

Leonhard Euler

LÖSUNG

Nachdem die vertikale Achse AP genommen worden ist, seien für die gesuchte Kurve die Koordinaten $AP = x$ und $PM = y$, und aus der Natur der Bewegung ist bekannt, dass die Geschwindigkeit im Punkt M dann $= 2\sqrt{gx}$ sein wird, während g die Tiefe des Falls in einer Minutensekunde bezeichnet, sodass $2\sqrt{gx}$ den in einer Minutensekunde mit dieser Geschwindigkeit zu durchquerenden Raum bezeichnet. Weil nun, nach Setzen von $dy = p dx$, das Kurvenelement $Mm = dx\sqrt{1+pp}$ ist, wird die Zeit für das Herabsinken über den Bogen AM

$$= \int \frac{dx\sqrt{1+pp}}{2\sqrt{gx}}$$

sein und das in Minutensekunden ausgedrückt; weil diese ein Minimum sein muss, wenn sie mit jener allgemeinen Formel in der Dissertation *Methodus nova et facilis calculum variationen tractandi*, natürlich mit $\int Z dx$, verglichen wird, gibt sie

$$Z = \frac{\sqrt{1+pp}}{2\sqrt{gx}},$$

und weil wir dort $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$ gesetzt haben, werden wir für unseren Fall

$$M = -\frac{\sqrt{1+pp}}{4x\sqrt{gx}}, \quad N = 0, \quad P = \frac{p}{2\sqrt{gx(1+pp)}}$$

haben; daher, damit der erste Teil der Variation zu Null gemacht wird, muss gelten

$$0 = N - \frac{dP}{dx}, \quad \text{das heißt} \quad \frac{dP}{dx} = 0,$$

woher $P = C$ wird.

§2 Man setze also, um Gleichheit zu erhalten,

$$\frac{p}{2\sqrt{fx(1+pp)}} = \frac{1}{2\sqrt{ga}},$$

dass $p\sqrt{a} = \sqrt{x(1+pp)}$ wird, woher man

$$p = \sqrt{\frac{x}{a-x}} \quad \text{und} \quad \sqrt{1+pp} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-x}}$$

berechnet; nun erhalten wir wegen $dy = p dx$ für die gesuchte Kurve diese Differentialgleichung:

$$dy = dx \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} = \frac{x dx}{\sqrt{ax - xx}},$$

für das Finden des Integrals von welcher man auf der Achse die Strecke $AB = a$ nehme und über AB als Durchmesser beschreibe man den Halbkreis ANB , auf welchem die Ordinate $PN = \sqrt{ax - xx}$ sein wird, daher

$$d \cdot PN = \frac{\frac{1}{2} a dx - x dx}{\sqrt{ax - xx}}$$

und das Differential des Bogens

$$d \cdot AN = \frac{\frac{1}{2} a dx}{\sqrt{ax - xx}},$$

und daraus erschließen wir

$$d \cdot AN - d \cdot PN = \frac{x dx}{\sqrt{ax - xx}} = dy,$$

woher klar ist, dass $PM = y = AN - PN$ gilt; daraus ist es offenkundig, dass die gefundene Kurve eine Zyklode ist, entstanden aus der Rollbewegung eines Kreises, dessen Durchmesser a ist, unterhalb der horizontalen Gerade AC .

§3 Weiter ist auch klar, dass der Bogen der gesuchten Kurve

$$AM = \int dx \sqrt{1+pp} = \int \frac{dx \sqrt{a}}{\sqrt{a-x}} = 2a - 2\sqrt{aa - ax}$$

sein wird. Aber nun, weil $BP = a - x$ ist, wird nach Zeichnen des Strangs BN die mittlere Proportionale zwischen BP und BA dieser Strang $BN = \sqrt{aa - ax}$ sein und so wird der Bogen $AM = 2AB - 2BN$ sein. Man bewege den Punkt P vorwärts bis hin zu B , wonach die Kurve AM sich bis hin zu E erstrecken wird, und E wird der unterste Punkt der Zyklode sein, und dort wird die Ordinate $BE =$ dem Bogen ANB sein, dann aber der Bogen $AME = 2AB$; daher wird

also der Bogen $EM = 2BN$ hervorgehen. Von da aus setze man aber die Kurve AME über E hinaus fort, bis sie schließlich in D zur Horizontalen zurückkehrt, und es wird $AD = 2ANB$ sein.

§4 Weil ja aber die Variation weiter den Term $dt \left(\frac{dy}{dt} \right) P$ enthält, wo P eine konstante Größe ist, ist es ersichtlich, dass dieser Teil der Variation nur verschwindet, wenn $\left(\frac{dy}{dt} \right) = 0$ ist, und erst daraus verstehen wir die wahre Beschaffenheit dieser Frage, nach welcher die gefundene Kurve AM nicht uneingeschränkt unter allen Kurven, sondern nur unter denen, die durch jeden der beiden Endpunkte A und M hindurchgehen, sich der kürzesten Zeit für das Herabsinken erfreut.

§5 Wir wollen aber auch die Zeit selbst ausfindig machen, in welcher der Körper von A aus zu M gelangt, was mit dieser Formel ausgedrückt wird

$$= \int \frac{dx \sqrt{1 - pp}}{2\sqrt{gx}} = \int \frac{dx \sqrt{a}}{2\sqrt{gx(a-x)}} = \frac{1}{\sqrt{ga}} \int \frac{adx}{2\sqrt{ax - xx}} = \frac{1}{\sqrt{ga}} \int d \cdot AN,$$

und so ist die Zeit über den Bogen AM in Minutensekunden ausgedrückt $= \frac{AN}{\sqrt{ga}}$. Daher, wenn das Verhältnis des Durchmessers zur Peripherie $1 : \pi$ gesetzt wird, wird der Bogen $ANB = \frac{1}{2}\pi a$ werden; weiter wird die Zeit des Herabsinkens zum untersten Punkt über den Bogen AE entsprechend $= \frac{\pi\sqrt{a}}{2\sqrt{g}}$ sein, deren Doppeltes die Zeit über den Bogen AED geben wird, welche also $\frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$ ist, die Strecke AD hingegen ist $= \pi$.

§6 Man bemerke hier, dass der Körper, welcher in A geruht hatte, allein durch die Wirkung der Schwerkraft zum Ort D überführt werden kann, wenn man freilich jeglichen Widerstand vernachlässigt; und wenn diese Strecke $AD = s$ genannt wird, dass $a = \frac{s}{\pi}$ ist, wird die Zeit, in welcher der Körper auf diese Weise von A zu D gelangt, $= \frac{\pi s}{\sqrt{g}}$ sein, welches also die Zeit von einer Minutensekunde sein wird, wenn $S = \frac{g}{\pi}$ genommen wird, und dies ist die kürzeste Zeit, in welcher der Körper von A aus zu D überführt werden kann, und um Allgemeinen würde einen Körper auf diese Weise in derselben Zeit über eine beliebige Strecke $AD = s$ geleitet werden, in welcher er aus der Höhe πs herabfallen kann.

