Die allgemeine sphärische Trigonometrie unmittelbar aus ersten Prinzipien abgeleitet*

Leonhard Euler

§1 Es sei ein beliebiges Kugeldreieck (Fig. 1)[1] vorgelegt,

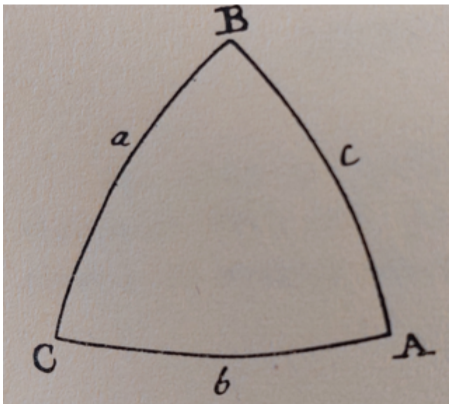


Fig. 1

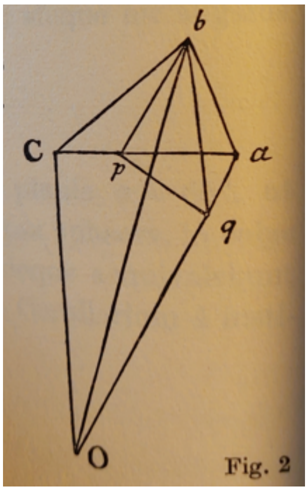
dessen Winkel mit den Großbuchstaben A, B, C, die Seiten aber mit den Kleinbuchstaben a, b, c wie in der Figur zu sehen bezeichnet werden, sodass denselben Großbuchstaben dieselben Kleinbuchstaben gegenüber liegen. Nun

*Originaltitel: "Trigonometria sphaerica universa, ex primis principiis breviter et dilucide derivata", zuerst publiziert in: *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 1779: I* (1782, verfasst 1781): pp. 72–86, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 26, pp. 224 – 236, Eneström-Nummer E524, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

[1]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

zeichne man aus dem Mittelpunkt der Kugel, dem wir den Buchstaben O zuteilen wollen, durch die einzelnen Ecken hindurch die Geraden OC, Oa, Ob, welche im Mittelpunkt O den Raumwinkel bilden, dessen ebene Winkel die Seiten des Dreiecks messen werden, aber deren gegenseitige Neigung die Winkel des Dreiecks.

§2 Nachdem diese Dinge vorausgeschickt worden sind, nehme man (Fig. 2)[2] OC dem Kugelradius $= 1$, woher man zu OC in jeder der beiden Ebenen COa und COb normal die Geraden Ca und Cb festlege;



aber dann fälle man von b zu Ca das Lot bp, was zugleich zur Ebene COa normal sein wird; außerdem zeichne man von p aus zu Oa die Normale pq und so, nach Zeichnen von bq, wird sie auch zu Oa normal sein. Auf diese Weise wird die ganze Figur, die wir brauchen, konstruiert sein.

§3 Weil nun der Winkel COa der Seite b gleich ist, wird

$$Ca = \tan b \quad \text{und} \quad Oa = \sec b = \frac{1}{\cos b}$$

sein. In gleicher Weise, wegen des Winkels $COb = a$, wird

$$Cb = \tan a \quad \text{und} \quad OB = \sec a = \frac{1}{\cos a}$$

[2]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

sein. Aber weiter, weil der Winkel $aOb = c$ und $Ob = \frac{1}{\cos a}$ ist, wird

$$bq = \frac{\sin c}{\cos a} \quad \text{und} \quad Oq = \frac{\cos c}{\cos a}$$

sein. Daher wird für das Ausdrücken der übrigen Linien der Figur, wegen des Winkels $aCb = C$,

$$bp = Cb \sin C = \tan a \sin C$$

und

$$Cp = Cb \cos C = \tan a \cos C$$

sein, woher weiter

$$ap = Ca - Cp = \tan b - \tan a \cos C$$

berechnet wird, und weil der Winkel $CaO = 90° - b$ ist, wird man

$$pq = ap \cos b = \sin b - \tan a \cos b \cos C$$

und

$$aq = ap \sin b = \frac{\sin^2 b}{\cos b} - \tan a \sin b \cos C$$

haben. Daher, weil wir $Oq = \frac{\cos c}{\cos a}$ gefunden haben, wird

$$Oa = \frac{1}{\cos b} = \frac{\cos c}{\cos a} + \frac{\sin^2 b}{\cos b} - \tan a \sin b \cos C$$

werden und so wird

$$\frac{\cos c}{\cos a} = \cos b + \tan a \sin b \cos C$$

oder

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

sein.

