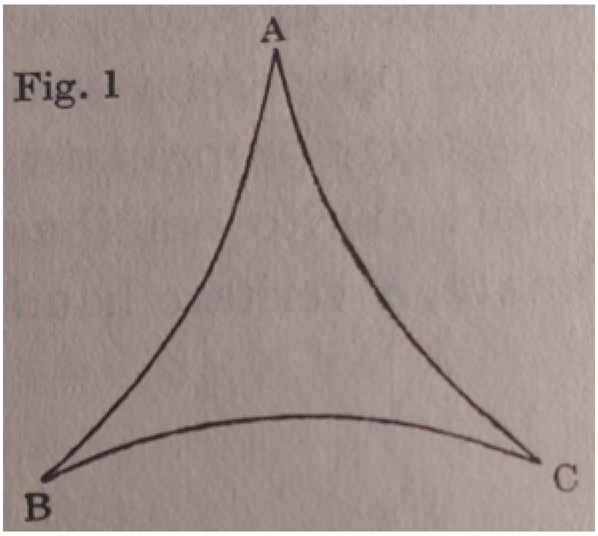
Über Dreieckskurven *

Leonhard Euler

§1 Ich nenne solche Kurven Dreieckskurven (Fig. 1)[1],



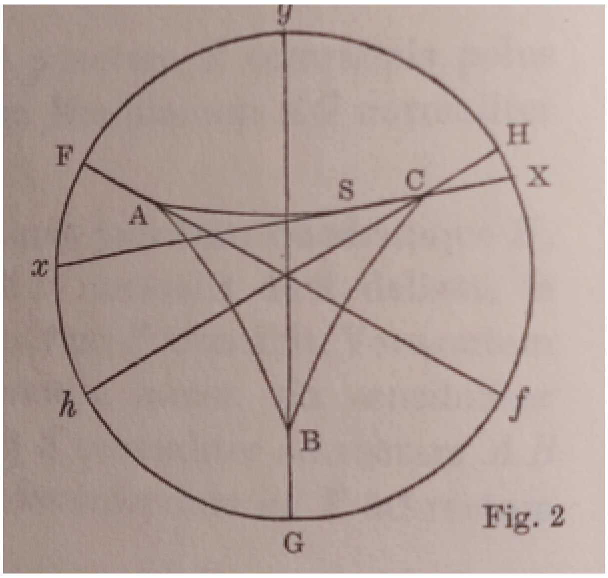
welche aus drei nach innen gewölbten Bogen AB, AC und BC bestehen, welche an den Ecken A, B und C zusammenlaufen, aber zusätzlich keine anderen Zweige haben. Damit Kurven von dieser Art stetig sind, beziehungsweise mit einer entweder algebraischen oder sogar transzendenten Gleichung ausgedrückt werden können, ist es notwendig, dass sie an den Ecken A, B und

*Original Titel: "De curvis triangularibus", zuerst publiziert in: *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 10* (1781, verfasst 1774): pp. 3–30, Nachdruck in: Opera Omnia: Series 1, Volume 28, pp. 298 – 321, Eneström-Nummer E513, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

[1]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

C sehr enge Spitzen haben, wo je zwei zusammenlaufende Bogen dieselbe Tangente besitzen. Dass aber unzählige Kurven von dieser Art dargeboten werden können, so algebraische wie transzendente, habe ich schon vor einiger Zeit gezeigt, nachdem ich das Problem über Kurven, die um einen gegebenen Brennpunkt herum zu beschreiben sind, und von solcher Art, dass alle zweimal von der Kurve reflektierten Strahlen wiederum selbst zum Brennpunkt zurücklaufen, vorgelegt hatte, welches Problem auf verschiedene Arten gelöst in den Actis Lipsiensibus für die Jahre 1746 und 1748 gefunden wird. Denn hier wird die ganze Lösung auf das Finden von Dreieckskurven von dieser Art zurückgeführt, mit den die Kaustiken der reflektierten Strahlen gebildet werden.

§2 Aber außer dem Nutzen, welchen Dreieckskurven dieser Art beim erwähnten katoptrischen Problem bringen, verdienen besonders die Kurven (Fig. 2)[2] betrachtet zu werden,



welche aus der Entwicklung einer solchen Dreieckskurve ABC entstehen. Für dieses Ziel wollen wir die Länge des Bogens $AB = c$, des Bogens $AC = b$ und des Bogens $BC = a$ nennen. Nun fasse man einen Faden dem Bogen AB angepasst auf, welcher Faden über A hinaus bis hin zu F verlängert werde, sodass $AF = f$ ist, und ein in F angebrachter Pfahl werde nach vorne bewegt,

[2]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

bis der Bogen AB abgewickelt ist und der Faden in die Position Bg gelangt, und es wird

$$Bg = AF + \text{Bogen}\, AB = f + c$$

sein; dann setze man die Bewegung des Pfahls fort und der Faden Bg werde dem Bogen $BC = a$ aufgeprägt, bis er schließlich zu H gelangt, und es wird

$$BC + CH = Bg = f + c, \quad \text{woher} \quad CH = f + c - a$$

sein; nachdem dorthin gelangt worden ist, präge man den Faden dem Bogen CA auf; dort verdient es bemerkt zu werden, dass es unwesentlich ist, ob der Bogen CA größer oder kleiner als der Bogen CB ist; denn der Faden muss immer den ganzen Bogen CA einnehmen. Nun werde die Bewegung des Pfahls von H aus bis hin zu f fortgeführt, bis schließlich der Faden fA die Spitze A berührt, dann wird also

$$Af = CH + AC = f + c - a + b$$

sein. Nun wird also der bewegte Faden Af sukzessive den Bogen AB involvieren, bis er schließlich zu G gelangt, und es wird

$$BG = Af - AB = f - a + b$$

sein. Nun überführe man den Faden vom Bogen BA zum Bogen BC und wickle ihn ab, bis er in die Lage Ch gelangt, wo

$$Ch = BG + BC = f + b$$

sein wird. Schließlich werde der Pfahl von h aus vorwärts bewegt, indem man den Bogen CA involviert, und auf diese Weise wird er zum Punkt F zurückkehren, wo die Bewegung angefangen worden ist: Es wird nämlich $AF = Ch - CA$ und $AF = f$ sein, wie es natürlich sein muss.

§3 Daher ist also klar, dass die Kurve, die aus der Entwicklung der Dreieckskurve ABC entstanden ist, eine zu sich selbst zurücklaufende Kurve und mit einem gleichförmigen Verlauf versehene Kurve ist, nämlich $FgHfGhF$, wenn nur die Punkte F, H, G außerhalb der Kurve ABC liegen. Und hier offenbart sich vor allem diese außergewöhnliche Eigenschaft, dass die Geraden FAf, HCh und GBg nicht nur auf beiden Seiten normal zur Kurve sind, wie aus der Entwicklung der Kurve offenkundig ist, sondern auch, dass sie einander gleich sind; denn es ist

$$FAf = AF + Af = 2f + c - a + b,$$

dann aber

$$HCh = CH + Ch = 2f + c - a + b,$$

in gleicher Weise

$$GBg = BG + Bg = 2f + c - a + b.$$

Aber diese Eigenschaft erstreckt sich um vieles weiter. Wenn nämlich durch einen bestimmten S unser Dreieckskurve nach beiden Seiten die Tangente XSx verlängert wird, wird sie nach der Natur der Entwicklung zu beiden Seiten hin zur beschriebenen Kurve normal sein; in der Tat wird dann

$$SX = CS + CH = f + c - a + CS$$

sein, darauf wird aber

$$Sx = FA + AS = f + AS$$

sein, daher die ganze Gerade

$$Xx = 2f + c - a + CS + AS = 2f + c - a + b, \quad \text{wegen} \quad AS + CS = AC = b,$$

weshalb die Kurve, entstanden aus der Entwicklung der Dreieckskurve ABC, sich dieser außergewöhnlichen Eigenschaft erfreut, dass, wenn zu irgendeinem Punkt X von ihr eine Normale gezogen wird, bis sie schließlich wieder auf x trifft, sie auch in diesem Punkt normal zur Kurve normal ist, und dass außerdem diese ganze Gerade Xx überall dieselbe Länge

$$= 2f + c - a + b$$

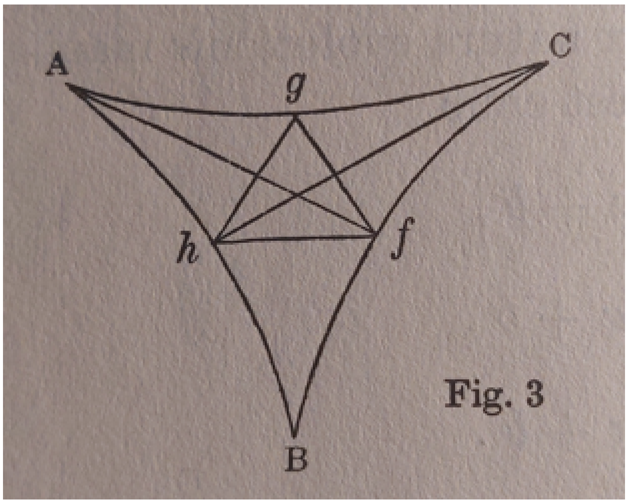
hat, welche Eigenschaften für gewöhnlich dem Kreis so zu eigen sein scheint, dass sie kaum anderen Kurven zufallen zu können scheint.