§7 Weil ja die Formel, welche in dieser Kurve ein Minimum ist, $\int \frac{dx\sqrt{1+pp}}{2\sqrt{gx}}$ war, erstreckt sie sich auf den Fall, welchen wir in der erwähnten Dissertation in Paragraph 43 betrachtet haben; daher, wenn zu unserer Kurve im Punkt M die Normale $M\omega$ gezeichnet wird, werden alle AM unendlich nahen Kurven, welche gegen diese Gerade $M\omega$ begrenzt sind, auch diese Eigenschaft haben, dass für sie die Variation Null ist, das heißt, dass all jene Kurven in gleichen Zeiten durchlaufen werden, wenn sie freilich, was natürlich sorgsam zu bemerken ist, alle im selben Punkt A beginnen. Also schneidet diese Gerade $M\omega$, die von allen unendlich nahen Kurven synchrone Kurven abtrennt, sie zugleich orthogonal.

§8 Weil ja die für die Kurve AM gefundene Gleichung $dy = \frac{xdx}{\sqrt{ax-xx}}$ noch differentiell ist, wird durch Integration außer der Konstante a eine beliebige andere Konstante eingehen, mit welcher bewirkt werden kann, dass der Anfang der Kurve auf den gegebenen Punkt A fällt; daher, wenn dieser Punkt ein Fixpunkt war, sollte die Integration so durchgeführt werden, dass für $x = 0$ auch $y = 0$ wird. Weil sich aber die Konstante a noch nach Belieben annehmen lässt, ist es offensichtlich, dass unsere Gleichung unendlich viele Kurven enthält, all welche von irgendwelchen beliebigen Kreisen erzeugte Zykloiden beginnend im selben Punkt A , welche alle einander gleich sind; und daher werden wir das folgende Problem auflösen können.

PROBLEM 2

§9 Nachdem über der horizontalen Gerade AD unendlich viele Zykloiden beschrieben worden sind, welche alle in demselben Punkt A beginnen, die Kurve zu finden, die all diese Zykloiden in rechten Winkeln schneidet.

LÖSUNG

§10 Es sei die Kurve AM (Fig. 1) irgendeine dieser Zykloiden, welche aus dem Kreis ANB entstanden sei, dessen Durchmesser oder Radius also hier wie eine Variable zu behandeln ist, dass aus seiner Veränderung die Erzeugung aller übrigen Zykloiden verstanden werden kann. Weil also die Frage darauf zurückgeführt worden ist, dass von all diesen Zykloiden synchrone Bogen AM abgetrennt werden müssen, aber die Zeit des Herabsinkens über den Bogen

AM oben so ausgedrückt gefunden worden ist $= \frac{AN}{\sqrt{ga}} = \frac{AN}{\sqrt{g \cdot AB}}$, müssen in all diesen wie auch immer variierten Kreisen so große Bogen AN abgetrennt werden, dass $\frac{AN}{\sqrt{g \cdot AB}}$ eine konstante Größe ist; aber dann werden aus den einzelnen Punkten N ebenso viele Punkte gefunden werden, indem man $PM = AN - PN$ oder knapper $NM = AN$ nimmt, und all diese Punkte M werden die Trajektorie bestimmen, die wir suchen.

§11 Wir wollen den Radius dieses unbestimmten Kreises $AO = BO = r$ setzen, dass $AB = 2r$ ist, und wir wollen den Winkel $AON = \varphi$ setzen, und der Bogen AN wird $= r\varphi$ und die Ordinate $PN = r \sin \varphi$ sein, die Abszisse AP hingegen $= r(1 - \cos \varphi)$, wenn welche $= x$ und die ihr entsprechende Ordinate $PM = y$ genannt wird, werden wir nun diese Bestimmungen haben:

$$x = r(1 - \cos \varphi) \quad \text{und} \quad y = r(\varphi - \sin \varphi).$$

Aber hier muss eine solche Beziehung zwischen r und φ bestehen, dass der Bruch

$$\frac{AN}{\sqrt{g \cdot AB}} = \frac{r\varphi}{\sqrt{2gr}} = \frac{\varphi\sqrt{r}}{\sqrt{2g}}$$

immer einen konstanten Wert erhält.

§12 Wir wollen also $\varphi\sqrt{r} = \sqrt{c}$ setzen, dass $r = \frac{c}{\varphi^2}$ wird, nach Einführen welches Wertes wir für die Koordinaten der gesuchten Trajektorien diese Formeln haben:

$$AP = x = \frac{c}{\varphi^2}(1 - \cos \varphi) \quad \text{und} \quad PM = y = \frac{c}{\varphi} - \frac{c \sin \varphi}{\varphi^2} = \frac{c}{\varphi^2}(\varphi - \sin \varphi).$$

Daher wird es aber für das Erkennen der Ausrichtung der Kurve förderlich sein, auch die Differentiale angegeben zu haben, welche wie folgt gefunden werden:

$$dx = cd\varphi \left(\frac{\varphi \sin \varphi - 2 + 2 \cos \varphi}{\varphi^3} \right), \quad dy = cd\varphi \left(\frac{-\varphi - \varphi \cos \varphi + 2 \sin \varphi}{\varphi^3} \right),$$

woher der Tangens des Winkels, welchen die Tangente der Trajektorie in M mit der Achse AB bildet, wie folgt hervorgeht:

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{-\varphi - \varphi \cos \varphi + 2 \sin \varphi}{2 - 2 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi} = \frac{\varphi(1 + \cos \varphi) - 2 \sin \varphi}{\varphi \sin \varphi - 2(1 - \cos \varphi)},$$

welcher Bruch auf diesen reduziert wird:

$$\frac{\cos \frac{1}{2}\varphi(\varphi \cos \frac{1}{2}\varphi - 2 \sin \frac{1}{2}\varphi)}{\sin \frac{1}{2}\varphi(\varphi \cos \frac{1}{2}\varphi - 2 \sin \frac{1}{2}\varphi)},$$

sodass wir $\frac{dy}{dx} = -\cot \frac{1}{2}\varphi$ haben; daher ist klar, dass jener Winkel, dessen Tangens $-\frac{dy}{dx}$ ist, $= 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$ sein wird. Daher wird weiter, wenn das Kurvenelement ds genannt wird, $\frac{dx}{ds} = \sin \frac{1}{2}\varphi$ und $\frac{dy}{ds} = -\cos \frac{1}{2}\varphi$ sein, woher man

$$\begin{aligned} ds &= cd\varphi \frac{(\varphi \sin \varphi - 2(1 - \cos \varphi))}{\varphi^3 \sin \frac{1}{2}\varphi} \\ &= 2cd\varphi \frac{(\varphi \cos \frac{1}{2}\varphi - 2 \sin \frac{1}{2}\varphi)}{\varphi^3} \end{aligned}$$

berechnet, woher wir mit Reduktionen erhalten:

$$\frac{s}{2c} = \frac{\sin \frac{1}{2}\varphi}{\varphi^2} + \int \frac{1}{2} \frac{d\varphi \cos \frac{1}{2}\varphi}{\varphi} = \frac{\sin \frac{1}{2}\varphi}{\varphi^2} - \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{1}{2}\varphi}{\varphi} - \frac{1}{4} \int \frac{d\varphi \sin \frac{1}{2}\varphi}{\varphi},$$

