Über rektifizierbare Kurven auf einer Kugeloberfläche *

Leonhard Euler

§1 Bei der Gelegenheit jenes Florentinischen Problems, in welchem schon im vergangenen Jahrhundert auf einer Kugeloberfläche quadrierbare Anteile verlangt worden sind, war schon damals das Problem behandelt worden, dass auf einer Kugeloberfläche rektifizierbare Linien gezogen werden. Obwohl aber die Geometer sehr viel an Mühe auf dieses Problem verwendet haben, haben sie dennoch nicht mehr als eine Linie dieser Art finden können. Dieser Umstand scheint nun besonders bemerkenswert, weil ja diese Frage zur unbestimmten Analysis des Unendlichen zu zählen ist, wo meistens eine unendliche Menge an Lösungen aufzutreten pflegt; deswegen scheint diese einzige Lösung, welche sich bis jetzt finden ließ, besonders würdig, dass wir ihre Natur daraufhin genauer untersuchen, ob vielleicht daher mehrere Lösungen abgeleitet werden können, oder ob ein Grund erkannt wird, weswegen wir verstehen können, dass nur eine einzige Lösung Geltung hat. In diesem Zweig der Analysis, welcher bis jetzt immer noch wenig ausgearbeitet worden ist, werden freilich viele Phänomene beobachtet, die sich noch auf keine Wiese auf bestimmte Ursachen reduzieren lassen, von welcher Art diese zwei Theoreme sind, die ich schon vor einer Zeit bemerkt habe und die ich dennoch keinesfalls in aller Strenge beweisen kann, zum einen:

*Originaltitel: "De curva rectificabili in superficie sphaerica", zuerst publiziert in: *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 15* (1771, verfasst 1770): pp. 195–216, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 28, pp. 142 – 160, Eneström-Nummer E408, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

Außer dem Kreis ist keine Kurve gegeben, von welcher ein irgendeinem Anteil gleicher Kreisbogen angegeben werden kann.

Zum anderen:
Es ist keine algebraische Kurve gegeben, von welcher irgendein Bogen mit Logarithmen ausgedrückt werden kann.

Hier rede ich natürlich nicht über Kurven von solcher Art, deren Rektifikation entweder von Kreisbogen oder Logarithmen abhängt, von welchen ohne Zweifel eine unendliche Menge gegeben ist, sondern nur von solchen, von welchen irgendein Bogen entweder einem Kreisbogen oder einem bestimmten Logarithmus gleich ist, wobei natürlich eine geometrische Größe weder addiert noch subtrahiert worden ist.

§2 Daher sei also also auf der Kugeloberfläche (Fig. 1)[1] irgendein Punkt Z der gesuchten Kurve,

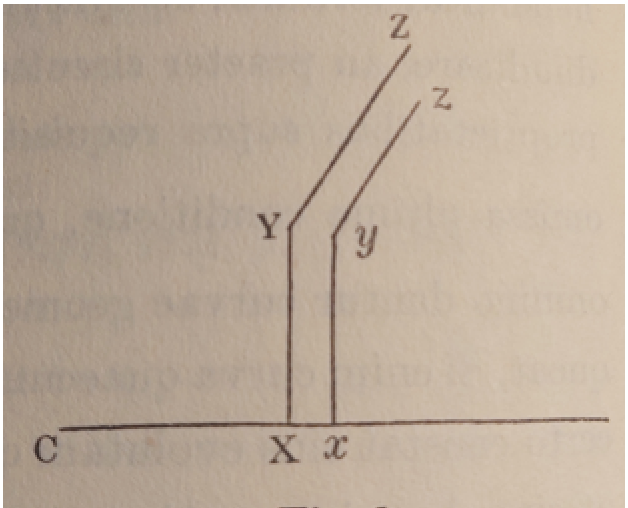


Fig. 1

welcher mit den drei Koordinaten $CX = x$, $XY = y$ und $YZ = z$ zu bestimmen ist, wo, wenn der Punkt C im Mittelpunkt der Kugel genommen wird und der Radius $= 1$ gesetzt wird, man diese Gleichung haben wird:

[1]Der Scan zeigt die Abbildung der Opera Omnia Version.

$$xx + yy + zz = 1;$$

darauf, weil das Element Zz dieser Linie mit dieser Formel ausgedrückt wird:

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

ist es notwendig, das ihr Integral eine algebraische Größe wird.

§3 Weil nach der ersten Gleichung gilt:

$$z = \sqrt{1 - xx - yy},$$

wird

$$dz = \frac{-xdx - ydy}{\sqrt{1 - xx - yy}}$$

sein, woher man das Kurvenelement

$$Zz = \sqrt{dx^2 + dy^2 + \frac{(xdx + ydy)^2}{1 - xx - yy}} = \sqrt{\frac{dx^2(1 - yy) + 2xydxdy + dy^2(1 - xx)}{1 - xx - yy}}$$

oder auch

$$Zz = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 - (ydx - xdy)^2}{1 - xx - yy}}$$

berechnet; die ganze Frage geht also nun darauf zurück, eine Relation von welcher Art zwischen den zwei Variablen x und y besteht oder welche Funktion die eine von der anderen sein muss, dass diese Formel integrierbar wird.

§4 Vor allem muss dieser Ausdruck aber auf eine einfachere Form gebracht werden; für dieses Ziel wollen wir setzen:

$$y = u\sqrt{1 - xx},$$

dass

$$1 - xx - yy = (1 - xx)(1 - uu)$$

ist, dann wird wegen

$$dy = \frac{du(1-xx) - xudx}{\sqrt{1-xx}} = du\sqrt{1-xx} - \frac{uxdx}{\sqrt{1-xx}}$$

auch

$$ydx - xdy = \frac{udx}{\sqrt{1-xx}} - xdu\sqrt{1-xx}$$

sein, woher unser Zähler werden wird:

$$dx^2(1-uu) + du^2(1-xx)^2,$$

woraus unsere Formel für das Element Zz zu

$$\sqrt{\frac{dx^2(1-uu) + du^2(1-xx)^2}{(1-xx)(1-uu)}} = \sqrt{\frac{dx^2}{1-xx} + \frac{du^2(1-xx)}{1-uu}}$$

berechnet wird, wo die Frage wiederum im Finden der Relation zwischen x und y besteht, sodass das Integral dieser Formel dargeboten werden kann.