§4 Es wird hier ohne Zweifel wundersam erscheinen, dass die drei Seiten, a, b und c der dreieckigen Figur nicht gleich in die gefundenen Formeln eingehen. Der Grund dieser Disparität liegt darin, dass wir die Strecke AF eher als CH und BG mit dem einfachen Buchstaben f bezeichnet haben. Um also diese Ungleichheit zu beseitigen und Gleichförmigkeit in diese Rechnung hineinzubringen, wollen wir die Strecke $AF = k + a$ nennen, sodass $f = k + a$ ist, und alle oben dargebotenen Geraden werden nun auf die folgende Weise gefällig ausgedrückt werden:

$$AF = k + a, \quad BG = k + b, \quad CH = k + c,$$

$$Af = k + b + c, \quad Bg = k + a + c, \quad Ch = k + a + b,$$

dann wird in der Tat nun die Länge aller Geraden, normal durch die beschriebene Kurve hindurchgezogen, $= 2k + a + b + c$ sein. Hier lässt sich aber die Größe k nach Belieben annehmen, sodass aus derselben dreieckigen Figur unzählige Kurven dieser Gestalt beschrieben werden können. Ja die Größe k wird sogar negativ genommen werden können, solange nur die Formeln $k + a$, $k + b$ und $k + c$ positive Werte erhalten; wenn nämlich diese Strecken negativ wären, ginge die beschriebene Kurve nicht weiter als kreisförmig hervor, sondern (Fig. 3)[3] fiele in das Innere der Kurve ABC und hätte auch die drei Kuspen g, f, h, wie sich aus der Natur der Entwicklung leicht folgern lässt.



[3]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

§5 Wir wollen aber Kurven dieser Art, die aus der Entwicklung von Dreieckskurven entstanden sind, weil die mit dem Kreis so außerordentlich übereinstimmen, der Kürze wegen *orbiform* nennen, und wird es vor allem förderlich sein bemerkt zu haben, dass aus jeder beliebigen orbiformen Kurve das oben erwähnte katoptrische Problem auf unendlich viele Weisen sehr leicht gelöst werden kann. Es sei nämlich FGX eine solche orbiforme Kurve, innerhalb von welcher der Brennpunkt L nach Belieben festgelegt werde; dann (Fig. 4)[4], nachdem die Gerade Xx,

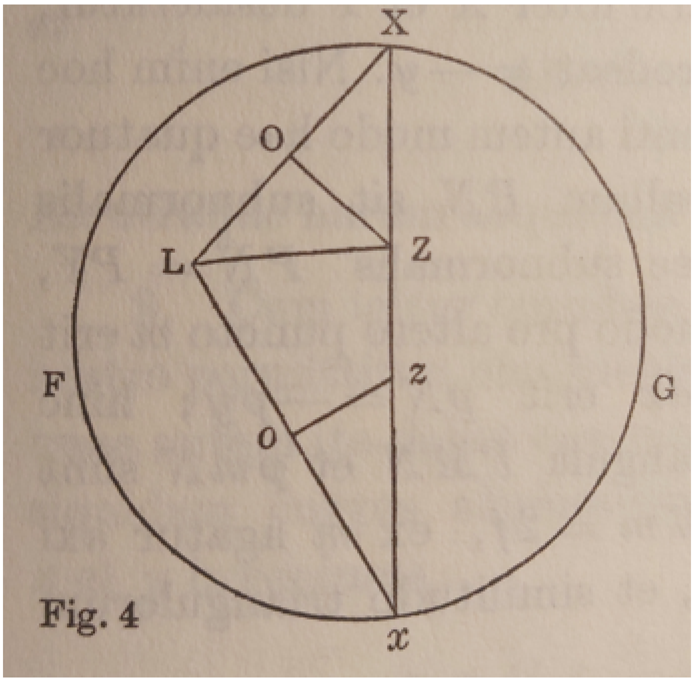


Fig. 4

zu beiden Seiten hin normal zur Kurve, gezeichnet worden ist, welche also eine konstante Größe haben wird, verbinde man die Geraden LX und Lx, und teile sind in den Punkten X und x in zwei Teile, woher man zu diesen normal die Geraden OZ und oz ziehe, welche die Gerade Xx in den Punkten Z und z treffe; und diese zwei Punkte werden auf der gesuchten Kurve liegen. Denn der Strahl LZ, zuerst reflektiert, wird Zz werden, welcher, erneut in z reflektiert, zum Brennpunkt L zurückgeworfen wird, so wie sich aus der Natur der Reflexion leicht beweisen ließe, wenn dieser Gegenstand nicht schon im Überfluss behandelt worden wäre.

[4]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

§6 Wegen diese riesigen Nutzens der Dreieckskurven wäre es jedenfalls zu wünschen, dass eine sichere Methode bekannt wäre, mit deren Hilfe sich beliebig viele Dreieckskurven von dieser Art ausfindig machen ließen, was auf den ersten Blick als nicht allzu schwierig erscheinen kann. Aber wir wollen diese Untersuchung auf den Kopf stellen, und wollen zuerst orbiforme Kurven suchen, wie wir sie beschrieben haben; denn dann werden wir sicher sein können, dass deren Evoluten dieser Art Dreieckskurven sein werden, wie wir sie haben wollen. Zusätzlich werden wir aber auf diese Weise auch diesen Vorteil erlangen, dass, sooft die die orbiforme Kurve algebraisch war, sooft auch die Dreieckskurve nicht nur algebraisch wird, sondern darüber hinaus auch rektifizierbar, weil die Evoluten aller algebraischen Kurven zugleich eine Rektifikation zulassen.

§7 Es sei also (Fig. 5)[5] $FMfm$ eine solche orbiforme Kurve,

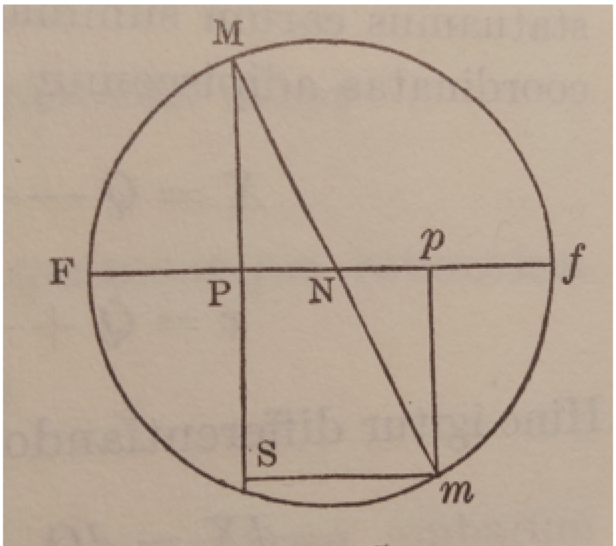


Fig. 5

wie sie uns ausfindig zu machen vorgelegt ist, in welcher wir die Gerade Ff als fixe Achse nehmen wollen, welche zu beiden Seiten hin normal zu Kurve sei und deren Länge wir $Ff = 2f$ setzen wollen. Dann ziehe man vom beliebigen Punkt M zur Kurve die Normale Mm, welche also auch in m zur Kurve normal sein muss, und ihre Länge Mm wird ebenso $= 2f$. Nun fälle

[5]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

man von den Punkten M und m aus zur Achse Ff die Lote PM und pm, und für den Punkt M nenne man die Koordinaten $FP = X$ und $PM = Y$; aber für den Punkt m sei $Fp = x$ und $pm = -y$, weil diese Ordinate auf den gegenüberliegenden Teil fällt. Nachdem all dies festgelegt worden sind, wird eine solche Gleichung zwischen X und Y gesucht, dass, wenn x anstelle von X geschrieben wird, der Wert von Y von selbst als $= -y$ hervorgeht. Denn wenn dies nicht der Fall wäre, wäre die ganze Kurve $FMfm$ nicht stetig. Diese vier Größen hängen nun in der folgenden Weise voneinander ab: Weil die Strecke PN eine Subnormale bezüglich des Punktes M ist, wird, nachdem $dY = PdX$ gesetzt worden ist, diese Subnormale $PN = PY$ sein, und daher die Normale $MN = Y\sqrt{1+PP}$. In gleicher Weise wird für den anderen Punkt m pN die rückwärts gelegene Subnormale sein; daher wird für $dy = pdx$ genommen $pN = -py$ sein; daher die Normale $mN = -y\sqrt{1+pp}$. Weil also die Dreiecke PMN und pmN ähnlich sind, wird $P = p$ sein. Weil wir weiter wissen, dass $Mm = 2f$ ist, zeichne man von m aus die Parallele mS zur Achse, welche die verlängerte Strecke MP in S trifft, und die Ähnlichkeit der Dreiecke MNP und MmS wird

$$MS = \frac{2f}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{und} \quad mS = \frac{2fp}{\sqrt{1+pp}}$$

geben. Weil also

$$MS = MP + mp = Y - y \quad \text{und} \quad mS = Fp - FP = x - X$$

ist, berechnet man daraus

$$Y - y = \frac{2f}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{und} \quad x - X = \frac{2fp}{\sqrt{1+pp}},$$

außerdem muss aber, wie wir schon bemerkt haben,

$$\frac{dY}{dX} = P = p \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = p$$

sein.