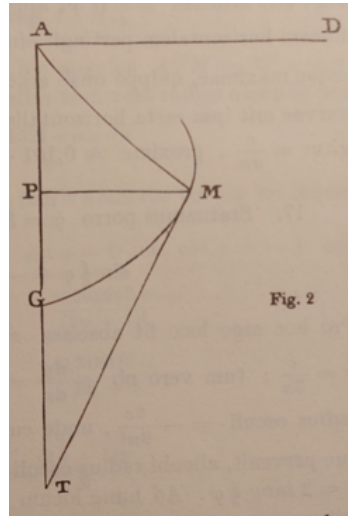
schließlich ist der Krümmungsradius der Trajektorie im Punkt M

$$4c \frac{(\varphi \cos \frac{1}{2}\varphi - 2 \sin \frac{1}{2}\varphi)}{\varphi^3},$$

welcher also auch auf diese Weise ausgedrückt werden kann:

$$\frac{2ds}{d\varphi} = \frac{2dx}{d\varphi \sin \frac{1}{2}\varphi} = -\frac{2dy}{d\varphi \cos \frac{1}{2}\varphi} = -\frac{dx}{d \cdot \cos \frac{1}{2}\varphi} = +\frac{dy}{d \cdot \sin \frac{1}{2}\varphi}.$$

§13 Nachdem diese Dinge im Voraus bemerkt worden sind, wollen wir die wesentlichen Eigenschaften und Beschaffenheiten dieser Trajektorie untersuchen, und zuerst wollen wir freilich den Winkel $\varphi = 0$ oder unendlich klein annehmen, und wir werden die Abszisse $x = \frac{c}{2}$ und die Ordinate $y = 0$ finden. Man nehme also (Fig. 2) auf der vertikalen Achse die Höhe $AG = \frac{1}{2}c$ nehmen, und der Punkt G wird der Anfang der nach oben laufenden Trajektorie sein, die wegen $\frac{dy}{dx} = \infty$ normal zur Vertikalen sein wird;



Der Scan zeigt die entsprechende Figur aus der Opera Omnia Version.

aber der Krümmungsradius in diesem Punkt G wird

$$4c \frac{(\varphi \cos \frac{1}{2}\varphi - 2 \sin \frac{1}{2}\varphi)}{\varphi^3}$$

sein, und nachdem $\varphi = 0$ gesetzt worden ist, wird dieser Wert $= \frac{1}{3}c = \frac{2}{3}AG$ gefunden. Hier wird es förderlich sein bemerkt zu haben, dass die Zeit des Herabsinkens aus dieser Höhe AG genau mit der Zeit aller synchronen Bogen AM übereinstimmt.

§14 Während der Winkel φ wächst, neigt sich diese Kurve nach oben, um wessen Verlauf zu erkennen, wollen wir den Winkel $\varphi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ nehmen, und es wird $\sin \frac{1}{2}\varphi = \cos \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sein, woher die Abszisse $x = \frac{4c}{\pi}$ und die Ordinate $y = \frac{4c}{\pi^2} (\frac{\pi}{2} - 1)$ ist; an dieser Stelle ist weiter $-\frac{dy}{dx} = 1$, was anzeigt, dass die Tangente in diesem Punkt mit der Ordinate ein halbrechten Winkel bildet. Hier wird der Krümmungsradius $\frac{16c(\pi-4)}{\pi^3\sqrt{2}}$ sein oder nach Ändern der Vorzeichen, wie wir es auch für den Punkt G gemacht haben, wird der Krümmungsradius $= \frac{16c(4-\pi)}{\pi^3\sqrt{2}}$ sein, dessen Wert näherungsweise $0,313 \cdot c$ ist und daher ein wenig kleiner als der im Punkt G.

§15 Wir wollen nun $\varphi = 180^\circ = \pi$ nehmen, und die Abszisse wird als $x = \frac{2c}{\pi}$ und die Ordinate als $y = \frac{c}{\pi}$ hervorgehen; aber dann wird $-\frac{dy}{dx} = 0$,

woher die Tangente der Kurve in diesem Punkt vertikal sein wird und deshalb wird die Ordinate PM die größte von allen sein. Aber in Dezimalmalbrüchen findet man für diesen Punkte die Abszisse $x = 0,2026 \cdot c$ und $y = 0,318 \cdot c$. Schließlich wird der Krümmungsradius in diesem Punkt nach Ändern des Vorzeichens $= \frac{8c}{\pi^3}$, also näherungsweise $= -0,258 \cdot c$, sein und so schrumpft die Krümmung ununterbrochen.

§16 Wir wollen nun $\varphi = 2\pi$ setzen, dass $\sin \frac{1}{2}\varphi = 0$, $\cos \frac{1}{2}\varphi = -1$ wird; dort wird also die Abszisse $x = 0$ und die Ordinate $y = \frac{c}{2\pi}$ sein. Hier gelangt also die Kurve zur höchsten horizontalen Linien und ihr Abstand vom Punkt A ist Hälfte der größten Ordinate, welche natürlich $\frac{c}{\pi}$ war. Weil also hier $-\frac{dy}{dx} = \infty$ wird, wird die Tangente der Kurve die oberes horizontale Gerade sein. An dieser Stelle berechnet man den Krümmungsradius $= \frac{c}{\pi\pi}$, näherungsweise $0,101 \cdot c$, sodass die Krümmung noch weiter verringert wird.

§17 Wir wollen weiter $\varphi = 3\pi$ setzen, dass

$$\sin \frac{1}{2}\varphi = -1 \quad \text{und} \quad \cos \frac{1}{2}\varphi = 0$$

ist. An dieser Stelle wird also die Abszisse $x = \frac{2c}{9\pi^2}$, also näherungsweise $= 0,022 \cdot c$, und die Ordinate $y = \frac{c}{3\pi}$; dann wird aber wegen $-\frac{dy}{dx} = 0$ die Tangente an dieser Stelle vertikal und der Krümmungsradius $= -\frac{8c}{9\pi^3}$ sein, woher die Kurve nun die Krümmung ändert und, bevor sie hierhin gelangt, irgendwo anders der Krümmungsradius notwendigerweise verschwunden ist, was passiert, indem man $\varphi = 2 \tan \frac{1}{2}\varphi$ nimmt. Um diesen Ort zu finden, wollen wir festlegen, dass $\varphi = 3\pi - \omega$ war und es wird

$$3\pi - \omega = 2 \tan \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\omega}{2} \right) = \cot \frac{1}{2}\omega$$

sein, woher klar ist, dass der Winkel ω hinreichend klein ist. Dort muss aber die Kurve notwendig einen Wendepunkt haben, von welchem aus sie durch Umkehren nach oben zu dem Ort gelangt, welchen wir hier bestimmt haben.