§5 Wenn wir Winkel einführen wollen, kann diese noch gefälliger gemacht werden; denn durch Setzen von $x = \cos\vartheta$ und $u = \sin\vartheta$, dass

$$y = \sin\varphi\sin\vartheta \quad \text{und} \quad z = \cos\varphi\sin\vartheta$$

wird, geht unsere Formel als

$$\sqrt{d\vartheta^2 + d\varphi^2\sin^2\vartheta}$$

hervor. Hier muss aber sorgfältig beachtet werden, dass die Winkel ϑ und φ Winkel bezeichnen und daher nicht algebraisch sein können, sondern durch Kreisbogen ausgedrückt werden müssen, deren Sinus und Kosinus aber algebraisch ausgedrückt werden; darauf, weil die Formel $\sqrt{d\vartheta^2 + d\varphi^2\sin^2\vartheta}$ integrierbar sein muss, ist es notwendig, dass ihr Integral nicht dem Kreisbogen sondern dem Sinus oder Kosinus oder einer aus Sinus und Kosinus irgendwie zusammengesetzten Form gleich wird.

§6 Weil ja bis jetzt noch keine sichere Methode bekannt ist Formeln von dieser Art zu behandeln, bleibt keine andere Möglichkeit, als dass wir die Sache durch Probieren angehen und auf eine Eingebung hoffen. Wir wollen also zuerst ansetzen, dass das gesuchte Integral $= \alpha \sin \vartheta$ ist und es wird

$$\sqrt{d\varphi^2 + d\varphi^2 \sin^2 \vartheta} = \alpha d\vartheta \cos \vartheta$$

sein, woher

$$d\varphi = \frac{d\vartheta \sqrt{\alpha^2 \cos^2 \vartheta - 1}}{\sin \vartheta}$$

wird; daher muss das Integral dieser Formel einen Kreisbogen ausdrücken; weil also

$$\sqrt{\alpha\alpha \cos^2 \vartheta - 1} = \sqrt{(\alpha\alpha - 1) - \alpha\alpha \sin^2 \vartheta}$$

ist, werden wir

$$d\varphi = \frac{d\vartheta}{\sin \vartheta} \sqrt{\alpha\alpha - 1 - \alpha\alpha \sin^2 \vartheta}$$

haben, oder, indem wir sie aufteilen,

$$d\varphi = \frac{d\vartheta(\alpha\alpha - 1)}{\sin \vartheta \sqrt{\alpha\alpha - 1 - \alpha\alpha \sin^2 \vartheta}} - \frac{\alpha\alpha d\vartheta \sin \vartheta}{\sqrt{\alpha\alpha - 1 - \alpha\alpha \sin^2 \vartheta}};$$

damit die Natur des zweiten Terms leichter klar wird, wollen wir $\cos \vartheta = v$ setzen, und wegen $-d\vartheta \sin \vartheta = dv$ wird dieser zweite Term

$$\frac{\alpha\alpha dv}{\sqrt{\alpha\alpha vv - 1}}$$

werden, dessen Integral aber nicht durch einen Kreisbogen, sondern durch einen Logarithmen dargeboten wird, weshalb dieser erste Versuch nicht gelingt.

§7 Wir wollen also die Festlegung

$$\int \sqrt{d\vartheta^2 + d\varphi^2 \sin^2 \vartheta} = \alpha \cos \vartheta$$

oder durch Differenzieren

$$-\alpha d\vartheta \sin\vartheta = \sqrt{d\vartheta^2 + d\vartheta^2 \sin^2\vartheta}$$

versuchen, woher wir

$$d\varphi = \frac{d\vartheta \sqrt{\alpha\alpha \sin^2\vartheta - 1}}{\sin\vartheta}$$

berechnen, welche in gleicher Weise in zwei Teile aufgeteilt

$$d\varphi = \frac{\alpha\alpha d\vartheta \sin\vartheta}{\sqrt{\alpha\alpha \sin^2\vartheta - 1}} - \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta \sqrt{\alpha\alpha \sin^2\vartheta - 1}}$$

liefert, wo das erste Glied für $\cos\vartheta = v$ gesetzt wegen $d\vartheta \sin\vartheta = -dv$ diese Form annimmt

$$-\frac{\alpha\alpha dv}{\sqrt{\alpha\alpha - 1 - \alpha\alpha vv}},$$

dessen Integral natürlich

$$\alpha \arccos \frac{\alpha v}{\sqrt{\alpha\alpha - 1}}$$

ist, dessen Sinus oder Kosinus sich angeben lässt, sooft α eine rationale Zahl war. Nun ist also übrig, dass auch das andere Glied

$$-\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta \sqrt{\alpha\alpha \sin^2\vartheta - 1}}$$

per Integration auf einen Kreisbogen gebracht wird; leicht wird aber eingesehen, dass die Form dieses Integrals sein wird:

$$\beta \arcsin \frac{\gamma \cos\vartheta}{\sin\vartheta},$$

welche Formel differenziert

$$\frac{-\beta\gamma d\vartheta}{\sin\vartheta \sqrt{\sin^2\vartheta - \gamma\gamma \cos^2\vartheta}}$$

liefert; damit diese unserem zweiten Glied gleich wird, muss

$$\beta = 1 \quad \text{und} \quad \frac{1+\gamma\gamma}{\gamma\gamma} = \alpha\alpha \quad \text{oder} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{\alpha\alpha - 1}}$$

genommen werden, und so wird das Integral des zweiten Glieds

$$\arcsin\left(\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta\sqrt{\alpha\alpha-1}}\right)$$

sein, weshalb unser ganzes Integral oder der Wert des Winkels φ so ausgedrückt wird, dass

$$\varphi = \alpha \arccos\left(\frac{\alpha\cos\vartheta}{\sqrt{\alpha\alpha-1}}\right) + \arcsin\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta\sqrt{\alpha\alpha-1}}$$

ist.

§8 Wir werden diese Form gefälliger machen, indem wir die Konstante α so verändern, dass

$$\alpha = \sec\varepsilon = \frac{1}{\cos\varepsilon}$$

ist, denn dann werden wir erhalten:

$$\varphi = \frac{1}{\cos\varepsilon}\cdot\arccos\left(\frac{\cos\vartheta}{\sin\varepsilon}\right) + \arcsin\left(\frac{\cos\vartheta\cos\varepsilon}{\sin\vartheta\sin\varepsilon}\right) + C$$

oder, indem wir $90^\circ - \varepsilon$ anstelle von ε schreiben,

$$\varphi = \frac{1}{\sin\varepsilon}\cdot\arccos\left(\frac{\cos\vartheta}{\cos\varepsilon}\right) + \arcsin\left(\frac{\tan\varepsilon}{\tan\vartheta}\right) + C.$$

Hier ist aber sorgfältig anzumerken, wenn $\sin\varepsilon$ keine rationale Funktion war, dass diese Lösung nicht für passend gehalten werden kann, deshalb weil sich geometrisch kein Winkel angeben lässt, der zu $\arccos\left(\frac{\cos\vartheta}{\cos\vartheta}\right)$ im Verhältnis $1 : \sin\varepsilon$ wäre. Daher könnte es also so erscheinen, dass für den Winkel ε keine anderen Winkel außer 90° oder 30° angenommen werden können, aber weil der Winkel ε hier nicht eingeht, lässt sich nach Belieben anstelle von $\sin\varepsilon$ irgendein Bruch kleiner als die Einheit annehmen, wo freilich ersichtlich ist, dass die Fälle ausgeschlossen werden, in denen entweder $\sin\varepsilon = 0$ oder $\sin\varepsilon = 1$ ist. Aber, damit beide Winkel reell werden, ist es notwendig, dass ϑ immer größer ist als ε, oder zumindest niemals kleiner wird.