§8 Weil wir also die Differenz der Koordinaten $Y - y$ und $x - X$ gefunden haben, wollen wir deren Summen $X + x = 2Q$ und $Y + y = 2R$ setzen, und daher werden wir die Koordinaten so ausgedrückt erhalten

$$X = Q - \frac{fp}{\sqrt{1+pp}}, \quad Y = R + \frac{f}{\sqrt{1+pp}},$$
$$x = Q + \frac{fp}{\sqrt{1+pp}}, \quad y = R - \frac{f}{\sqrt{1+pp}}.$$

Daher wird also durch Differenzieren gelten:

$$dX = dQ - \frac{fdp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}, \quad dY = dR - \frac{fpdp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}},$$
$$dx = dQ + \frac{fdp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}, \quad dy = dR + \frac{fpdp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}.$$

Weil also $dY = pdX$ und $dy = pdx$ ist, wird

$$dR - \frac{fpdp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = pdQ - \frac{fpdp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$$

und

$$dR + \frac{fpdp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = pdQ + \frac{fpdp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}.$$

Aus jeder der beiden dieser Gleichungen folgt, dass $dR = pdQ$ und daher $R = \int pdQ$ sein wird.

§9 Weil wir also allen Bedingungen Genüge geleistet haben, ist die Größe Q unserem Belieben überlassen, und an ihrer Stelle wird irgendeine Funktion von p angenommen werden können, welche aber so beschaffen sein muss, dass die Formel pdQ eine Integration zulässt, wenn wir freilich algebraische Kurven wollen. Weil wir ja also für die Koordinaten x und y gefunden haben:

$$x = Q + \frac{fp}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{und} \quad y = R - \frac{f}{\sqrt{1+pp}},$$

während $R = \int pdQ$ ist, für die anderen Koordinaten X und Y hingegen

$$X = Q - \frac{fp}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{und} \quad Y = R + \frac{f}{\sqrt{1+pp}}$$

wird, ist es offensichtlich, dass diese aus jenen hervorgehen, wenn nur das Vorzeichen des Wurzelausdrucks $\sqrt{1+pp}$ verändert wird. Daher weil diese

Formel nach ihrer Natur zweideutig ist, beinhalten die ersten Formeln, die für x und y gefunden worden sind, die letzten für X und Y schon von selbst, sodass notwendigerweise dieselbe rationale Gleichung so für x und y wie für X und Y hervorgehen wird. Dafür ist es aber notwendig, dass weder Q noch R dieselbe Formel $\sqrt{1+pp}$ involvieren, weil andernfalls auch das Vorzeichen dieser Buchstaben verändert werden müsste. Daher kann diese Regel aufgestellt werden, dass für Q eine rationale Funktion von p angenommen werden muss.

§10 Damit wir aber algebraische Kurven erhalten, weil

$$R = \int pdQ = pQ - \int Qdp$$

ist, wollen wir $\int Qdp = S$ setzen, während S irgendeine rationale Funktion von p bezeichnet, und es wird

$$Q = \frac{dS}{dp} \quad \text{und daher weiter} \quad R = \frac{pdS}{dp} - S$$

sein. Nun können wir also für die orbiformen Kurven die folgenden Bestimmungen der beiden Koordinaten x und y darbieten:

$$x = \frac{dS}{dp} + \frac{fp}{\sqrt{1+pp}}, \quad y = \frac{pdS}{dp} - S - \frac{f}{\sqrt{1+pp}},$$

wo wir für S irgendeine rationale Funktion von p annehmen können, oder zumindest eine solche, die, während die Formel $\sqrt{1+pp}$ zweideutig ist, denselben Wert beibehält.

§11 Weil die Natur des Kreises, wie wir sie betrachten, erfordert, dass die Kurve eine geschlossene ist und niemals ins Unendliche läuft, muss die Funktion S so beschaffen sein, dass weder die Abszisse x noch die Ordinate y jemals unendlich werden können, zu welchem Zwecke diese Funktion S einem solchen Bruch:

$$\frac{\alpha + \beta p + \gamma pp + \delta p^3 + \text{etc.}}{A + Bp + Cpp + Dp^3 + \text{etc.}}$$

gleich werden muss, dessen Nenner keinen einfachen reellen Faktor hat; wenn er nämlich einen solchen hätte, sei er $p - n$, dann, würde für $p = n$ der Wert von S unendlich werden. Weiter darf die größte Potenz von p in Zähler nicht größer sein als die größte Potenz im Nenner; denn ansonsten würde der Wert von S im Fall $p = \infty$ wiederum ins Unendliche wachsen. Weiterhin könnten zwar auch gebrochene Exponenten von p zugelassen werden, so dennoch, dass kein Glied einen mehrdeutigen Wert erhält, weil andernfalls demselben Wert von p mehrere Abszissen wie Ordinaten zukommen könnten; denn in diesem Fall würde die Kurve nicht nach einem Umlauf, sondern erst nach zwei oder mehreren wieder in sich selbst hineinlaufen; dann wäre aber ihre Evolute nicht weiter eine Dreieckskurve, sondern eine pentagonale oder heptagonale oder enneagonale oder etc., was unserem Unterfangen ja entgegensteht.

§12 Aus dieser allgemeinen Konstruktion, in welcher alle orbiformen Kurven enthalten sind, und zwar die einfachen, die nach einem Umlauf wieder in sich selbst hineinlaufen, wird es leicht sein, Formeln für die Beschreibung der dreieckigen Kurven zu finden; denn weil die Evoluten dieser orbiformen Kurven sind gewiss dreieckige Figuren sind, ist es nur nötig, dass wir nach den Evoluten dieser Kurven suchen. Weil aber all jene Kurven, für jeden Wert des Buchstaben f, aus der Entwicklung derselben Dreieckskurve entstehen, geht der Buchstabe f nicht in die Bestimmung der Evolute ein; daher werden sich in unseren Formeln, die für x und y gefunden worden sind, die Teile, die diesen Buchstaben f involvieren, weglassen lassen; und wir werden für diese Untersuchung nur

$$x = \frac{dS}{dp} \quad \text{und} \quad y = \frac{pdS}{dp} - S$$

haben, weswegen es hinreichen wird, die aus diesen Werten entspringende Evolute ausfindig gemacht zu haben.

§13 Sei sei also (Fig. 6)[6] $FMfm$ eine solche Kurve,

[6]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

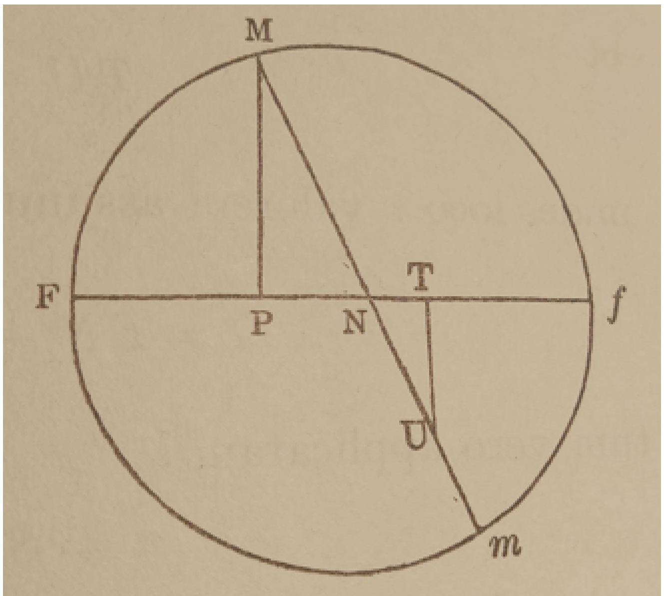


Fig. 6

in welcher

$$\text{die Abszisse } FP = x = \frac{dS}{dp}, \quad \text{die Ordinate } PM = y = \frac{pdS}{dp} - S$$

sei, und nach Ziehen der Normale Mm wird die Subnormale

$$PN = py = \frac{ppdS}{dp} - pS$$

sein, woher die Gerade

$$FN = \frac{dS}{dp}(1 + pp) - pS$$

wird. Wir wollen nun den Winkel $FNM = \varphi$ setzen, es wird $\tan\varphi = \frac{1}{p}$ sein und daher

$$p = \cot\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

woher

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{und} \quad \cos\varphi = \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$$

wird, dann aber auch

$$d\varphi = -\frac{dp}{1+pp}.$$

Wenn wir daher nun der Kürze wegen $FN = v$ setzen, ist es bekannt, dass der Mittelpunkt des Kreises, der die Kurve in M berührt, im Punkt U sein wird, sodass

$$NU = \frac{dv \sin\varphi}{d\varphi}$$

ist. Weil aber, nachdem das Element dp konstant angenommen worden ist,

$$dv = \frac{ddS}{dp}(1+pp) + pdS - Sdp \quad \text{und} \quad \frac{\sin\varphi}{d\varphi} = -\frac{\sqrt{1+pp}}{dp}$$

ist, wird die Gerade

$$NU = -\frac{ddS}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}} - \frac{pdS}{dp}\sqrt{1+pp} + S\sqrt{1+pp}$$

sein, für welche Formel wir der Kürze wegen also r schreiben, sodass $NU = r$ ist.

§14 Nachdem der Punkt U gefunden worden ist, welcher auf der Evolute liegen wird, die wir suchen, wollen wir von da aus zur Achse das Lot UT fällen, und für die Evolute wollen wir die Abszisse $FT = t$ und die Ordinate $TU = u$ nennen; es wird aber

$$NT = NU\cos\varphi = \frac{pr}{\sqrt{1+pp}}$$

und

$$TU = NU\sin\varphi = \frac{r}{1+pp}$$

sein, woher, indem wir anstelle von r den angenommenen Wert einsetzen, wir die Abszisse

$$t = PN + NT = \frac{dS}{dp} - \frac{ddS}{dp^2}(1+pp)$$

erhalten, dann aber die Ordinate

$$u = S - \frac{pdS}{dp} - \frac{ddS}{dp^2}(1+pp);$$

daher berechnen wir

$$t - pu = \frac{dS}{dp}(1+pp) - pS.$$

Daher werden wir mithilfe dieser Formeln, welche geeignete Funktion von p auch immer für S genommen wird, so die Abszisse $FT = t$ wie die Ordinate $TU = u$ angeben können, durch welche die Dreieckskurve bestimmt wird. Wir haben aber oben geeignete für S anzunehmende Werte aufgezeigt.