§18 Indem wir nun $\varphi = 4\pi$ setzen, in welchem Fall

$$\sin \frac{1}{2}\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \cos \frac{1}{2}\varphi = 1$$

wird, wird die Abszisse $x = 0$ und die Ordinate $y = \frac{c}{4\pi}$, und hier wird wegen $-\frac{dy}{dx} = \infty$ die Tangente wiederum horizontal, welche natürlich wegen der vorhergehenden Spitze negativ ist. Hier ist also die Krümmung viermal größer als im Fall $\varphi = 2\pi$.

§19 Wir wollen nun im Allgemeinen $\varphi = 2n\pi$ setzen, während n eine beliebige ganze Zahl ist, und wegen $\sin \varphi = 0$ und $\cos \varphi = 1$ wird die Abszisse $AP = x = 0$ und die Ordinate

$$PM = y = \frac{c}{2n\pi} = \frac{0,159155 \cdot c}{n}$$

sein, weil weiter

$$-\frac{dy}{dx} = \cot \frac{1}{2}\varphi = \tan ATM$$

ist, sodass der Winkel $ATM = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$ ist, wird dieser Winkel $ATM = 90^\circ - n\pi$ sein, das heißt ein rechter, oder die Tangente MT wird horizontal sein; aber dann wird der Krümmungsradius an dieser Stelle

$$= -\frac{c \cos n\pi}{nn\pi\pi} = -\frac{0,101321 \cdot c \cos n\pi}{nn}$$

sein, wo $\cos n\pi$ entweder $+1$ oder -1 ist, je nachdem ob n eine gerade oder ungerade Zahl war.

§20 Aber wenn $\varphi = (2n+1)\pi$ war, wird wegen $\sin \varphi = 0$ und $\cos \varphi = -1$ die Abszisse

$$AP = x = \frac{2c}{(2n+1)^2\pi\pi} = \frac{0,202642 \cdot c}{(2n+1)^2}$$

und die Ordinate

$$PM = y = \frac{c}{(2n+1)\pi} = \frac{0,318310 \cdot c}{2n+1}$$

sein, weiter geht der Winkel ATM

$$= 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi = 90^\circ - \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

hervor, oder die Tangente wird an diesen Stellen vertikal sein. Schließlich findet man den Krümmungsradius

$$= \frac{8c \sin\left(\frac{2n+1}{2}\right) \pi}{(2n+1)^3 \cdot \pi^3} = \frac{0,258012c \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi}{(2n+1)^3},$$

wo $\sin\left(n + \frac{1}{2}\pi\right)$ entweder $+1$ oder -1 ist, je nachdem ob n entweder gerade oder ungerade war.

§21 Nun haben wir beobachtet, dass ein wenig vor diesen Stellen der Krümmungsradius verschwindet und dort die Kurve mit einer Spitze beschenkt ist; also wird es der Mühe Wert sein, diese Spitzen ausfindig gemacht zu haben. Aus dieser allgemeinen Formel ist es klar, dass der Krümmungsradius verschwindet, sooft

$$\varphi = 2 \tan \frac{1}{2} \varphi = \frac{2 \sin \varphi}{1 + \cos \varphi} = \frac{2(1 - \cos \varphi)}{\sin \varphi}$$

war, welche Gleichung unzählige Lösungen zulässt, wie wir bald sehen werden. Nun ist aber für diese Fälle sofort offensichtlich, dass

$$\text{die Ordinate } x = \frac{c \sin^2 \varphi}{4(1 - \cos \varphi)} = \frac{c(1 + \cos \varphi)}{4} \text{ und die Ordinate } y = \frac{1}{4}c \cdot \sin \varphi$$

sein wird; aber dann ist in diesen Spitzen die Tangente zur Vertikalen im Winkel $= 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$ und daher sogar zur Horizontalen AD im Winkel $= \frac{1}{2}\varphi$ geneigt.

§22 Weil diese Spitzen ja an den Stellen gefunden werden, wo der Winkel φ ein wenig kleiner ist als $(2n+1)\pi$, wollen wir, um sie zu finden,

$$\varphi = (2n+1)\pi - 2\omega$$

setzen, dass $\frac{1}{2}\varphi = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi - \omega$ ist, welcher Bogen also

$$= \tan \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi - \omega \right) = \frac{1}{\tan \omega} = \frac{\cos \omega}{\sin \omega}$$

werden muss, sodass man diese Gleichung hat:

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi - \omega = \frac{\cos \omega}{\sin \omega},$$

aus welchem man alle Werte des Winkels ω suchen muss; hier ist sofort klar, wenn die Zahl n unendlich war, dass $\omega = 0$ sein wird; daraus sieht man ein, je größer die Zahl n wird, dass der Winkel ω desto größer hervorgehen wird. Wir wollen also der Kürze wegen $\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi = \alpha$ setzen und durch Multiplizieren mit $\sin \omega$ werden wir

$$\alpha \sin \omega - \omega \sin \omega = \cos \omega$$

haben; aber weil der Winkel ω hinreichend klein ist und daher näherungsweise

$$\sin \omega = \omega - \frac{1}{6}\omega^3 + \frac{1}{120}\omega^5 \quad \text{und} \quad \cos \omega = 1 - \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{24}\omega^4,$$

wird unsere Gleichung diese Form annehmen:

$$0 = 1 - \alpha\omega + \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{6}\alpha\omega^3 - \frac{1}{8}\omega^4 - \frac{1}{120}\alpha\omega^5 + \frac{1}{144}\omega^6 + \frac{1}{5040}\alpha\omega^7.$$