§9 Damit wir aber ein spezielles Beispiel dieser Integration entwickeln, wollen wir $\sin\varepsilon = \frac{1}{2}$ setzen, dass $\cos\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$ wird, dann wird der erste Teil

$$= 2\arccos\frac{2\cos\vartheta}{\sqrt{3}} = \arcsin\frac{4\cos\vartheta\sqrt{4\sin^2\vartheta - 1}}{3}$$

sein und der zweite Teil

$$= \arcsin\frac{1}{\tan\vartheta\sqrt{3}} = \arcsin\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta\sqrt{3}},$$

nach Zusammennehmen welcher Winkel wir

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{9\cos\vartheta - 8\cos^3\vartheta}{3\sin\vartheta\sqrt{3}}\right)$$

berechnen, so dass

$$\sin\varphi = \frac{\cos\vartheta(9 - 8\cos^2\vartheta)}{3\sin\vartheta\sqrt{3}}$$

oder

$$\cos\varphi = \frac{(4\sin^2\vartheta - 1)\sqrt{4\sin^2\vartheta - 1}}{3\sin\vartheta\sqrt{3}}$$

ist, woher, nachdem dieser Winkel φ bestimmt worden ist, wir diese Integration haben werden:

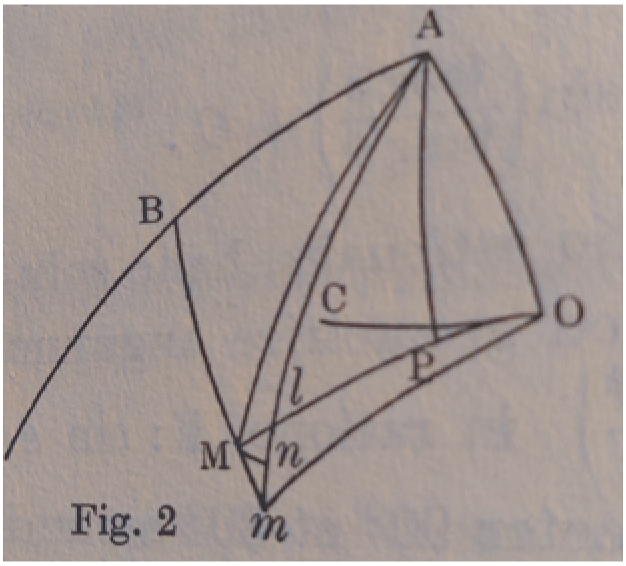
$$\int\sqrt{d\vartheta^2 + d\varphi^2\sin^2\vartheta} = 2\cos\vartheta,$$

woher

$$d\varphi = -\frac{d\vartheta\sqrt{4\sin^2\vartheta - 1}}{\sin\vartheta}$$

wird, dessen Integral umgekehrt der Winkel φ ist, den wir gerade beschrieben haben. Die Frage ist also, wie sich mit einer direkten Methode zu dieser Lösung gelangen lassen hätte.

§10 Dieser Gegenstand scheint nicht unwesentlich klarer zu werden, wenn wir versuchen die Lösung aus der sphärischen Geometrie heraus zu wiederholen, weil wir ja daraus viele außerordentliche Eigenschaften erkennen werden. Es sei also (Fig. 2)[2] auf der Oberfläche der Kugel,



deren Radius wir $= 1$ setzen, die Kurve BMm jene rektifizierbare Kurve, welche wir suchen, und nach Nehmen eines festen Punktes A als Pol und Zeichnen der Meridiane AM und Am wollen wir den Winkel $BAM = \varphi$ und den Bogen $AM = \vartheta$ nennen; der elementare Winkel MAm wird dann $= d\varphi$ sein und nach Zeichnen der unendlichen kurzen Linie Mn normal zu Am wird

$$Mn = d\varphi \sin\varphi \quad \text{und} \quad mn = d\vartheta$$

sein, woher das Kurvenelement, wie wir schon oben hatten, zu

$$Mm = \sqrt{d\vartheta^2 + d\varphi^2 \cdot \sin^2\vartheta}$$

berechnet wird, welches also integrierbar sein muss.

§11 Weil sich dies ja aber nicht mit einer generischen Methode leisten ließ, wollen wir einige Eigenschaften ausfindig machen, welche uns die Natur der

[2]Der Scan zeigt die Figur er Opera Onmia Version.

Kugel an die Hand geben wird. Wir wollen also besonders die Bogen der Großkreise, welche in den einzelnen Punkten unserer Kurve normal sind, von welcher Art die Bogen MO und mO sind, betrachten und es ist sofort klar, dass der Winkel $AMO = nMm$ sein wird, woher, wenn wir den Winkel $AMO = \psi$ setzen, wir

$$\sin\psi = \frac{d\vartheta}{\sqrt{d\vartheta^2 + d\varphi^2 \sin^2\vartheta}}, \quad \cos\psi = \frac{d\varphi \sin\vartheta}{\sqrt{d\vartheta^2 + d\varphi^2 \sin^2\vartheta}}$$

und daher

$$\tan\psi = \frac{d\vartheta}{d\varphi \sin\varphi}$$

haben.

§12 Wenn wir also von A aus zum Bogen MO das Lot AP fällen, werden wir aus dem rechtwinkligen Dreieck APM finden:

$$\sin AP = \sin\vartheta \sin\psi = \frac{d\vartheta \sin\vartheta}{\sqrt{d\vartheta^2 + d\varphi^2 \cdot \sin^2\vartheta}},$$

dann aber

$$\tan MP = \tan\vartheta \cos\psi = \frac{d\varphi \cdot \sin^2\vartheta}{\cos\vartheta \sqrt{d\vartheta^2 + d\varphi^2 \cdot \sin^2\vartheta}},$$

und außerdem

$$\tan MAP \cdot \tan\psi = \frac{1}{\cos\vartheta} \quad \text{oder} \quad \tan MAP = \frac{d\varphi \sin\vartheta}{d\vartheta \cdot \cos\vartheta}.$$