§15 Um diese Untersuchung an einem Beispiel zu illustrieren, wollen wir $S = \frac{ap}{1+pp}$ nehmen und es wird

$$\frac{dS}{dp} = \frac{a(1-pp)}{(1+pp)^2} \quad \text{und} \quad \frac{ddS}{dp^2} = \frac{2ap^3 - 6ap}{(1+pp)^3}$$

sein, woher wir

$$t = \frac{a + 5app - 2ap^4}{(1+pp)^2} \quad \text{und} \quad u = \frac{6ap}{(1+pp)^2}$$

errechnen. Daher ist zuerst klar, egal ob p positiv oder negativ genommen wird, dass die Abszisse t dieselbe bleibt, die Ordinate u hingegen in diesem Fall auf die gegenüberliegende Seite fällt, woher unsere Achse FT der Durchmesser dieser Kurve sein wird. Darauf wird für $p = 0$ genommen $t = a$ und $u = 0$ werden; wenn p unendlich klein angenommen wird, wird

$$t = a + 3app \quad \text{und} \quad u = 6ap$$

werden. Weiter, nachdem $p = \frac{1}{2}$ genommen worden ist, wird $t = \frac{34}{25}a$ und $u = \frac{48}{25}a$ sein. Es sei schließlich $p = \infty$, und es wird $t = -2a$ und $u = 0$ sein. Daher ist klar (Fig. 7)[7], dass eine Kurve eine Form von dieser Art haben wird,

[7]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

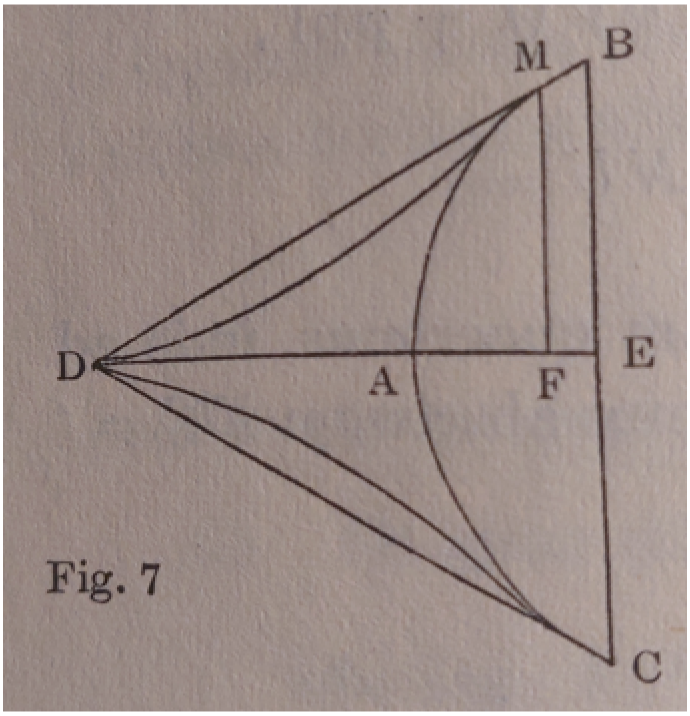


Fig. 7

wie wir sie ihr in der Figur gegeben haben, welche die drei Spitzen B, C, D hat, wobei $FD = 2a$ und $FA = a$ ist. Für die anderen Spitzen B und C suche man den Ort, wo die Ordinate u maximal wird, und weil

$$d.\frac{p}{(1+pp)^2} = \frac{dp(1-3pp)}{(1+pp)^3}$$

ist, wird dies passieren, wo $3pp = 1$ oder $p = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist; dann wird aber $t = \frac{11}{8}a$ und $u = \frac{9\sqrt{3}}{8}a$ werden. Nachdem also die Strecke BC gezeichnet worden ist, die die Achse in E schneidet, wird

$$FE = \frac{11}{8}a \quad \text{und} \quad EB = EC = \frac{9\sqrt{3}}{8}a$$

sein. Wenn nun auch die Strecken BD und CD gezeichnet werden, wird wegen $DE = \frac{27}{8}a$ auch $BD^2 = \frac{972}{64}aa$ sein, woher $BD = CD = \frac{9\sqrt{3}}{4}a$ wird; daher ist klar, dass alle Strecken BD, CD und BC einander gleich sind. Also stellt diese Dreieckskurve ein gleichseitiges Dreieck dar.

§16 Wir wollen aber (Fig. 6) genauer die Eigenschaften unserer Dreieckskurven untersuchen, und weil ja für die Koordinaten $FT = t$ und $TU = u$ diese Formeln gefunden haben:

$$t = \frac{dS}{dp} - \frac{pddS}{dp^2}(1 + pp)$$

und

$$u = S - \frac{pdS}{dP} - \frac{ddS}{dp^2}(1 + pp),$$

bemerke ich zuerst, dass die Gerade NU die Tangente der Kurve im Punkt U ist, weil welche zur Achse im Winkel $TNU = \varphi$ geneigt ist, dessen Kotangens p ist, ist es notwendig, dass

$$\frac{du}{dt} = \tan\varphi = \frac{1}{p}$$

ist, woher $dt = pdu$ wird. Aber vermöge der Formel ist

$$dt = -\frac{3ppddS}{dp} - \frac{p(1 + pp)d^3S}{dp^2}$$

und

$$pdu = -\frac{3ppddS}{dp} - \frac{p(1 + pp)d^3S}{dp^2}$$

und daher in der Tat $dt = pdt$.

§17 Weil also $dt = pdu$ ist, wird in denselben Fällen, in denen $\frac{dt}{dp} = 0$ wird, auch $\frac{du}{dp} = 0$ werden; daher ist klar, wo auch immer die Abszisse t maximal oder minimal war, dass ebenda auch die Ordinate maximal oder minimal sein wird, welche Eigenschaft natürlich den Spitzen zufällt. Daher erschließen wir ,dass, wo auch immer p und q zugleich maximal oder minimal werden, dort auch die Spitzen unserer Kurve sind; daher, weil die Kurve drei Spitzen hat, ist es notwendig, dass auch an drei Stellen so t wie u maximal wird.

§18 Hier ergibt sich aber dieser bemerkenswerte Umstand, dass unsere Dreieckskurve (Fig. 6) rektifizierbar ist, deren Bogen natürlich dem Krümmungsradius MU der orbiformen Kurve gleich ist, woraus sie entstanden ist. Wir haben aber gesehen, dass

$$NU = r = -\frac{ddS}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}} - \frac{pdS}{dp}\sqrt{1+pp} + S\sqrt{1+pp}$$

ist; aber

$$MN = y\sqrt{1+pp} = \frac{pdS\sqrt{1+pp}}{dp} - S\sqrt{1+pp},$$

woher der Krümmungsradius

$$MU = -\frac{ddS}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}}$$

wird, welcher also die Länge unser Dreieckskurve ausdrückt; das ist auch aus der oben bemerkten Eigenschaft klar, dass $dt = pdu$ ist, woher das Kurvenelement

$$\sqrt{dt^2+du^2} = du\sqrt{1+pp} = -\frac{3pddS}{dp}\sqrt{1+pp} - \frac{d^3S}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}}$$

wird, dessen Integral natürlich

$$-\frac{ddS}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}}$$

ist.

§19 Weil wir ja hier festlegt haben nur Dreieckskurven zu untersuchen, uns kaum darum kümmernd, ob sie rektifizierbar sind oder nicht, solange sie nur algebraisch waren, werden wir nach Weglassen dieser Bedingung einfachere Formeln für die Koordinaten t und u darbieten und sogar, ohne dabei Rücksicht auf orbiforme Kurven zu nehmen, direkt aus der Natur dieser Kurven finden können. Denn weil $dt = pdu$ sein muss, wird

$$t = \int pdu = pu - \int udp$$

sein. Nun wollen wir $\int udp = \Pi$ setzen, sodass $u = \frac{d\Pi}{dp}$ ist, woher

$$t = \frac{pd\Pi}{dp} - \Pi$$

wird; dort müssen für Π Funktionen solcher Art von p angenommen werden, die in keinem Fall unendlich werden, welche Werte auch immer dem Buchstaben t zugeteilt werden, Funktionen von welcher Art wir schon oben beschrieben haben; dann dürfen aber diese Funktionen Π auch keine Wurzelausdrücke enthalten, welche eine Doppeldeutigkeit beinhalten. Insbesondere ist es aber notwendig, dass die beiden Koordinaten t und u nur in drei Fällen maximal oder minimal werden, was passiert, wenn, wegen $u = \frac{d\Pi}{dp}$, diese Gleichung $\frac{dd\Pi}{dp^2} = 0$ drei reelle Wurzeln hat, aber nicht mehr.