§23 Wenn die Terme nach den zwei ersten vernachlässigt werden, folgt $\omega = \frac{1}{\alpha}$, welcher Wert also näherungsweise wahr ist; für den wahren Wert wollen wir also

$$\omega = \frac{1}{\alpha} + \frac{A}{\alpha^3} + \frac{B}{\alpha^5} + \frac{C}{\alpha^7}$$

setzen, dessen Potenzen

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{1}{\alpha^2} + \frac{2A}{\alpha^4} + \frac{2B + AA}{\alpha^6} \\ \omega^3 &= \frac{1}{\alpha^3} + \frac{3A}{\alpha^5} + \frac{3AA + 3B}{\alpha^7} \\ \omega^4 &= \frac{1}{\alpha^4} + \frac{4A}{\alpha^6} \\ \omega^5 &= \frac{1}{\alpha^5} + \frac{5A}{\alpha^7} \\ \omega^6 &= \frac{1}{\alpha^6} \\ \omega^7 &= \frac{1}{\alpha^7}\end{aligned}$$

geben werden. Man setze also diese Werte ein und ordne die Terme entsprechend der Potenzen von α auf die folgende Weise in Spalten an:

$\frac{1}{\alpha^0}$	$\frac{1}{\alpha^2}$	$\frac{1}{\alpha^4}$	$\frac{1}{\alpha^6}$
1			
-1	-A	-B	-C
	$+\frac{1}{2}$	$+1A$	$+\frac{2B+AA}{2}$
	$+\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{2}A$	$+\frac{AA}{2}+\frac{B}{2}$
		$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}A$
		$-\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{24}A$
			$+\frac{1}{144}$
			$+\frac{1}{5040}$

Weil die erste Spalte per se verschwindet, mache man die einzelnen der folgenden jeweils zu Null, woher die folgenden Gleichungen hervorgehen werden:

$$-A + \frac{2}{3} = 0, \quad B + \frac{3}{2}A - \frac{2}{15} = 0, \quad -C + \frac{3}{2}B + AA - \frac{13}{24}A + \frac{1}{140} = 0.$$

Aus der ersten von diesen findet man $A = \frac{2}{3}$, welcher Wert in der zweiten eingesetzt

$$B = \frac{13}{15} \quad \text{und} \quad -C + \frac{13}{10} + \frac{4}{9} - \frac{13}{36} + \frac{1}{140} = 0$$

gibt, woher

$$C = \frac{146}{105}$$

ist.

§24 Nachdem diese gefunden worden sind, wird deshalb der gesuchte Winkel ω so ausgedrückt, dass

$$\omega = \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\alpha^3} + \frac{13}{15 \cdot \alpha^5} + \frac{146}{105 \cdot \alpha^7}$$

ist, während $\alpha = (2n + \frac{1}{2}) \pi$ ist; hier ist zu bemerken, dass der Bogen ω auf diese Weise in Kreisanteilen ausgedrückt wird; daher wird er in Minutensekunden gefunden werden, wenn vom Logarithmus von ω der Wert 4,6855749 abgezogen wird. Wir werden diese Reduktion aber sofort erhalten, wenn von den Logarithmen jener vier Zahlen dieser konstante Logarithmus sofort abgezogen wird; natürlich ist

der Logarithmus des ersten Bruchs	5,3144251 – $\log \alpha$,
der Logarithmus des zweiten Bruchs	5,1383338 – $3 \log \alpha$,
der Logarithmus des dritten Bruchs	5,2522772 – $5 \log \alpha$,
und der Logarithmus des vierten Bruchs	5,1712615 – $7 \log \alpha$.

§25 Wir wollen nun für n nacheinander 1, 2, 3, 4 etc. nehmen und, weil $\pi = 3,14159265$ etc. ist, werden wir die folgenden Werte für den Logarithmus α haben:

		woher man findet
für $n = 1$	ist $\log \alpha = 0,6732411$	$\omega = 12^\circ 32' 24''$
für $n = 2$	ist $\log \alpha = 0,8950898$	$\omega = 7^\circ 22' 32''$
für $n = 3$	ist $\log \alpha = 1,0412178$	$\omega = 5^\circ 14' 23''$
für $n = 4$	ist $\log \alpha = 1,1503623$	$\omega = 4^\circ 3' 59''$
für $n = 5$	ist $\log \alpha = 1,2375225$	$\omega = 3^\circ 19' 24''$

§26 Weil wir also $\varphi = (2n + 1)\pi - 2\omega$ gesetzt hatten, werden wir für eine beliebige Spitze Abszisse

$$x = \frac{1}{4}c(1 - \cos 2\omega) = \frac{1}{2}c \sin^2 \omega$$

und die Ordinate

$$y = \frac{1}{4}c \sin 2\omega = \frac{1}{2}c \sin \omega \cos \omega$$

haben, sodass $\frac{x}{y} = \tan \omega$ ist; weiter aber der Winkel $ATM = \omega - n\pi = n\pi + \omega$ oder einfach $= \omega$, aus welchen die Lage der einzelnen Spitzen bekannt wird.

PROBLEM 3

§27 Im Allgemeinen die Brachistochronen ausfindig zu machen, auf welche Weise auch immer die Geschwindigkeit über die beiden Koordinaten x und y bestimmt wird.

LÖSUNG

§28 Es sei AM die gesuchte Brachistochrone, in deren Punkt M die Geschwindigkeit eine beliebige Funktion der Koordinaten x und y sei, welche wir $= \frac{1}{v}$ setzen wollen, und es sei $dv = m dx + n dy$. Weil also die Zeit über den Bogen AM

$$\int v dx \sqrt{1 + pp}$$

ist und diese ein Minimum sein muss, wird in unserer allgemein Form $Z = v \sqrt{1 + pp}$ und daher

$$M = m \sqrt{1 + pp}, \quad N = n \sqrt{1 + pp} \quad \text{und} \quad P = \frac{vp}{\sqrt{1 + pp}};$$

daher, weil für die gesuchte Kurve $0 = N - \frac{dP}{dx}$ ist, werden wir die folgende Gleichung haben:

$$\begin{aligned} 0 &= n dx \sqrt{1 + pp} - d \cdot \left(\frac{vp}{\sqrt{1 + pp}} \right) \\ &= n dx \sqrt{1 + pp} - \frac{p(m dx + n dy)}{\sqrt{1 + pp}} - \frac{v dp}{(1 + pp)^{3/2}} \end{aligned}$$

haben, welche auf die Form

$$\frac{n dx - m dy}{v} = \frac{dp}{1 + pp}$$

reduziert wird, in welchen Fällen sich welche integrieren lässt, wir ausfindig machen wollen.

§29 Um den ersten Teil integrierbar zu machen, wollen wir mit

$$\frac{dv}{ndx - mdy} = \frac{mdx + ndy}{ndx - mdy} = \frac{m + np}{n - mp}$$

multiplizieren, dass diese Gleichung hervorgeht

$$\frac{dv}{v} = \frac{dp(m + np)}{(1 + pp)(n - mp)},$$

für welche sich sofort zwei Fälle auftun, in welchen sie eine Integration zulässt: der eine, wenn $n = 0$, der andere, wenn $m = 0$ ist; diese beiden wollen wir als gegebene Aufgabe entwickeln.

