welche daher, wenn für p und q keine ganzen positiven Zahlen hervorgehen, für keine gehalten zu werden pflegt.

§28 Um nun die Anzahl aller Lösungen in einem gewissen Fall zu bestimmen, damit Induktion oder Ausprobieren nicht irgendetwas zugeteilt wird, betrachte man diesen Ausdruck

$$\frac{1}{(1-x^a y^\alpha)(1-x^b y^\beta)(1-x^c y^\gamma)(1-x^d y^\delta)\text{etc.}}$$

und entwickle ihn, woher eine Reihe von dieser Art hervorgehen wird

$$1 + Ax^{\cdot\cdot}y^{\cdot\cdot} + Bx^{\cdot\cdot}y^{\cdot\cdot} + Cx^{\cdot\cdot}y^{\cdot\cdot}\text{etc.};$$

wenn in dieser der Term $Nx^n y^\nu$ auftritt, wird der Koeffizient N die Anzahl der Lösungen anzeigen; und wenn es passiert, dass dieser Term nicht auftritt, wird das ein Anzeichen sein, dass keine Lösung gegeben ist. Also besteht die ganze Aufgabe darin, dass der Koeffizient dieses Terms $x^n y^\nu$ ausfindig gemacht wird.