§20 Wir wollen eines Beispiels wegen

$$\Pi = \frac{a+bp}{1+fp+gpp}$$

nehmen, welche in keinem Fall unendlich wird, wenn nur $ff < 4g$ war; dann wird aber

$$\frac{d\Pi}{dp} = \frac{b-af-2agp-bgpp}{(1+fp+gpp)^2} = u$$

und daher

$$t = \frac{-a-2afp-3agp^2-bfp^2-2bgp^3}{(1+fp+gpp)^2}$$

sein. Um nun die drei Spitzen zu bestimmen, wollen wir die Gleichung $\frac{du}{dp} = 0$ betrachten; damit dies leichter geschehen kann, wollen wir

$$u = \frac{A+Bp+Cpp}{(1+fp+gpp)^2}$$

setzen, sodass $A = b - af$, $B = -2ag$, $C = -bg$ ist; dann wird aber daraus die folgende Gleichung gefunden:

$$B - 2Af + (2C - Bf - 4Ag)p - 3Bgpp - 2Cgp^3 = 0,$$

deren drei Wurzeln uns die drei Spitzen zeigen werden.

§21 Wir wollen nun festlegen, dass die Wurzeln dieser Gleichung die folgenden sind I. $p = \alpha$, II. $p = \beta$ und III. $p = \gamma$, oder wir wollen die gefundene Form diesem Produkt gleich machen:

$$2Cg(\alpha - p)(\beta - p)(\gamma - p),$$

welche entwickelt

$$2Cg\alpha\beta\gamma - 2Cg(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)p + 2Cg(\alpha + \beta + \gamma)pp - 2Cgp^3$$

liefert, welche Form der gefundenen gleichgesetzt die folgenden drei Bestimmungen erzeugt:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & B - 2Af = 2Cg\alpha\beta\gamma, \\ \text{II.} \quad & 2C - Bf - 4Ag = -2Cg(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma), \\ \text{III.} \quad & -3Bg = 2Cg(\alpha + \beta + \gamma), \end{aligned}$$

aus deren dritter $B = -\frac{2}{3}C(\alpha + \beta + \gamma)$ wird; aus der ersten hingegen

$$A = -\frac{1}{3f}C(\alpha + \beta + \gamma) - \frac{1}{f}Cg\alpha\beta\gamma,$$

welche Werte in die zweite eingesetzt

$$2C + \frac{(2ff + 4g)}{3f}C(\alpha + \beta + \gamma) + \frac{4g}{f}Cg\alpha\beta\gamma = -2Cg(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$$

liefern, welche Gleichung, mit $\frac{3f}{2C}$ multipliziert, in diese übergeht:

$$3f + (ff + 2g)(\alpha + \beta + \gamma) + 6gg\alpha\beta\gamma = -3fg(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$$

und die Gleichungen werden alle Bestimmungen enthalten, mit welchen unserem Problem Genüge geleistet wird.

§22 Bevor wir diese Bestimmung im Allgemeinen weiter verfolgen, wollen wir den Spezialfall entwickeln, in dem $\gamma = 0$ und $\beta = -\alpha$ ist, woher

$$\alpha\beta\gamma = 0, \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -\alpha^2 \quad \text{und} \quad \alpha + \beta + \gamma = 0$$

wird, und die letzte Gleichung wird $3f = 3\alpha\alpha fg$ oder $f = \alpha\alpha fg$ sein; daher folgt

$$\text{entweder} \quad f = 0 \quad \text{oder} \quad g = \frac{1}{\alpha\alpha}.$$

Wir wollen zuerst den Fall $f = 0$ betrachten, und es wird $A = -\frac{0}{0}$ werden, woher der Buchstabe A nicht bestimmt wird, oder es wird vielmehr $A = 0$, und weiter $B = 0$, woher $b = 0$ berechnet wird, oder eben auch b nicht bestimmt wird ; dann wir aber $a = 0$ sein. Weil wir aber die letzte Gleichung mit f multipliziert haben, ist dieser Wert $f = 0$ zu verwerfen. Wir wollen aber den andren Wert $g = \frac{1}{\alpha\alpha}$ nehmen, und weil $ff < 4g$ sein muss, folgt, dass $f < \frac{2}{\alpha}$ sein muss; daher wird aber $A = 0$ und $B = 0$ werden, und daher $b - af = 0$ und $-2ag = 0$, woher $a = 0$ wird.

§23 Es soll aber genügen, dies im Allgemeinen aufgezeigt zu haben, und wir wollen lieber einen besser definierten Fall betrachten, indem wir $\Pi = \frac{bp}{\alpha\alpha + pp}$ nehmen, woher

$$\frac{d\Pi}{dp} = u = \frac{b(\alpha\alpha - pp)}{(\alpha\alpha + pp)^2} \quad \text{und} \quad t = -\frac{2bp^3}{(\alpha\alpha + pp)^2}$$

wird. Wenn wir daher nun für die Spitzen $\frac{du}{dp} = 0$ setzen, entsteht diese Gleichung: $p^3 - 3\alpha\alpha p = 0$, deren drei Wurzeln diese sind:

$$\text{I.} \quad p = 0, \quad \text{II.} \quad p = +\alpha\sqrt{3}, \quad \text{III.} \quad p = -\alpha\sqrt{3};$$

für deren erste werden wir $t = 0$ und $u = \frac{b}{\alpha\alpha}$ haben, für die zweite $t = -\frac{3b\sqrt{3}}{8\alpha}$ und $u = -\frac{b}{8\alpha\alpha}$, für die dritte hingen $t = +\frac{3b\sqrt{3}}{8\alpha}$ und $u = -\frac{b}{8\alpha\alpha}$, woher die Kurve die in Figur 8[8] beschriebene Form hat,

[8]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

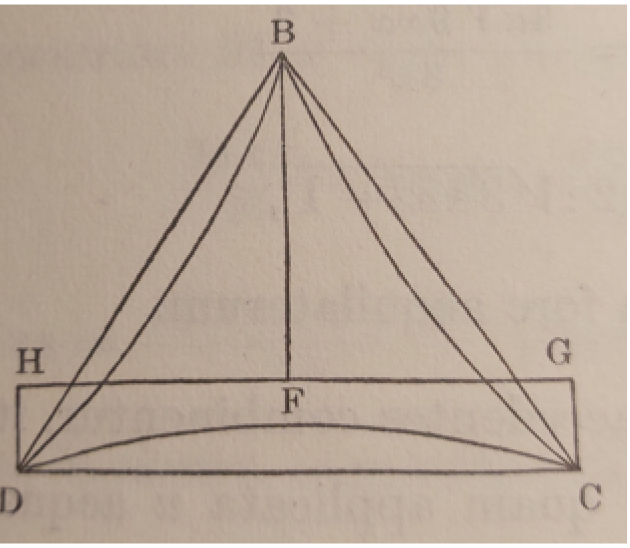


Fig. 8

wo

$$FB = \frac{b}{\alpha\alpha}, \quad FG = FH = \frac{3b\sqrt{3}}{8\alpha} \quad \text{und} \quad GC = HD = \frac{+b}{8\alpha\alpha}$$

ist, und so werden die drei Spitzen in den Punkten B, C, D sein, und nach Zeichnen der Strecken wird

$$BC = BD = \frac{3b\sqrt{3(3+\alpha\alpha)}}{8\alpha\alpha} \quad \text{und} \quad CD = \frac{3b\sqrt{3}}{4\alpha}$$

sein, so dass diese dreieckige Figur ein gleichschenkliges Dreieck darbietet.

§24 Wir wollen in gleicher Weise den Fall $\Pi = \frac{a}{\alpha\alpha+pp}$ entwickeln, woher

$$\frac{d\Pi}{dp} = u = -\frac{2ap}{(\alpha\alpha+pp)^2} \quad \text{wird, und daher} \quad t = -\frac{a(\alpha\alpha+3pp)}{(\alpha\alpha+pp)^2}.$$

Nun sei für die Spitzen

$$\frac{du}{dp} = -\frac{2a(\alpha\alpha-3pp)}{(\alpha\alpha+pp)^3} = 0,$$

welche Gleichung nur die zwei Wurzeln

$$p = +\frac{\alpha}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad p = -\frac{\alpha}{\sqrt{3}}$$

liefert; die dritte Wurzel ist aber $p = \infty$. Daher wird also für die erste Spitze, welche sei, wo $p = \infty$ ist, $t = 0$ und $u = 0$, und so fällt diese Spitze B (Fig. 9)[9] auf den Punkt F.

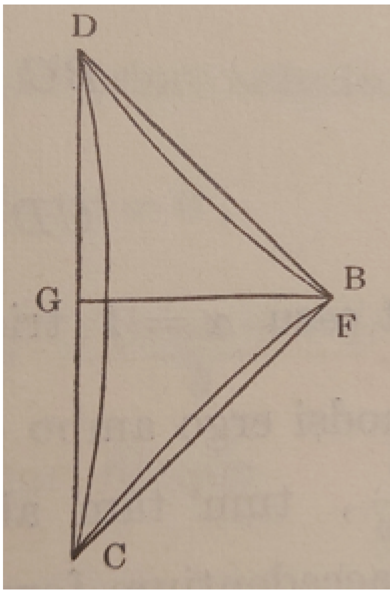


Fig. 9

Für die zweite Spitze nehme man $p = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$, und es wird

$$t = -\frac{9a}{8\alpha\alpha} \quad \text{und} \quad u = -\frac{3a\sqrt{3}}{8\alpha^3}$$

sein. Für die dritte Spitze sei $p = -\frac{\alpha}{\sqrt{3}}$, es wird

$$t = -\frac{9a}{8\alpha\alpha} \quad \text{und} \quad u = +\frac{3a\sqrt{3}}{8\alpha^3}$$

sein. Nachdem also $FG = \frac{9a}{8\alpha\alpha}$ genommen worden ist, werden die zwei übrigen Spitzen bei C und D sein, so dass

$$GC = GD = \frac{3a\sqrt{3}}{8\alpha^3}$$

ist und daher deren Abstand $CD = \frac{3a\sqrt{3}}{4\alpha^3}$, woher man

[9]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

$$BC = BD = \frac{3a\sqrt{9\alpha\alpha + 3}}{8\alpha^3}$$

berechnet, und so wird

$$CD : BC = 2 : \sqrt{3\alpha\alpha + 1}$$

sein, woher klar ist, dass im Fall $\alpha = 1$ das Dreieck gleichseitig sein wird.