§30 Es sei also zuerst $n = 0$, was passiert, wenn v eine Funktion nur von x war, welche $v = X$ sei; und dann wird unsere Gleichung sein:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dX}{X} = -\frac{dp}{p(1 + pp)},$$

deren Integral

$$LX = L\sqrt{1 + pp} - Lp + LA$$

ist, und so wird $X = \frac{A\sqrt{1+pp}}{p}$ werden, woher man

$$p = \frac{A}{\sqrt{XX - AA}} \quad \text{und} \quad \sqrt{1 + pp} = \frac{X}{\sqrt{XX - AA}}$$

berechnet; aber dann resultiert wegen $dy = p dx$ für die Brachistochrone die Gleichung

$$dy = \frac{A dx}{\sqrt{XX - AA}};$$

hier ist zu bemerken, dass die beliebige Konstante A unendlich viele Brachistochronen von dieser Art erfasst. Aber die Integration kann so ausgeführt werden, dass die Kurve in einen gegebenen Punkt, eines Beispiels wegen in A , beginnt; aber die Formel für das Minimum hingegen wird für diesen Fall

$$\int \frac{X^2 dx}{\sqrt{XX - AA}}$$

sein.

§31 Es sei nun $m = 0$ oder v eine Funktion allein von y , welche $v = Y$ sei, und unsere Gleichung wird:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dY}{Y} = \frac{pdp}{1 + pp'},$$

deren Integral

$$LC = L\sqrt{1 + pp} + LA \quad \text{oder} \quad Y = A\sqrt{1 + pp}$$

ist, woher

$$p = \frac{\sqrt{YY - AA}}{A} \quad \text{und} \quad \sqrt{1 + pp} = \frac{Y}{A}$$

wird. Daher wird wegen $p = \frac{dy}{dx}$ die Gleichung zwischen den Koordinaten zu

$$dx = \frac{A dy}{\sqrt{YY - AA}}$$

berechnet; aber die Formel für das Minimum für diese Kurven wird

$$\int \frac{Y^2 dy}{\sqrt{YY - AA}}$$

sein, welcher Fall sich vom vorhergehenden überhaupt nicht abweicht und aus ihm allein durch Vertauschen der Koordinaten sofort hätte abgeleitet werden können. Überdies kann es hier wiederum bewirkt werden, dass all diese Kurven in demselben gegebenen Punkt beginnen.

§32 Außer diesen zwei Fällen ist aber noch ein dritter auf diese Weise zu findender Fall gegeben: der andere Term $\frac{dp(m+np)}{(1+pp)(n-mp)}$ werde in zwei Brüche aufgelöst, von welchen der Nenner des einen $1 + pp$ sei, des anderen hingegen $n - mp$, und man wird diese Gleichung finden:

$$\frac{dv}{v} = \frac{pdp}{1 + pp} + \frac{mdp}{n - mp},$$

welche natürlich integrierbar ist, wenn $m = x$ und $n = y$ war, welches selbe passiert, wenn $m = sx$ und $n = sy$ war; denn dann gibt unsere Gleichung

$$\frac{dv}{v} = \frac{pdp}{1+pp} + \frac{xdp}{y-px}$$

integriert

$$Lv = L\sqrt{1+pp} - L(y-px) + LA$$

oder $v = \frac{A\sqrt{1+pp}}{y-px}$. Nun muss aber die Größe v aus dieser Bedingung bestimmt werden:

$$dv = s(xdx + ydy);$$

daher ist es ersichtlich, dass s eine Funktion von $\sqrt{xx + yy}$ sein muss, woher auch v einer Funktion derselben Form $\sqrt{xx + yy}$ gleich werden wird. Hier ist es freilich ersichtlich, dass anstelle von x und y auch $x + a$ und $y + b$ hätte genommen werden können: Aber weil hier die Kurven nicht verändert werden würden, sondern nur die Lage der Achse, wäre es überflüssig diese Veränderung zu betrachten. Daher, wenn der Anfang dieser Kurven gegeben ist, wie beispielsweise in A , dann ist es nicht notwendig, dass für diesen Punkt $x = 0$ und $y = 0$ ist, sondern es können beliebige konstante Größen zugelassen werden.

§33 Wenn also v irgendeine Funktion der Größe $\sqrt{xx + yy}$ war, werden wir für die Brachistochronen diese Gleichung haben:

$$v(y - px) = A\sqrt{1 + pp},$$

aus welcher wir

$$p = \frac{vvxy \pm A\sqrt{vv(xx + yy) - AA}}{vvxx - AA}$$

finden. Weil nun $p = \frac{dy}{dx}$ ist, erhalten wir diese Differentialgleichung:

$$dy(vvxx - AA) = vvxydx \pm Adx\sqrt{vv(xx + yy) - AA},$$

wie welche behandelt werden muss, aus dieser Form kaum klar ist.

§34 Wir wollen aber die folgende Substitution gebrauchen: Wir wollen

$$\sqrt{xx + yy} = u \quad \text{und} \quad y = tx$$

setzen, so dass die Gleichung nur auf die zwei Variablen t und u zurückzuführen ist; aber durch sie werden x und y so bestimmt, dass

$$x = \frac{u}{\sqrt{1 + tt}} \quad \text{und} \quad y = \frac{tu}{\sqrt{1 + tt}}$$

ist, aus deren Differentialen man

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{tdu(1 + tt) + udt}{du(1 + tt) - utdt}$$

berechnet, welche Werte im oberen für p gefundenen Ausdruck eingesetzt

$$\frac{tdu(1 + uu) + udt}{du(1 + tt) - utdt} = \frac{vvtuu \pm A(1 + tt)\sqrt{vvuu - AA}}{vvuu - AA(1 + tt)}$$

liefern, welche von Brüchen befreit in diese übergeht:

$$\begin{aligned} & udt(vvuu - AA(1 + tt)) + tdu(1 + tt)(vvuu - AA(1 + tt)) \\ &= -utdt(vvtuu \pm A(1 + tt)\sqrt{vvuu - AA}) \\ &+ du(1 + tt)(vvtuu \pm A(1 + tt)\sqrt{vvuu - AA}) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 0 &= udt(1 + tt)(vvuu - AA \pm At\sqrt{vvuu - AA}) \\ &- Adu(1 + tt)^2(At \pm \sqrt{vvuu - AA}). \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird auf diese zurückgeführt:

$$\frac{dt}{1 + tt} = \frac{Adu(At \pm \sqrt{vvuu - AA})}{u(vvuu - AA \pm At\sqrt{vvuu - AA})},$$

welche natürlich in diese Form überführt wird

$$\frac{dt}{1 + tt} = \pm \frac{Adu}{u\sqrt{vvuu - AA}},$$

wo die beiden Variablen t und u voneinander getrennt sind, und daher lassen sich die Kurven konstruieren.