§13 Diese zwei zu unserer Kurve normalen Bogen laufen im Punkt O zusammen, und dieser Punkt O wird der Pol des kleineren Kreises sein, der unsere Kurve durch das Element Mm hindurch berührt, sodass $\sin OM$ mit Recht für den Krümmungsradius unserer Kurve gehalten werden kann. Damit wir nun diesen Punkt O finden, wollen wir den Bogen AO zeichnen und wollen die zwei Kugeldreiecke AMO und AmO anschauen, welche nicht nur die Seite AO gemeinsam haben, sondern auch die Seiten MO und mO in jedem von beiden gleich sind, woher, wenn wir den Bogen $MO = mO = r$ setzen, weil ja im Dreieck AMO aus den Seiten $AM = \vartheta$ und $MO = r$ mit dem eingeschlossenen Winkel $AMO = \psi$ berechnet wird:

$$\cos AO = \cos\vartheta\cos r + \sin\vartheta\sin r\cos\psi,$$

es offensichtlich ist, wenn der Bogen ϑ um sein Differential $d\vartheta$ und der Winkel ψ um sein Differential $d\psi$ vermehrt wird, dass der Wert dieser Formel derselbe bleiben muss, das heißt, sein Differential, nachdem nur ϑ und ψ als Variablen genommen worden sind, gleich Null sein muss. Danach erhalten wir aber

$$-d\vartheta\sin\vartheta\cos r + d.(\sin\vartheta\cos\psi)\sin r = 0,$$

woher

$$\tan r = \frac{d\varphi\cdot\sin\vartheta}{d.(\cos\psi\sin\vartheta)}$$

wird, welches der allgemeine Ausdruck für die Krümmungsradien von auf einer Kugeloberfläche beschriebenen Kurve ist.

§14 Wenn wir also darüber hinaus den Bogen der Kurve $BM = s$, dass sein Element $Mm = ds$ ist, den Winkel mMn hingegen ψ nennen, werden wir

$$d\vartheta = ds\sin\psi \quad \text{und} \quad d\varphi\sin\vartheta = ds\cos\psi$$

haben, woher, wenn die Relation zwischen s und ψ gegeben wäre, sich die zwei Größen φ und ϑ ableiten ließen; es wäre nämlich

$$\vartheta = \int ds\sin\psi$$

und daher weiter

$$\varphi = \int\frac{ds\cos\psi}{\sin\vartheta},$$

welche an sich hinreichend unbestimmten Integrale zeigen, dass der Punkt A von unserem Belieben abhängt.

§15 Wenn aber die Relation zwischen dem Kurvenbogen s und dem Krümmungsradius r gegeben ist, wird es um vieles schwieriger sein, daraus die übrigen Elemente ψ, ϑ und φ zu bestimmen. Nachdem der Winkel φ ausgeschlossen worden ist, haben wir freilich diese zwei Gleichungen:

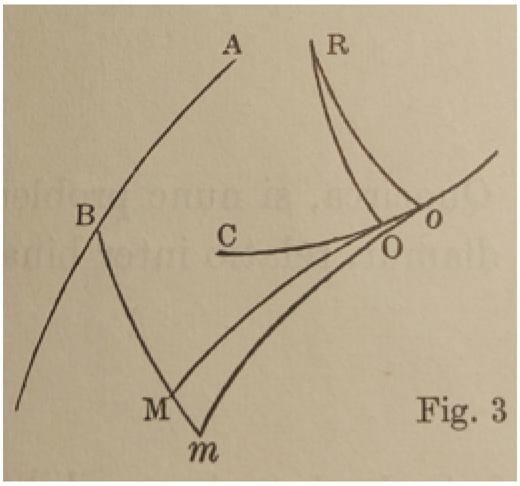
$$d\vartheta = ds \sin\psi \quad \text{und} \quad \tan r = \frac{ds \cdot \sin\psi \sin\vartheta}{d.(\cos\psi \sin\vartheta)},$$

aus welchen die beiden Größen ϑ und ψ ausfindig gemacht werden müssen; aber es ist immer noch kein Weg klar zu diesem Ziel zu gelangen, obwohl dennoch in der Ebene aus der gegebenen Relation zwischen dem Kurvenbogen und dem Krümmungsradius die Konstruktion der Kurve leicht gegeben wird.

§16 Nachdem wir also gezeigt haben, wie aus der als gegebenen betrachteten Kurve BM ihr Krümmungsradius MO bestimmt werden muss, werden wir daher die ganze Theorie der Evoluten auf der Kugeloberfläche derivieren können, denn jener Punkt O wird auf einer gewissen Kurve CO gelegen sein, welche sich mit Recht die Evolute der Kurve BM nennen lässt. Denn wenn der Faden der Kurve CO aufgeprägt aufgefasst wird und er gespannt wird, wird er auf der Kugeloberfläche den Bogen des Großkreises darstellen, der die Evolute im Punkt O berührt, genauso wie es in der Ebene passiert, sodass unsere Kurve BM aus der Abwicklung der Kurve CO beschrieben werden kann, woher also wie in der Ebene zu bemerken ist, dass der Krümmungsradius entweder dem MO Bogen der Evolute CO gleich ist, oder ihn um eine ihn um eine Konstante Größe überragt; weil diese konstante Größe ja von unserem Belieben abhängt, ist es ersichtlich, dass aus derselben Entwicklung der Kurve CO unzählige Kurven BM erzeugt werden können.

§17 Nachdem diese Dinge erklärt worden sind, wollen wir rückwärts gehend (Fig. 3)[3] zuerst die abgewickelte Kurve COo betrachten,

[3]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.



für welche wir den Bogen $CO = s$ nennen wollen, dass das Element $Oo = ds$ ist, und damit wir es nicht nötig haben, einen gewissen beliebigen Punkt A in die Rechnung einzuführen, sei die Natur dieser Kurve über ihren Krümmungsradius $OR = r$ definiert; denn was für eine Kurve auch immer diese ist, weil sie ja als gegeben betrachtet wird, ist die Relation zwischen s und r gegeben; nun geschehe mithilfe eines Fadens, welcher zu Anfang der ganzen Kurve aufgeprägt verstanden werde, die Abwicklung, welche sich nun freilich bis hin zu O erstrecken wird, wo der Faden ausgedehnt sein wird, gerade der Bogen des Großkreises OM, dessen Länge $= OC = s$ sein wird, welcher Bogen die Kurve CO im Punkt O berührt, und nun wird der Punkt M auf der durch diese Abwicklung beschriebenen Kurve BM gefunden werden, zu welcher man vom unendlich nahen Punkt o aus den Bogen om zeichne, welcher also wie jener OM zu dieser Kurve normal sein wird. Dann aber, weil $OM = s$ ist, wird $om = s + ds$ sein, wonach wir die Natur dieser beschriebenen Kurve BM untersuchen wollen.