§25 Wenn also die beiden vorhergehenden Fälle verbunden werden, sodass $\Pi = \frac{a+bp}{\alpha\alpha+pp}$ ist, dann wird so die Abszisse t wie die Ordinate u der Summe der beiden vorhergehenden Formeln gleich werden, sodass

$$t = \frac{-2bp^3 - a(\alpha\alpha + 3pp)}{(\alpha\alpha + pp)^2} \quad \text{und} \quad u = \frac{b(\alpha\alpha - pp) - 2ap}{(\alpha\alpha + pp)^2};$$

daher, wenn wir für das Finden der Spitzen $\frac{du}{dp} = 0$ setzen, werden wir diese Gleichung haben:

$$2bp^3 - 6b\alpha\alpha p - 2a\alpha\alpha + 6app = 0,$$

oder

$$bp^3 + 3app - 3b\alpha\alpha p - a\alpha\alpha = 0,$$

deren drei Wurzeln gesucht werden müssen; weil dies mit der CARDAN'ischen Regel nur schwer geleistet wird, wollen wir die Dreiteilung des Winkels gebrauchen, zu welchem Zweck wir ansetzen wollen, dass $p = r + s\cos\varphi$ ist, und es wird

$$pp = rr + \frac{1}{2}ss + 2rs\cos\varphi + \frac{1}{2}ss\cos 2\varphi$$

und

$$p^3 = r^3 + \frac{3}{2}rss + (3rrs + \frac{3}{4}s^3)\cos\varphi + \frac{3}{2}rss\cos 2\varphi + \frac{1}{4}s^3\cos 3\varphi$$

sein, nach Einsetzen welcher Werte unsere Gleichung in die folgende verwandelt werden wird

$$0 = \begin{cases} + br^3 \quad + 3brrs \cos\varphi + \frac{3}{2}brss\cos 2\varphi + \frac{1}{4}bs^3 \cos 3\varphi \\ + \frac{3}{2}brss + \frac{3}{4}bs^3 \ \cos\varphi + \frac{3}{2}ass \ \cos 2\varphi \\ + 3arr \quad + 6ars \ \cos\varphi \\ + \frac{3}{2}ass \quad - 3b\alpha\alpha s\cos\varphi \\ - 3b\alpha\alpha r \\ - a\alpha\alpha \end{cases}$$

Nun bestimme man die Buchstaben r und s so, dass die Mittelterme, so die $\cos\varphi$ wie die $\cos 2\varphi$ involvierenden, jeweils verschwinden, woher diese zwei Gleichungen entspringen:

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad 3brrs + \frac{3}{4}bs^3 + 6ars - 3b\alpha\alpha s = 0, \\ &\text{II.} \quad \frac{3}{2}brss + \frac{3}{2}ass = 0; \end{aligned}$$

aus deren letzter wird $r = -\frac{a}{b}$, welcher Wert in die erste eingesetzt

$$\frac{3aas}{b} + \frac{3}{4}bs^3 - \frac{6aas}{b} - 3b\alpha\alpha s = 0$$

gibt, woher

$$ss = \frac{4(bb\alpha\alpha + aa)}{bb} \quad \text{wird und daher} \quad s = \frac{2\sqrt{bb\alpha\alpha + aa}}{b}$$

wird. Nun setzte man diese Werte in unsere Gleichung ein, und es wird

$$\frac{2a^3}{bb} + 2a\alpha\alpha + \frac{1}{4}bs^3 \cos 3\varphi = 0$$

werden, woher

$$\cos 3\varphi = -\frac{8a(aa + bb\alpha\alpha)}{b^3s^3} = -\frac{a}{\sqrt{aa + bb\alpha\alpha}}$$

wird. Man suche also den Winkel ω, dessen Kosinus

$$= -\frac{a}{\sqrt{aa + bb\alpha\alpha}}$$

sei, weil welcher Kosinus mit denen der Winkeln $-\omega$, $2\pi - \omega$, ebenso $2\pi + \omega$ übereinstimmt, werden wir die folgenden Werte haben:

$$\text{I. } 3\varphi = \omega, \quad \text{II. } 3\varphi = -\omega, \quad \text{III. } 3\varphi = 2\pi - \omega \text{ und IV. } 3\varphi = 2\pi + \omega;$$

daher werden nach Weglassen des zweiten Wertes, welcher natürlich nicht vom ersten abweicht, die drei Werte für den Winkel φ

$$\text{I. } \varphi = \frac{1}{3}\omega, \quad \text{II. } \varphi = 120^\circ - \frac{1}{3}\omega \quad \text{und} \quad \text{III. } \varphi = 120^\circ + \frac{1}{3}\omega$$

sein, nach Finden welcher Werte die drei Werte des Buchstaben p sein werden:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & p = -\frac{a}{b} + \frac{2\sqrt{bb\alpha\alpha + aa}}{b} \cos \tfrac{1}{3}\omega, \\ \text{II.} \quad & p = -\frac{a}{b} + \frac{2\sqrt{bb\alpha\alpha + aa}}{b} \cos(120^\circ - \tfrac{1}{3}\omega), \\ \text{III.} \quad & p = -\frac{a}{b} + \frac{2\sqrt{bb\alpha\alpha + aa}}{b} \cos(120^\circ + \tfrac{1}{3}\omega). \end{aligned}$$

§26 Nach Finden dieser Fälle wollen wir zu unserer allgemeinen Frage zurückkehren, in welcher Dreieckskurven solcher Art gesucht werden, in denen für die Spitzen der Buchstabe p drei gegebene Werte erhält, nämlich $p = \alpha$, $p = \beta$ und $p = \gamma$. Nun wollen wir aber zuerst der Kürze wegen

$$\alpha + \beta + \gamma = \zeta, \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \eta \quad \text{und} \quad \alpha\beta\gamma = \vartheta$$

setzen, und die drei zu erfüllenden Gleichungen werden sein [§ 21]:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & B - 2Af = 2Cg\vartheta, \\ \text{II.} \quad & 2C - Bf - 4Ag = -2Cg\eta, \\ \text{III.} \quad & -3Bg = 2Cg\zeta. \end{aligned}$$

Weil also galt [§ 20]:

$$A = b - af, \quad B = -2ag \quad \text{und} \quad C = -bg,$$

werden unsere drei Gleichungen daher

$$\begin{aligned}\text{I.}\quad & -ag - bf + aff = bgg\vartheta,\\ \text{II.}\quad & -3b + 3af = bg\eta,\\ \text{III.}\quad & 3a = -b\zeta\end{aligned}$$

sein; aus diesen werden wir sofort drei Werte für den Bruch $\frac{a}{b}$ erhalten, welche sind:

$$\text{I. } \frac{a}{b} = \frac{f - gg\vartheta}{ff - g}, \quad \text{II. } \frac{a}{b} = \frac{g\eta + 3}{3f} \quad \text{und} \quad \text{III. } \frac{a}{b} = -\frac{\zeta}{3}.$$

§27 Wenn nun der zweite und dritte dieser Werte einander gleich werden, wird

$$f = \frac{-g\eta - 3}{\zeta}$$

hervorgehen. Nun werde der erste Wert auch dem dritten gleich, und es wird

$$3f - 3gg\vartheta = -ff\zeta + g\zeta$$

sein, wo, wenn anstelle von f der gerade gefundene Wert eingesetzt wird,

$$3g\eta - 3gg\zeta\vartheta = g\zeta\zeta - gg\eta\eta$$

hervorgehen wird, welche Gleichung durch g geteilt

$$3\eta - 3g\zeta\vartheta = \zeta\zeta - g\eta\eta$$

gibt, woher

$$g = \frac{3\eta - \zeta\zeta}{3\zeta\vartheta - \eta\eta}$$

abgeleitet wird, und daher weiter

$$f = \frac{\zeta\eta - 9\vartheta}{3\zeta\vartheta - \eta\eta}.$$

§28 Nach Finden dieser Werte wird der oben [§ 20] angenommene Nenner $1 + f + gpp$ diese Form haben:

$$\frac{3\zeta\vartheta - \eta\eta + (\zeta\eta - 9\vartheta)p + (3\eta - \zeta\zeta)pp}{3\zeta\vartheta - \eta\eta},$$

in welcher $ff < 4g$ sein muss. Es ist aber

$$ff = \frac{\zeta\zeta\eta\eta - 18\zeta\eta\vartheta + 81\vartheta\vartheta}{(3\zeta\vartheta - \eta\eta)^2}$$

und

$$4g = \frac{12\eta - 4\zeta\zeta}{3\zeta\vartheta - \eta\eta} = \frac{36\zeta\eta\vartheta - 12\zeta^3\vartheta - 12\eta^3 + 4\zeta\zeta\eta\eta}{(3\zeta\vartheta - \eta\eta)^2}.$$