§35 Ob außer diesen Fällen keine anderen gegeben sind, welche eine Konstruktion zulassen, bezweifeln wir zurecht, wenn nicht zufällig jemand Fälle von solcher Art hinzufügen will, welche durch Ändern der Koordinaten resultieren, während die Kurven völlig dieselben bleiben. So wird die zuerst gefundene Gleichung

$$\frac{dv}{v} = \frac{dp(m + np)}{(1 + pp)(n - mp)}$$

auch integrierbar, wenn man $m = \alpha s$ und $n = \beta s$ nimmt, weil freilich daraus die Gleichung entspringt:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dp(\alpha + \beta p)}{(1 + pp)(\beta - \alpha p)} = \frac{pdp}{1 + pp} + \frac{\alpha dp}{\beta - \alpha p},$$

deren Integral

$$Lv = L\sqrt{1 + pp} - L(\beta - \alpha p) + LA \quad \text{oder} \quad v = \frac{A\sqrt{1 + pp}}{\beta - \alpha p}$$

wird. Weil ja aber dann $dv = s(\alpha dx + \beta dy)$ wird, ist es ersichtlich, dass die Größe v eine Funktion der Formel $\alpha x + \beta y$ sein wird. Daher, wenn die Koordinaten so verändert werden, dass $\alpha x + \beta y$ nun die Abszisse selbst wird, wird man einen Fall haben, in welchem v eine beliebige Funktion der Abszisse ist, welcher also mit unserem ersten Fall übereinstimmt.

§36 Diese nicht gerade wenig lästige Rechnung kann auf die folgende Weise leichter erledigt werden. Weil

$$p = \frac{tdu(1 + tt) + udt}{du(1 + tt) - utdt}$$

ist, wird

$$y - px = -\frac{uudt\sqrt{1 + tt}}{du(1 + tt) - utdu} \quad \text{und} \quad \sqrt{1 + pp} = \frac{\sqrt{(1 + tt)((1 + tt)du^2 + uudt^2)}}{du(1 + tt) - utdt}$$

sein, woher die zuerst gefundene Gleichung

$$v(y - px) = A\sqrt{1 + pp}$$

in diese überführt wird:

$$-vuudt = A\sqrt{(1+tt)du^2 + uudt^2},$$

aus welcher man Nehmen von Quadraten

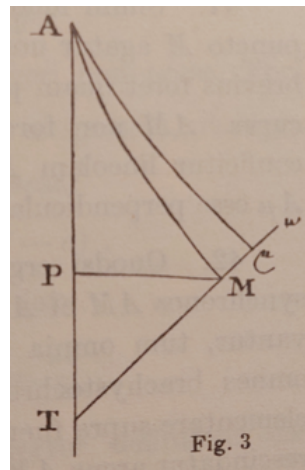
$$\frac{dt}{1+tt} = \pm \frac{A}{u\sqrt{vvuu - AA}}$$

findet, vollkommen wie zuvor. Überdies ist es ersichtlich, dass diese Kurve eine Brachistochrone für die Zentripetalkraft proportional einer beliebigen Funktion der Abstände ist.

§37 In diesen drei Fällen lässt sich also die Lösung auf Differentialgleichungen ersten Grades zurückführen, welche wegen der Konstante A , wenn sie stetig variiert wird, unendlich viele Kurven von dieser Gattung umfasst; und wenn diese Gleichungen erneut integriert werden, wird die neue einzuführende Konstante aus dem gegebenen Anfang einer gewissen Kurve bestimmt werden können. Auf diese Weise kann man also bewirken, dass all jene unendlich vielen Brachistochronen ihren Ursprung aus demselben Punkt A nehmen, und auf diesen Fall bezieht sich das folgende Problem.

PROBLEM 4

§38 Nachdem in der Ebene (Fig. 3) unendlich viele Brachistochronen AM beschrieben worden sind, die Kurven zu finden, welche jene orthogonal durchlaufen.

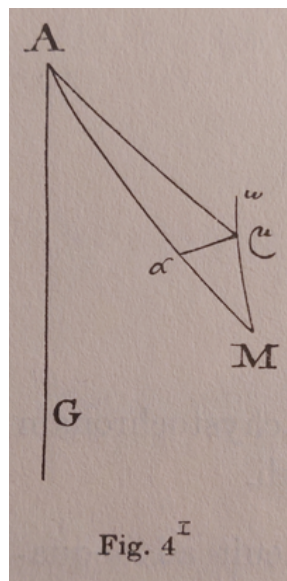


Der Scan zeigt die entsprechende Figur aus der Opera Omnia Version.

LÖSUNG

§39 Es sei AM irgendeine dieser Brachistochronen, zu welcher man im Punkt M die normale Gerade Ma festlege, und oben haben wir gezeigt, wenn unendlich viele andere Linien $A\mu$, die AM unendlich nahe und gegen diese Gerade Ma begrenzt sind und welche freilich in demselben Punkt A beginnen, aufgefasst werden, dass dann die Variation der Zeit für sie alle Null sein wird oder die Zeit über die sehr nahe Strecke $A\mu$ genau der Zeit über AM gleich ist, wo auch immer der Punkt μ auf der Gerade Ma angenommen wird, solange er M unendlich nahe war. Aber damit es nicht nötig ist, den Beweis dieser Wahrheit weiter auszudehnen, wollen wir ihn hier kürzer aus der Natur der Brachistochronen lehren.

§40 Natürlich ist zu zeigen, damit die unendlich nahen Bogen (Fig. 4.I) AM und $A\mu$ isochron sind, dass das Element $m\mu$ notwendig zu beiden Kurven normal sein muss. Wenn nämlich jemand dies verneint, hat er den Winkel $AM\mu$ entweder als spitz oder stumpf festzulegen; aber beides würde auf die folgende Weise ad Absurdum geführt werden.

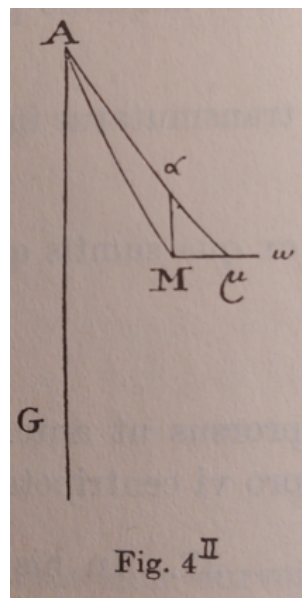


Der Scan zeigt die entsprechende Figur aus der Opera Omnia Version.