§18 Weil ja der Bogen des Großkreises MO normal zu OR ist und seine Fortsetzung für das Element Oo gehalten werden kann, wird er mit dem unendlich nahen Strahl Ro den Winkel MoR bilden, dessen Tangens

$$= \frac{\tan RO}{\sin Oo} = \frac{\tan r}{ds}$$

ist, weil aber der unendlich nahe Strahl mo normal zu Ro ist, wird der Winkel Mom das Komplement jenes Winkels OoR sein und daher

$$\tan Mom = \frac{ds}{\tan r}$$

sein oder dieser Winkel selbst

$$= \frac{ds}{\tan r},$$

wo es förderlich sein wird bemerkt zu haben, dass

$$\text{der Winkel } ORo = \frac{ds}{\sin r}$$

ist, woher es klar ist, dass die Winkel Mom und ORo einander nicht gleich sind, wie es in der Ebene passiert, sondern jener Mom sich zu diesem ORo wie $\sin r$ zu $\tan r$ verhält, das heißt, im Verhältnis einer kleinen Ungleichheit, und, wenn der Strahl OR ein Viertel des Kreises wird, der Winkel $Mom = 0$ oder beide Strahlen MO, mo zusammenfallen, wird die Kurve um das Element Oo herum ein Großkreis sein, der die Tangente selbiger in den einzelnen Punkten ist.

§19 Nun wird es leicht sein, das Element Mm der durch Abwicklung beschriebenen Kurve auszudrücken; weil nämlich dieses Element durch den Sinus des Bogens MO geteilt den Winkel Mom liefert, werden wir wegen $OM = s$ das Element

$$Mm = \frac{ds \sin s}{\tan r}$$

haben. Deshalb, wenn wir nun unser Problem über die Rektifikation der Kurve BM angehen, muss die Relation zwischen den zwei Variablen r und s eine solche sein, dass die Formel

$$\frac{ds \sin s}{\tan r}$$

uneingeschränkt integrierbar wird. Aber außerdem, weil diese Kurve zugleich algebraisch oder geometrisch konstruierbar sein muss, wird zuerst verlangt, dass die Kurve CO eine geometrische ist; dann weiter, weil der Bogen $MO = CO$ ist, muss die Kurve CO so beschaffen sein, dass sich ein ihrem Bogen CO gleicher Kreisbogen geometrisch angeben lässt.

§20 Hier ist es vollkommen bemerkenswert, dass wir für das Element Mm eine so einfache Formel finden, über welche sich leicht entscheiden lässt, in welchen Fällen sie integrierbar wird, und es fällt sogar sofort ins Auge, wenn der Krümmungsradius OR eine Konstante war, also $r = c$, dass dann die Kurve BM uneingeschränkt integrierbar sein wird, denn der Bogen wird

$$BM = \frac{\int ds \sin s}{\tan c} = -\frac{\cos s}{\tan c} + C$$

sein, wo, wenn wir die Konstante so bestimmen, dass die Beschreibung im Punkt C beginnt, wo $s = 0$ ist, sodass der Punkt B auf C fällt, dann der Bogen

$$BM = \frac{1 - \cos s}{\tan c} = \frac{2 \sin^2 \frac{s}{2}}{\tan c}$$

sein wird. Daher ist also klar, wenn am Anfang, wo $s = 0$ ist, der Bogen $BM = 0$ wird, nachdem der Bogen dem Bogen CO dem Viertel des Großkreises gleich wird, so dass OM ein Viertel wird, dass der Bogen

$$BM = \frac{1}{\tan c}$$

sein wird, und wenn der Bogen CO bis dahin verlängert wird, dass er dem Halbumfang des Großkreises gleich wird, in welchem Fall der Bogen OM in einen Halbkreis übergeht, dass dann der Bogen

$$BM = \frac{2}{\tan c}$$

sein wird, wo die Einheit durch den Radius der Kugel definiert wird.

§21 Sieh also diese vollkommen leichte Lösung des vorgelegten Problems, welche freilich, wie dem aufmerksamen Leser leicht klar werden wird, völlig mit der übereinstimmt, die ich zuvor über viele Umwege entdeckt habe; aber hier werden ihre außergewöhnlichen Eigenschaften um vieles deutlicher hervortreten werden als sie sich zuvor aus jenen verwickelten Formeln erkennen lassen hätten. Denn weil wir $r = c$ genommen haben, wird sofort klar, dass die Evolute unserer Kurve BM ein kleinerer Kreis ist, dessen Radius $= \sin c$ ist; weiterhin, damit ein einem beliebigen Bogen, $CO = s$, dieses kleineren Kreises gleicher Bogen des Großkreises $MO = s$ geometrisch genommen werden kann, ist es notwendig, dass der Radius dieses kleineren Kreises, also $\sin c$, zum Radius der Sphäre ein rationales Verhältnis hat, welches dieselbe Bedingung ist, die wir auch oben gefunden haben.

§22 Weil sich ja unzählige kleinere Kreise dieser Art angeben lassen, deren Radien zum Radius der Sphäre ein rationales Verhältnis haben, müssen wir verstehen zwar unendlich viele Lösungen dargeboten zu haben; aber trotzdem, weil alle in quasi einer Formel enthalten sind, wird sich diese Lösung nicht zu Unrecht für lediglich eine halten lassen, und nun entspringt die Frage von größter Bedeutung, ob außer den kleineren Kreisen keine anderen Kurven auf der Kugeloberfläche gegeben sind, aus deren Abwicklung auch geometrische oder rektifizierbare Kurven entstehen.

§23 Aber bevor wir diese Frage sorgsamer untersuchen, wollen wir einige andere wunderbare Eigenschaften dieser Kurven betrachten. Und zuerst ist freilich klar, dass aus demselben kleineren Kreis unendlich viele unserem Problem Genüge leistende Kurven beschrieben werden können, weil ja auf seinem Umfang der Anfang oder der Punkt C nach unserem Belieben angenommen werden kann. Aber alle solchen Linien, wenn sie auf der Kugeloberfläche beschrieben aufgefasst werden, werden einander quasi parallel sein, weil ja alle von demselben Großkreis, der zu jener normal ist, zugleich normal geschnitten werden, und alle zwischen zwei Kurven eingeschlossen Anteile solcher Großkreise werden einander gleich sein. Es ist freilich ersichtlich, dass alle diese Kurven gleich sind und nur in Bezug auf die Lage auf der Kugel voneinander abweichen, woher wir ein sehr schönes Beispiel unendlich vieler gleicher auf der Kugeloberfläche zu zeichnenden Kurven haben, deren orthogonalen Trajektorien Großkreise sind.