Es ist also notwendig, dass

$$\zeta\zeta\eta\eta - 18\zeta\eta\vartheta + 81\vartheta\vartheta < 36\zeta\eta\vartheta - 12\zeta^3\vartheta - 12\eta^3 + 4\zeta\zeta\eta\eta$$

ist, was ohne Zweifel von selbst passiert. Für die Zähler wollen wir

$$a = -\frac{\zeta c}{3\zeta\vartheta - \eta\eta} \quad \text{und} \quad b = \frac{3c}{3\zeta\vartheta - \eta\eta}$$

nehmen, sodass der für Π anzunehmende Bruch

$$\Pi = \frac{-\zeta c + 3cp}{3\zeta\vartheta - \eta\eta + (\zeta\eta - 9\vartheta)p + (3\eta - \zeta\zeta)pp}$$

ist. Weil aber immer $\zeta\zeta > 3\eta$ und $\eta\eta > 3\zeta\vartheta$ ist, wird dieser Wert gefälliger so ausgedrückt werden:

$$\Pi = \frac{\zeta c - 3cp}{\eta\eta - 3\zeta\vartheta + (9\vartheta - \zeta\eta)p + (\zeta\zeta - 3\eta)pp}.$$

§29 Weil die Lage der Achse völlig unserem Belieben überlassen ist, lässt sie sich immer so annehmen, dass sie eine Spitze berührt, dann wird aber dort $p = \infty$ werden, woher unsere Lösung sich nicht weniger weit erstrecken wird, obgleich wir $\alpha = \infty$ setzen; dann wird aber

$$\zeta = \alpha, \quad \eta = \alpha(\beta + \gamma) \quad \text{und} \quad \vartheta = \alpha\beta\gamma$$

sein; und daher wird

$$\eta\eta - 3\zeta\vartheta = \alpha\alpha(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma),$$
$$9\vartheta - \zeta\eta = 9\alpha\beta\gamma - \alpha\alpha(\beta + \gamma) = -\alpha\alpha(\beta + \gamma)$$

und

$$\zeta\zeta - 3\eta = \alpha\alpha - 3\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\alpha.$$

sein. Man nehme also $c = \alpha a$, dass der Zähler auch durch $\alpha\alpha$ teilbar wird, und unsere Formel wird

$$\Pi = \frac{a}{\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta + \gamma)p + pp}$$

sein, deren Nenner gewiss keinen reellen Faktor haben wird, wenn nicht $\beta = \gamma$ ist, welcher Fall aber per Konstruktion ausgeschlossen ist. Nachdem aber dieser Wert für Π angenommen worden ist, erhalten wir sofort

$$u = \frac{d\Pi}{dp} = \frac{a(\beta + \gamma) - 2ap}{(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma - (\beta + \gamma)p + pp)^2}$$

und

$$t = pu - \Pi = \frac{-a(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma) + 2a(\beta + \gamma)p - 3app}{(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta + \gamma)p + pp)^2}.$$

§30 Um aber daraus die Spitzen zu bestimmen, wollen wir für die erste Spitze $p = \infty$ setzen, und es wird so $t = 0$ wie $u = 0$ sein. Für die zweite Spitze wollen wir $p = \beta$ nehmen, und die Abszisse wird

$$t = -\frac{a(2\beta - \gamma)}{(\beta - \gamma)^3} \quad \text{und} \quad u = -\frac{a}{(\beta - \gamma)^3}$$

sein. Für dritte Spitze sei hingegen $p = \gamma$, und es wird

$$t = -\frac{a(\beta - 2\gamma)}{(\beta - \gamma)^3} \quad \text{und} \quad u = +\frac{a}{(\beta - \gamma)^3}$$

sein. Daher wird in der Figur (Fig. 10)[10]

$$GB = \frac{a}{(\beta - \gamma)^3}, \quad AH = \frac{a(\beta - 2\gamma)}{(\beta - \gamma)^3} \quad \text{und} \quad HC = \frac{a}{(\beta - \gamma)^3}$$

[10]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

sein.

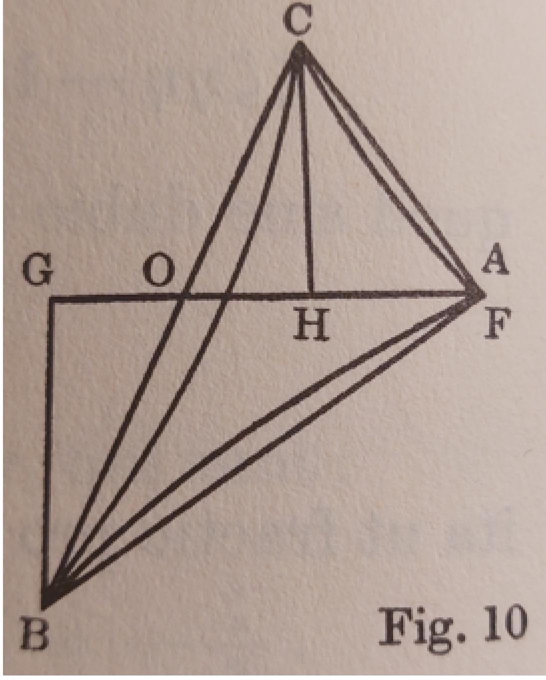


Fig. 10

§31 Nach Zeichnen der Strecken AB, AC und BC wird

$$AB = \frac{a}{(\beta-\gamma)^3}\sqrt{(2\beta-\gamma)^2+1}$$

und

$$AC = \frac{a}{(\beta-\gamma)^3}\sqrt{(\beta-2\gamma)^2+1}$$

sein. Weil für die dritte Strecke BC

$$BC^2 = (BG+HC)^2 + GH^2 = \frac{4aa + aa(\beta+\gamma)^2}{(\beta-\gamma)^6}$$

ist, wird daher

$$BC = \frac{a}{(\beta-\gamma)^3}\sqrt{4+(\beta+\gamma)^2}$$

sein, und so werden diese drei Strecken AB, AC und BC zueinander dasselbe Verhältnis haben wie diese drei Wurzelausdrücke:

$$\sqrt{(2\beta-\gamma)^2+1}, \quad \sqrt{(\beta-2\gamma)^2+1}, \quad \sqrt{4+(\beta+\gamma)^2}.$$

Für die Lage dieser Strecken bemerke man aber, dass

$$\text{der Tangens des Winkels } BAG = \frac{1}{2\beta-\gamma} \quad \text{und} \quad \tan CAH = \frac{1}{\beta-2\gamma}$$

ist; daher berechnet man den

$$\text{Tangens des Winkels } BAC = \frac{3\beta-3\gamma}{2\beta\beta-5\beta\gamma+2\gamma\gamma-1}.$$

Für die dritte Strecke wird der

$$\text{Tangens des Winkels } AOC = \tan BOG = \frac{BG+CH}{GH} = \frac{2}{\beta+\gamma}$$

sein. Weil also $ABC = GOB - GAB$ ist, wird

$$\tan ABC = \frac{3\beta-3\gamma}{(\beta+\gamma)(2\beta-\gamma)+2}$$

sein. Schließlich wird, wegen

$$\tan COG = -\tan BOG = -\frac{2}{\beta+\gamma},$$

weil der Winkel $ACB = COG - CAO$ ist,

$$\tan ACB = \frac{3\gamma-3\beta}{(\beta+\gamma)(\beta-2\gamma)-2}$$

sein.

§32 Wir wollen eines Beispiels wegen $\beta = 2$ und $\gamma = 1$ setzen und es wird $AG = 3a$ und $AH = 0$ sein, dann aber $GB = a$ und $HC = a$, woher die Kurve die Form haben wird, wie sie in Figur[11] 11 dargestellt wird;

[11]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

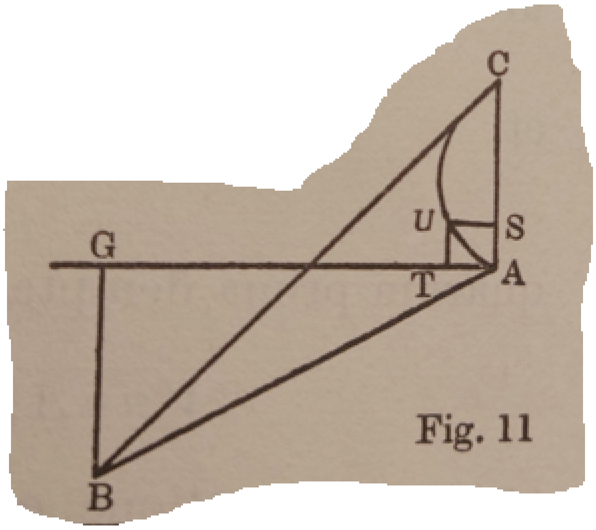


Fig. 11

wenn in dieser also dann irgendein Punkt U genommen wird, dessen Koordinaten AT und TU sind, wird

$$t = -\frac{3a - 6ap + 3app}{(3 - 3p + pp)^2} \quad \text{und} \quad u = \frac{3a - 2ap}{(3 - 3p + pp)^2}$$

sein. Hier ist beim Zweig AUC der Punkt bemerkenswert, welcher von der Gerade AC am weitesten entfernt ist; dieser wird also offenbar dort sein, wo seine Tangente zur Achse normal ist, und daher wird an dieser Stelle $p = 0$ sein, woher $AT = -\frac{1}{3}a$ wird, was der gesuchte maximale Abstand US ist; dann wird aber $TU = u = \frac{1}{3}a$ sein. Weil also der Tangens des Winkels $GAB = \frac{1}{3}$ ist, wird auf dem Bogen AB der Punkt von der Strecke AB am weitesten entfernt sein, dessen Tangens der Strecke AB parallel ist; für diesen findet man also $p = 3$, woher $AT = t = -\frac{4}{3}a$ und $TU = u = -\frac{1}{3}a$ ist. Aus diesem Beispiel wird aber sehr deutlich klar, wie alle Fälle entwickelt werden sollten; und es wird in der Tat nicht schwierig sein, daraus Dreieckskurven solcher Art zu finden, die nach dem gegebenen Dreieck ABC einbeschrieben seinen, weil ja aus der Natur der Seiten des Dreiecks das Verhältnis dieser Formeln bekannt wird:

$$\sqrt{(2\beta - \gamma)^2 + 1}, \quad \sqrt{(\beta - 2\gamma)^2 + 1}, \quad \sqrt{4 + (\beta + \gamma)^2}.$$