Es sei nämlich der Winkel $AM\mu$ zuerst spitz, und zu $M\mu$ ziehe man vom Punkt μ aus die Normale $\mu\alpha$, welche die Kurve AM in α trifft, und es wird $\alpha\mu < \alpha M$

sein; daher, wenn der Körper den Weg $A\alpha\mu$ durchläuft, wird er ihn in kürzerer Zeit zurücklegen als den Weg $A\alpha M$, weil bei beiden die Geschwindigkeit in α dieselbe ist, aber der Raum $\alpha\mu$ kürzer ist als αM . Weil also per Annahme die Zeit über die Kurve $A\mu$ gleich der Zeit über AM ist, wäre nun die Zeit über $A\alpha\mu$ kürzer als die Zeit über $A\mu$, und daher wäre die Linie $A\mu$ keine Brachistochrone, entgegen der Annahme, weil wir ja hier angenommen haben, dass die Kurve $A\mu$ eine AM unendlich nahe Brachistochrone ist.

§41 In gleicher Weise (Fig. 4.II), wenn der Winkel $AM\mu$ stumpf war, ziehe man zu $M\mu$ vom Punkt M die Normale $M\alpha$, es wird $\alpha M < \alpha\mu$ sein; daher wäre die Zeit über den Weg $A\alpha M$ kürzer als über $A\alpha\mu$, und daher auch kürzer als über AM , und daher wäre die Kurve AM keine Brachistochrone, ebenfalls entgegen der Annahme. Daher folgert man, dass die Linie $M\mu$ notwendig zu beiden Brachistochronen AM und $A\mu$ senkrecht ist.



Der Scan zeigt die entsprechende Figur aus der Opera Omnia Version.

§42 Wenn wir also von all unseren Brachistochronen (Fig. 3) die synchronen Bogen AM und $A\mu$ abtrennen, welche natürlich alle in derselben Zeit durchlaufen werden, dann werden alle Punkte $M\mu$ auf einer Kurve solcher Art gefunden werden, die alle Brachistochronen in rechten Winkeln schneiden wird. Weil also die Elementarzeit oben $vdx\sqrt{1+pp}$ war, trenne man von einer

beliebigen der Brachistochronen AM einen Bogen AM ab, für welchen die Integralformel $\int v dx \sqrt{1 + pp}$ einen gegebenen Wert erhält, sei er C . Daher ist es zugleich ersichtlich, wenn auch diese GröÙe C variiert wird, dass auf diese Weise unendlich viele orthogonale Trajektorien hervorgehen werden.

§43 Damit diese Dinge klarer gemacht werden, wollen wir den ersten oben in Paragraph 30 beschriebenen Fall betrachten, in welchem wir für die Brachistochronen diese Differentialgleichung gefunden haben

$$dy = \frac{A dx}{\sqrt{XX - AA}};$$

hier ergibt die Variabilität des Buchstaben A unsere unendlich vielen Brachistochronen; aber darüber hinaus muss diese absolut notwendige Bedingung hinzugefügt werden, dass all diese Kurven denselben gemeinsamen Anfang im Punkt A haben. Nachdem dies also bemerkt worden ist, nehme man den Punkt M so, dass die Integralformel $\int \frac{XX dx}{\sqrt{XX - AA}}$ einen gegebenen Wert erhält, wie C ; hier ist natürlich sorgsam festzuhalten, dass dieses Integral so genommen werden muss, dass es im Anfang A verschwindet; aber dann wird er Punkt M zugleich auf der Trajektorie sein.

§44 Um die Angelegenheit an einem Beispiel zu illustrieren, wollen wir $X = \sqrt{x}$ und $A = \sqrt{a}$ nehmen, dass man für die zu schneidenden Kurven die Gleichung $dy = \frac{dx \sqrt{a}}{\sqrt{x-a}}$ hat oder durch Integrieren

$$2\sqrt{ax - aa} = y + \text{Const.},$$

wo die Konstante so bestimmt werden muss, dass alle Kurven im selben Punkt A beginnen. Wir wollen also festlegen, dass für diesen Fall $x = f$ $y = g$ wird, sodass diese Buchstaben in keinsten Weise von a abhängen. Daher, damit das passiert, muss jene Konstante $2\sqrt{af - aa} - g$ sein; und so hat man für die zu schneidenden Kurven diese Gleichung:

$$2\sqrt{ax - aa} - 2\sqrt{af - aa} = y - g;$$

hier ist es ersichtlich, dass der Buchstabe a , wenn auch variabel, nicht über f hinaus vermehrt werden können. Aber dann wird man für die Trajektorien $\int \frac{x dx}{\sqrt{x-a}} = C$ nehmen müssen, und durch Integrieren, wie es oben beschrieben worden ist, natürlich, dass das Integral für den Anfang A verschwindet:

$$2 \left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}x \right) \sqrt{x-a} - 2 \left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}f \right) \sqrt{f-a},$$

was einer gewissen gegebenen Größe, wie c , gleich gesetzt gibt:

$$(2a+x)\sqrt{x-a} - (2a+f)\sqrt{f-a} = \frac{3c}{2}.$$

Aus dieser Gleichung für die gegebene Kurve AM , auf welche A bezogen wird, bestimme man die Abszisse x und daher weiter die Ordinate y mithilfe der oberen Gleichung:

$$y = 2(\sqrt{ax-aa} - \sqrt{af-aa}) + g,$$

damit der Punkt M bekannt wird. Aber wer verlangt, dass die Gleichung für die orthogonale Trajektorie zwischen den Koordinaten x und y ist, eliminiere nur aus den zwei gefundenen Gleichungen die Größe a , dass er eine Gleichung erhält, in welcher nur die Buchstaben x, y zusammen mit den Konstanten f, g und c auftreten. Denn mit dieser Gleichung wird die Natur der Trajektorie ausgedrückt werden.

§45 Aus diesen Beispiel ist es ersichtlich, wie Fälle von dieser Art behandelt werden müssen, wo die Integration nicht gelingt: Denn immer ist die Integration als bekannt anzunehmen, auch wenn sie transzendent war, auf welche Weise quasi die neuen Buchstaben f und g eingehen, welche natürlich die Koordinaten für den gegebenen Anfang der Kurven sind; weiter zeigt die Natur der Sache selbst, wie die übrigen Operationen durchgeführt werden müssen.

§46 Nachdem nämlich das Problem der orthogonalen Trajektorien vor einiger Zeit mit so großen Eifer behandelt worden war, schien der Fall, welchen wir gerade entwickelt haben, besonders der ganzen Aufmerksamkeit würdig, und war auf diese Weise formuliert worden.

Wenn die Natur der zu schneidenden Kurven mit einer solchen Differentialgleichung ausgedrückt worden war:

$$dy = \frac{Adx}{\sqrt{XX-AA}},$$

dann muss die Trajektoie aus dieser Gleichung bestimmt werden:

$$\int \frac{XXdx}{\sqrt{XX-AA}} = C.$$

Aber die folgenden Bedingungen müssen notwendigerweise beachtet werden:
Zuerst, dass alle zu schneidenden Kurven in einem gewissen gemeinsamen Punkt beginnen, weiter dass das letzte Integral in jenem Anfangspunkt selbst verschwindet.