§24 Nachdem weiter der Anfang der Kurve BM im Punkt C festgelegt worden ist, wenn der Bogen des kleineren Kreises, CO, dem halben Großkreis gleich genommen wird, was, wenn jener Kreis hinreichend klein war, erst nach einigen Umdrehungen passieren wird, dann, weil der Bogen OM ein Halbkreis wird, wird der Punkt M vom Durchmesser aus dem Punkt O gegenüber liegen, woher, wenn dieser kleinere Kreis COo als Polarkreis mit Pol, wobei der Pol in R ist, betrachtet wird und ein diesem gleicher gegenüber liegender Polarkreis aufgefasst wird, werden alle beschriebenen Kurven zwischen diese zwei Polarkreise fallen, und wenn die Polarkreise hinreichend klein waren, werden sie in vielen Umdrehungen über die Sphäre herumlaufen, bevor sie zum anderen Polarkreis gelangen.

§25 Daher zeigt sich noch eine (Fig. 4)[4] andere Erzeugung der Kurven BM,

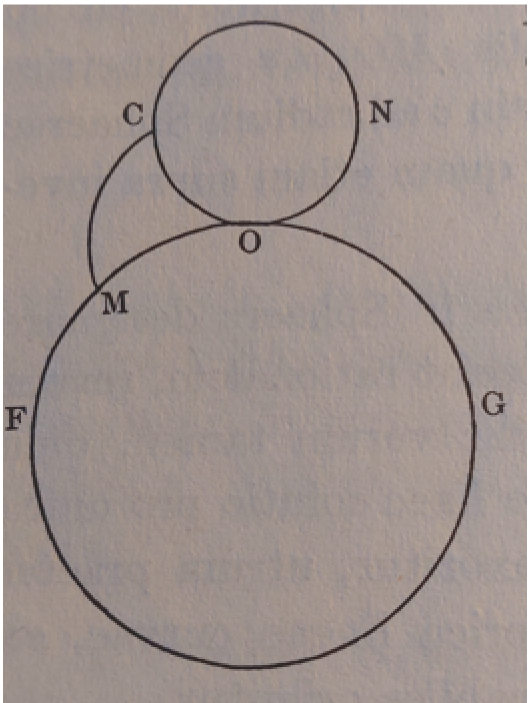


Fig. 4

denn leicht werden wir erkennen, dass dieselben Kurven BM beschrieben werden müssen, wenn der Großkreis der Sphäre über dem Umfang eines kleineren Kreises abrollt, in gleicher Weise wie Epizykloiden in der Ebene beschrieben zu werden pflegen. Denn es sei CO jener kleinere Kreis, welchen der Großkreis $OMFG$ im Punkt O zu berühre, welcher Großkreis durch Abrollen über den Umfang des kleineren Kreises immer weiter fortschreite, am Anfang aber der Berührpunkt aber im Punkt C war, wo der Punkt M des Großkreises angesetzt war, sodass durch die Natur der Abrollbewegung der Bogen OM dem Bogen CO gleich ist, woher, wenn der Großkreis im Punkt M mit einem Stift befestigt war, er notwendigerweise mit diesem Stift eine bestimmte Kurve CM beschreibt, und weil OM ein dem Bogen CO gleicher Bogen des Großkreises ist und er den kleineren Kreis im Punkt O berührt, ist es ersichtlich, dass durch die Rollbewegung dieselbe Kurve CM beschrieben wird, welche zuvor aus der Lösung entstanden war, sodass diese Kurve auch

[4] Der Scan zeigt die Abbildung der Opera Omnia Version.

den sphärischen Epizykloiden zuzurechnen ist, welche natürlich entspringen, wenn der bewegliche Großkreis über den Umfang des fixen kleineren Kreises abrollt.

§26 Wenn auch auf der Kugeloberfläche außer den Kreisen andere geometrischen Kurven gegeben wären, von welchen ein einem beliebigen unbestimmten Bogen gleicher Kreisbogen angegeben werden könnte, welches Theorem wir anfangs für ebene Figuren angeführt haben, dann hätten wir einen validen Beweis, dass außer den gefundenen Kurven keine anderen unserem Problem Genüge leisten. Wenn nämlich jemand sagt, dass (Fig. 2) eine andere geometrische Kurve BM gegeben ist, welche rektifizierbar ist, dann ließe sich gewiss ihr Krümmungsradius MO und daher alle Punkte O geometrisch angeben, woher die geometrische Evolute CO entstünde und ein dem unbestimmten Bogen CO gleicher Kreisbogen OM von ihr gegeben wäre,; nach jenem Theorem wäre die Kurve CO notwendigerweise ein Kreis, und daher könnte außer der schon gefundenen Lösung keine andere erwartet werden.

§27 Aber auch wenn dieses Theorem für ebene Figuren vollständig bewiesen wäre, könnte es dennoch auf der Kugeloberfläche keine Geltung haben, weil nämlich kein Zweifel besteht, dass auf der Kugeloberfläche unzählige geometrische Kurven beschrieben werden können; denn solange die Sinus oder Tangenten der oben benutzten Winkel φ und ϑ ein algebraisches Verhältnis zueinander haben, ist die daher entstehende BM natürlich als geometrisch anzusehen, denn hier wollen wir nicht auf die Bedingung der Rektifizierbarkeit achten; dann kann aber ihr Krümmungsradius MO immer geometrisch angegeben werden; und daher wird auch die Evolute CO eine algebraische Kurve sein, und sie wird darüber hinaus gewiss so beschaffen sein, dass ein irgendeinem Bogen CO gleicher Bogen OM des des Großkreises dargeboten werden kann; daher folgt notwendig, dass unendlich viele algebraische Kurven CO gegeben sind, von welchen sich die einzelnen Bogen durch Kreisbogen ausdrücken lassen. Deswegen haben wir immer einen sehr guten Grund zu bezweifeln, ob unser Problem mit jener Lösung, die wir nun auf zwei Weisen erlangt haben, völlig erschöpft ist oder nicht. Und wenn vielleicht keine anderen Lösungen gegeben sind, muss ein ganz anderer Beweis angeführt werden.