§33 Seien drei Seiten AB, AC und BC zueinander wie die Zahlen A, B, C und man setze

$$\sqrt{(2\beta-\gamma)^2+1} = nA, \quad \sqrt{(\beta-2\gamma)^2+1} = nB$$

und

$$\sqrt{4+(\beta+\gamma)^2} = nC;$$

daher wird nach Nehmen der Quadrate

$$(2\beta-\gamma)^2 = nnAA-1, \quad (\beta-2\gamma)^2 = nnBB-1$$

und

$$(\beta+\gamma)^2 = nnCC-4,$$

woher

$$1.\ \ 2\beta-\gamma = \sqrt{nnAA-1}, \quad 2.\ \ \beta-2\gamma = \sqrt{nnBB-1}$$

und

$$3.\ \ \beta+\gamma = \sqrt{nnCC-4},$$

von welchen die erste nach Wegnehmen der zweiten

$$\sqrt{nnAA-1} - \sqrt{nnBB-1} = \sqrt{nnCC-4}$$

liefert, aus welcher Gleichung die Größe n bestimmt werden muss, nach Entdecken von welcher man

$$3\beta = \sqrt{nnAA-1} + \sqrt{nnCC-4} \quad \text{und} \quad 3\gamma = \sqrt{nnCC-4} - \sqrt{nnBB-1}$$

finden wird; nachdem all dies ausfindig gemacht worden ist wird die hinreichende Dreieckskurve leicht vermöge der oberen Formeln bestimmt; aus jener Gleichung eruiert man aber

$$nn = \frac{4(2AA+2BB-CC)}{2AABB+2AACC+2BBCC-A^4-B^4-C^4}.$$

Wenn daher die Fläche des Dreiecks, dessen Seiten A, B und C sind, Δ genannt wird, wird hier der Nenner $= 16\Delta\Delta$ sein, so dass

$$nn = \frac{2AA + 2BB - CC}{4\Delta\Delta}$$

ist. Nachdem aber dieser Wert gefunden worden ist, wird

$$\text{I.} \quad \sqrt{nnAA - 1} = \frac{3AA + BB - CC}{4\Delta},$$

$$\text{II.} \quad \sqrt{nnBB - 1} = \frac{3BB + AA - CC}{4\Delta}$$

und

$$\text{III.} \quad \sqrt{nnCC - 4} = \frac{2AA - 2BB}{4\Delta}$$

sein; aus diesen findet findet man schlussendlich

$$3\beta = \frac{5AA - BB - CC}{4\Delta} \quad \text{und} \quad 3\gamma = \frac{AA - 5BB + CC}{4\Delta},$$

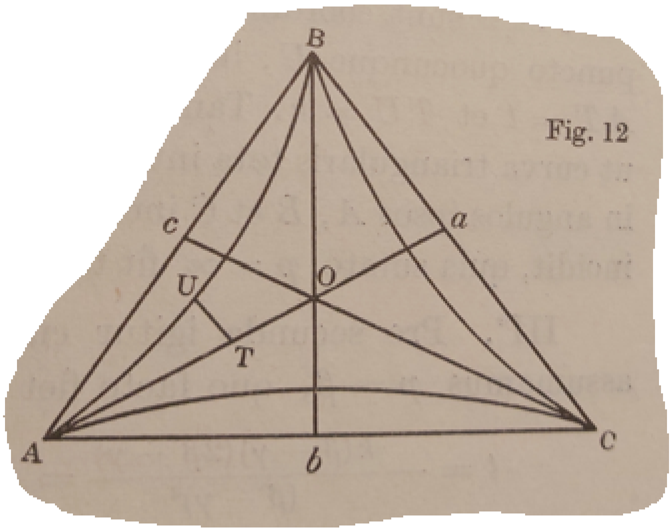
sodass nun alles bestimmt ist, was für die Lösung dieses Problem wichtig ist. Nachdem irgendein gradliniges Dreieck vorgelegt worden ist, kann immer eine Dreieckskurve beschrieben werden, deren Spitzen auf die Ecken des Dreiecks fallen, und die Seiten des Dreiecks zugleich die Strecken der Bogen sind, aus den die dreieckige Figur besteht.

§34 Wir wollen also diese gefällige Lösung des Problems, dem diese ganze Untersuchung gewidmet war, hinzufügen.

Problem

Innerhalb des gegebenen Dreiecks ABC (Fig. 12)[12] *eine stetige und algebraische Dreieckskurve einzubeschreiben, deren jeweilige Spitzen auf die Ecken des Dreiecks, also A, B und C, fallen.*

[12] Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.



LÖSUNG

1) Man nenne die Seiten des gegebenen Dreiecks

$$BC = a, \quad AC = b \quad \text{und} \quad AB = c$$

und die Fläche dieses Dreiecks sei $= \Delta$, sodass

$$16\Delta\Delta = 2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4$$

oder

$$16\Delta\Delta = (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$$

ist, dann teile man die einzelnen Seiten des Dreiecks in den Punkten a, b und c in zwei Teile und die Geraden Aa, Bb, Cc, die sich gegenseitig im Schwerpunkt O des Dreiecks schneiden werden, werden die Tangenten der Dreieckskurve in ihren Spitzen A, B und C sein. Nun, nachdem die Gerade Aa als Achse genommen worden ist, setze man den Kotangens des Winkels $BOa = \beta$ und den Kotangens des Winkels $COa = -\gamma$, und aus den zuvor gefundenen Formeln, indem man anstelle der Buchstaben A, B und C die Kleinbuchstaben b, c und a schreibt, errechnet man

$$\beta = \frac{5bb - aa - cc}{12\Delta} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{aa + bb - 5cc}{12\Delta},$$

so dass

$$\beta + \gamma = \frac{bb - cc}{2\Delta}$$

ist.

2) Nun nehme man

$$\Pi = \frac{k}{\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta + \gamma)p + pp},$$

woher

$$u = \frac{k(\beta + \gamma) - 2kp}{(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta + \gamma)p + pp)^2}$$

werden wird; dann ist aber

$$t = pu - \Pi = \frac{-k(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma) + 2k(\beta + \gamma)p - 3kpp}{(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta + \gamma)p + pp)^2},$$

wo t und u die Koordinaten für die gesuchte Dreieckskurve sind. Denn nachdem irgendein Punkt U auf ihr genommen worden ist und von da aus zur Achse Aa hin das Lot UT gefällt worden ist, wird $AT = t$ und $TU = u$ sein. Es ist also nur übrig, dass die Größe k so bestimmt wird, dass die ganze Dreieckskurve innerhalb vom Dreieck ABC liegt, und zugleich ihre Spitzen auf die Ecken A, B und C fallen; aber die erste Spitze fällt von selbst auf den Punkt A, weil nach Nehmen von $p = \infty$ so $t = 0$ wie $u = 0$ wird.

3) Für die zweite Spitze, die auf den Punkt B fallen muss, wollen wir $p = \beta$ setzen, wonach

$$t = -\frac{k(\beta - \gamma)(2\beta - \gamma)}{(\beta - \gamma)^4} = -\frac{k(2\beta - \gamma)}{(\beta - \gamma)^3} \quad \text{und} \quad u = -\frac{k}{(\beta - \gamma)^3}$$

werden wird. Es ist also notwendig, dass $tt + uu = bb$ wird, woher

$$\frac{kk(2\beta - \gamma)^2 + kk}{(\beta - \gamma)^6} = bb \quad \text{und daher} \quad k = \frac{b(\beta - \gamma)^3}{\sqrt{(2\beta - \gamma)^2 + 1}}$$

wird.

4) Es ist aber

$$\beta-\gamma=\frac{2(bb+cc)-aa}{6\Delta} \quad \text{und} \quad 2\beta-\gamma=\frac{3bb+cc-aa}{4\Delta},$$

daher wird also

$$(2\beta-\gamma)^2+1=\frac{2b^4+2bbcc-aabb}{4\Delta\Delta}$$

sein, daher

$$\sqrt{(2\beta-\gamma)^2+1}=\frac{b\sqrt{2bb+2cc-aa}}{2\Delta},$$

nach Einsetzen welcher Werte man

$$k=\frac{(2bb+2cc-aa)^{\frac{5}{2}}}{108\Delta\Delta}$$

findet, nach Erkennen welcher Größe wir eine algebraische Gleichung für die dem Dreieck ABC einzubeschreibende Dreieckskurve erhalten, welche wir gesucht haben.

Korollar

Aber aus einer solchen Dreieckskurve können sehr leicht unzählige orbiforme gebildet werden. Denn, nachdem die Koordinaten der orbiformen Kurve x und y gesetzt worden sind, wird

$$x=u+\frac{cp}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{und} \quad y=t-\frac{c}{\sqrt{1+pp}}$$

genommen werden können, welche also auch algebraisch sein wird; aber jene Dreieckskurve wird nicht die Evolute von dieser sein, sondern wird mit all diesen orbiformen Kurven eine gemeinsame Evolute haben, welche ebenso eine Dreieckskurve sein wird, und zugleich rektifizierbar.