§28 Wenn wir die allgemeine oben für das Elemente gefundene Formel

$$\frac{ds \cdot \sin s}{\tan r}$$

genauer betrachten, werden wir bald entdecken, dass sie außer im Fall $r = c$ auf unendlich viele Weisen integrierbar gemacht werden kann, wie wenn beispielsweise $r = s$ war, oder $\tan r = \cos^2 s$, denn im ersten Fall wird

$$\text{der Bogen } BM = \sin s + C$$

werden, in diesem hingegen

$$BM = C - \frac{1}{\cos s}$$

werden, und wenn

$$\tan r = \sin s \cos^2 s$$

wäre, wäre

$$BM = \tan s + C,$$

aber dann wird die Frage darüber gestellt, ob die Kurve CN als eine geometrische hervorgeht oder nicht. Dort ist besonders zu bemerken, wenn eine solche geometrische Kurve gefunden werden könnte, dass dann auch der anderen Bedingung, nach welcher der Bogen CO durch einen Kreisbogen erklärt werden muss, Genüge geleistet ist, weil die Relation zwischen den Größen $\sin s$ und $\sin r$ oder $\tan r$ als gegeben angenommen wird; weil nämlich r ein Bogen des Großkreises ist und $\sin s$ mit irgendeiner algebraischen Funktion von ihm ausgedrückt ist, wird sich auch im Großkreis ein Bogen s angeben lassen, dessen Sinus jener Funktion gleich ist, aber auf diese Weise würden wir in größte Schwierigkeiten geraten, weil, wie wir ja schon zuvor angemerkt haben, noch keine Methode bekannt ist, mit deren Hilfe aus einer gewissen Relation zwischen dem Kurvenbogen s und seinem Krümmungsradius r auf der Kugeloberfläche die Kurve selbst bestimmt werden könnte. Wenn wir nämlich aus den in Paragraph 15 gegebenen Gleichungen entweder ϑ und ψ eliminieren, stoßen wir auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, und weil nicht klar ist, wie diese zu behandeln ist, wird sich um vieles weniger beurteilen lassen, ob daher eine algebraische Kurve hervorgehen wird oder nicht.

§29 Bisher haben wir freilich von der Kurve, die wir für unser Problem gefunden haben, nur die Eigenschaften unsere Überlegungen eingebunden, welche die geometrischen Betrachtungen uns aufgezeigt haben; nun wird es also gefällig sein, ihre analytische Gleichung genauer zu entwickeln. Man nehme also (Fig. 5)[5] den Punkt A im Pol des kleineren Kreises COD,

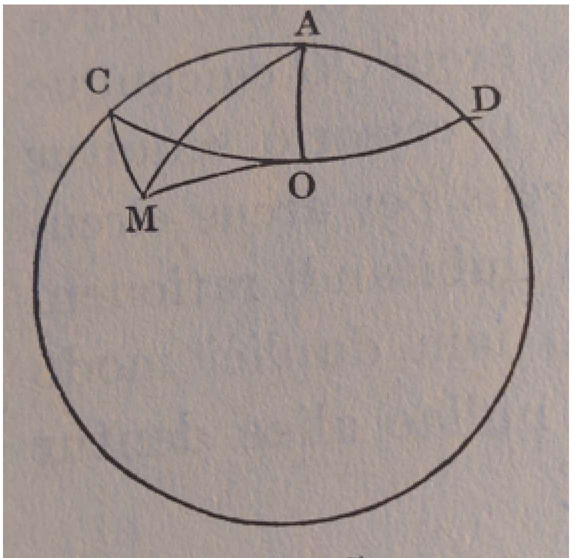


Fig. 5

aus dessen Abwicklung mit Anfang im Punkt C unsere rektifizierbare Kurve CM entspringe, deren Krümmungsradius im Punkt M mit dem Bogen MO des Großkreises, der den kleineren Kreis in C berührt und dem Bogen CO von ihm gleich ist, dargestellt werde. Man zeichne die Bogen AO und AM und, nachdem der Bogen $AC = AO = c$ gesetzt worden ist, sodass der Radius des kleineren Kreises $= \sin c$ ist, weil wir ja den Bogen $CO = s$ gesetzt haben und sein Maß der Winkel CAO ist, wird dieser Winkel

$$CAO = \frac{s}{\sin c}$$

sein, weil nun im rechtwinkligen Dreieck AMO die Katheten $AO = c$ und $MO = s$ gegeben sind, wenn wir wie oben den Bogen $AM = \vartheta$ nennen, werden wir

[5]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

$$\cos\vartheta = \cos s \cos c$$

haben; weiter, wenn wir den Winkel $CAM = \varphi$ nennen, wird

$$\text{der Winkel } MAO = \frac{s}{\sin c} - \varphi$$

sein, und daher der Tangens dieses Winkels $= \frac{\tan s}{\sin c}$, sodass

$$\varphi = \frac{s}{\sin c} - \arctan\frac{\tan s}{\sin c}$$

ist; dann geht aber der Kurvenbogen CM

$$= \frac{1-\cos s}{\tan c}$$

hervor.

§30 Wir wollen dies auf die zwei Elemente φ und ϑ zurückführen, und weil aus der ersten Gleichung

$$\cos s = \frac{\cos\vartheta}{\cos c}$$

ist, woher sofort der Bogen

$$CM = \frac{\cos c - \cos\vartheta}{\sin c}$$

folgt, weshalb es offensichtlich ist [§ 7], dass diese Kurve völlig derselbe ist wie die, die wir mit der ersten Methode gefunden haben, dann aber, weil

$$\sin s = \frac{\sqrt{\cos^2 c - \cos^2\vartheta}}{\cos c} \quad \text{und} \quad s = \arccos\left(\frac{\cos\vartheta}{\cos c}\right)$$

ist, schließen wir daraus

$$\text{der Winkel } \varphi = \frac{1}{\sin c}\arccos\left(\frac{\cos\vartheta}{\cos c}\right) - \arctan\frac{\sqrt{\cos^2 c - \cos^2\vartheta}}{\sin c\cos\vartheta}.$$

Wenn wir daher auch die Differentialformeln betrachten wollen, weil

$$ds\sin s = \frac{d\vartheta\sin\vartheta}{\sin c}$$

und daher

$$ds = \frac{d\vartheta \sin\vartheta}{\tan c\sqrt{\cos^2 c - \cos^2\vartheta}}$$

ist und weil weiter

$$d\varphi = \frac{ds}{\sin c} - \frac{ds \sin c}{\cos^2 s(\sin^2 c + \tan^2 s)} = \frac{ds}{\sin c} - \frac{ds \sin c}{\sin^2 \cos^2 s + \sin^2 s}$$
$$= \frac{ds \cdot \cos^2 c \sin^2 s}{\sin c(\sin^2 c \cos^2 s + \sin^2 s)}$$

ist, wird

$$d\varphi = \frac{ds \cos^2 c \sin^2 s}{\sin c(\sin^2 c + \cos^2 c \sin^2 s)} = \frac{ds \cos^2 c \sin^2 s}{\sin c(1 - \cos^2 c \cos^2 s)}$$

sein. Weil nun

$$ds = \frac{d\vartheta \sin\vartheta}{\tan c\sqrt{\cos^2 c - \cos^2\vartheta}}, \quad \sin^2 s = \frac{\cos^2 c - \cos^2\vartheta}{\cos^2 c}$$

und

$$1 - \cos^2 c \cos^2 s = \sin^2\vartheta$$

ist, werden wir

$$d\varphi = \frac{d\vartheta \cos c\sqrt{\cos^2 c - \cos^2\vartheta}}{\sin^2 c \sin\vartheta}$$

haben, welche dieselbe Formel ist wie die, die wir oben für $d\varphi$ gefunden haben.

§31 Weil nun freilich gewiss ist, dass auf der Kugeloberfläche außer Kreisen unendlich viele geometrische Kurven gegeben sind, von welchen sich die einzelnen Anteile unbestimmt mit Kreisbogen messen lassen, scheint das folgende Problem nichtsdestoweniger als genauso schwierig und aller Aufmerksamkeit würdig anzusehen sein.

Problem

Auf der Kugeloberfläche alle geometrischen Kurven zu finden, von welchen sich irgendeinem unbestimmten Bogen gleiche Kreisbögen darbieten lassen.

Wenn jemand eine Lösung dieses Problems mit einer direkten Methode erlangen will, wird er ohne Zweifel auf sehr große Schwierigkeiten stoßen, welche sich mit den bis jetzt bekannten Methoden kaum und nicht einmal kaum überwinden lassen. Aber die zuvor gemachten Beobachtungen geben uns die folgende hinreichend gefällige Lösung an die Hand. Zuerst beschreibe man auf der Kugeloberfläche (Fig. 2) irgendeine geometrische Kurve BM, was passiert, wenn, nachdem der Winkel $BAM = \varphi$ und der Bogen $AM = \vartheta$ gesetzt worden sind, irgendeine algebraische Relation zwischen $\sin\varphi$ und $\sin\vartheta$ gegeben ist, sodass $\sin\varphi$ als eine algebraische Funktion von $\sin\vartheta$ betrachtet werden kann; es ist aber offenkundig, dass, was hier über $\sin\varphi$ und $\sin\vartheta$ gesagt wird, gleichermaßen für die Kosinus und Tangenten gilt. Nachdem also eine solche Relation zwischen $\sin\varphi$ und $\sin\vartheta$ festgelegt worden ist, suche man einen Winkel ψ, dass

$$\tan\psi = \frac{d\vartheta}{d\varphi\sin\vartheta}$$

ist, welcher Winkel sich also auch geometrisch angeben lässt, und so wird man den Winkel $AMO = \psi$ haben, welchen der zur Kurve normale Bogen MO mit dem Meridian AM bildet. Weiter trenne man auf diesem Bogen des Großkreises MO den Bogen $MO = r$ ab, sodass

$$\tan r = \frac{d\vartheta\sin\vartheta}{d.(\sin\vartheta\cos\psi)}$$

ist, so wird aber auch der Punkt O geometrisch angegeben werden, weil ja $\tan r$ einer algebraischen Funktion der Größen $\sin\vartheta$ und $\sin\varphi$ gleich wird; danach wird der Punkt O auf der gesuchten Kurve CO gefunden werden, welche natürlich so beschaffen sein wird, dass ihr Anteil CO dem Kreisbogen $MO = r$ gleich wird; und diese Kurve CO wird offenbar geometrisch oder algebraisch sein, denn hier gebrauche ich die Wert geometrisch und algebraisch synonym, so dass, was algebraisch ausgedrückt werden kann, auch als geometrisch anzusehen ist.

§32 Damit wir diese konstruierte Kurve CO auch analytisch entwickeln, wollen wir den Winkel $BAO = x$ und den Bogen $AO = y$ setzen und sehen, eine Gleichung von welcher Art zwischen diesen Koordinaten, oder eher zwischen den Größen $\sin x$ und $\sin y$ hervorgehen wird. Für dieses Ziel wollen wir der Kürze wegen den Winkel $MAO = \xi$ setzen, so dass $x = \varphi + \xi$ wird; nun haben wir aus dem Kugeldreieck AMO zuerst

$$\cos y = \cos\vartheta \cos r + \sin\vartheta \sin r \cos\psi,$$

dann aber

$$\tan\xi = \frac{\sin r \sin\psi}{\cos r \sin\vartheta - \sin r \cos\vartheta \cos\psi},$$

woher man zugleich $x = \varphi + \xi$ hat; es ist also klar, dass so $\sin x$ wie $\sin y$ auch in algebraischen Funktionen der Größen $\sin\vartheta$ und $\sin\varphi$ ausgedrückt hervorgehen.

§33 Wenn wir daher nun die Lösung dieses Problems mit einer direkten Methode versuchen wollen, wird mit den Koordinaten x und y zu beginnen sein; weil daher das Element des Bogens CO

$$= \sqrt{dy^2 + dx^2 \sin^2 y}$$

wird, muss zwischen $\sin x$ und $\sin y$ eine solche Relation bestehen und zwar eine algebraische, dass das Integral dieses Elements ein Kreisbogen wird, woher, nachdem dieser Bogen $= r$ gesetzt worden ist, es notwendig ist, dass

$$\sqrt{dy^2 + dx^2 \sin^2 y} = dr$$

wird, oder wenn der Tangens dieses Bogens $r = t$ genannt wird, dass

$$\sqrt{dy^2 + dx^2 \sin^2 y} = \frac{dt}{1+tt}$$

wird; hier wird also eine Methode verlangt, mit deren Hilfe erkannt werden kann, was für eine Relation zwischen $\sin x$ und $\sin y$ bestehen muss, dass diese Bedingung erfüllt wird, oder mit welchen Kunstgriffen diese Untersuchung so gestaltet werden kann, dass verstanden wird, dass, um dies zu leisten, eine neue Variable $\sin\vartheta$ nötig ist, von welcher $\sin\varphi$ irgendeine algebraische Funktion sei, und daher der Winkel ψ abgeleitet werden muss, dass

$$\tan\psi = \frac{d\vartheta}{d\varphi \sin\vartheta}$$

ist, und daher weiter der Bogen r, dass

$$\tan r = \frac{d\vartheta \cdot \sin\vartheta}{d.(\sin\vartheta\cos\psi)}$$

ist, und daher weiter den Winkel ζ, dass

$$\tan\zeta = \frac{\sin r \sin\psi}{\cos r \sin\vartheta - \sin r \cos\vartheta \cos\psi}$$

ist, und nach all dem, dass erkannt wird, dass das Problem gelöst wird, wenn

$$x = \varphi + \zeta \quad \text{und} \quad \cos y = \cos\varphi\cos r + \sin\vartheta\sin r\cos\psi$$

genommen wird. Jedem wird daher sofort klar werden, dass sich dieses Problem auf die unbestimmte Analysis des Unendlichen erstreckt; weil diese bis jetzt noch wenig ausgearbeitet ist, besteht kein Zweifel, dass, wenn wir jene vermisste Methode erforschen können, sich daher die größten Zuwächse auf diesen neuen Teil der Analysis ergießen werden.