§4 Weil nun der Winkel bqp die Neigung der Ebene aOb zu aOC liefert, wird dieser Winkel $bqp = A$ sein, woher man aus dem Dreieck bpq zuerst

$$\sin A = \frac{bp}{bq} = \frac{\sin a \sin C}{\sin c} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin C}{\sin c} = \frac{\sin A}{\sin a}$$

haben; daher folgt nun, dass die Sinus der Winkel unseres Dreiecks den Sinus der gegenüberliegenden Seiten proportional sind. Darauf umfasst die Gleichung

$$\cos A = \frac{pq}{bq} = \frac{\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C}{\sin c}$$

mit den zwei vorhergehenden kombiniert die ganze Lehre der Kugelgeometrie, was aber eine umfassendere Erklärung verlangt, woher wir diese einzelnen drei Gleichungen mehr entwickeln wollen.

Entwicklung der ersten Formel

$$\frac{\sin C}{\sin c} = \frac{\sin A}{\sin a}.$$

§5 Weil so die Großbuchstaben A, B, C wie die Kleinbuchstaben a, b, c sich untereinander vertauschen lassen, wenn nur den Großbuchstaben dieselben entsprechenden Kleinbuchstaben gegenüberstehen, wird auch $\frac{\sin C}{\sin c} = \frac{\sin B}{\sin b}$ sein, und so wird diese Gleichung hervorgehen:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

Weiter wird es förderlich sein die folgenden Gleichungen bemerkt zu haben:

$$\sin A \sin b = \sin B \sin a,$$

$$\sin A \sin c = \sin C \sin a,$$

$$\sin B \sin c = \sin C \sin b.$$

Entwicklung der Formel

$$\cos A \sin c = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C$$

§6 Weil $\sin A \sin c = \sin C \sin a$ ist, teile man die linke Seite dieser Gleichung durch $\sin A \sin c$, die rechte hingegen durch $\sin C \sin a$, und man wird

$$\cot A = \frac{\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C}{\sin a \sin C}$$

erhalten, woher nun aus den gegebenen zweiten Seiten a und b, zusammen mit dem eingeschlossenen Winkel C, der Winkel A gefunden werden kann; und in gleicher Weise wird der Winkel B durch diese aus jener derivierten Formel erschlossen werden, indem die Buchstaben A, B, a, b vertauscht werden:

$$\cot B = \frac{\cos b \sin a - \cos a \sin b \cos C}{\sin b \sin C}.$$

§7 Wenn wir weiter den ersten Term derselben Formel, die wir hier betrachten, mit $\frac{\sin C}{\sin c}$, den zweiten mit $\frac{\sin B}{\sin b}$, den dritten hingegen mit $\frac{\sin A}{\sin a}$ multiplizieren, wird diese bemerkenswerte Gleichung entspringen:

$$\cos A \sin C = \cos a \sin B - \cos b \sin A \cos C,$$

$$\cos a = \frac{\cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b}{\sin B}$$

und nach Vertauschen der Buchstaben B und C sowie b und c wird

$$\cos a = \frac{\cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c}{\sin C}$$

und

$$\cos a \sin C = \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c$$

sein, welche von der vorgelegten nur darin abweicht, dass die Klein- und Großbuchstaben miteinander vertauscht sind, darüber hinaus aber alle Kosinus negativ genommen werden.

§8 Wenn wir also nun die linke Seite dieser letzten Gleichung durch $\sin a \sin C$, die rechte hingegen durch $\sin A \sin c$ teilen, wird diese Gleichung entspringen:

$$\cot a = \frac{\cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c}{\sin A \sin c},$$

welche für das Finden der Seite a aus den zwei gegebenen Winkeln A, B zusammen mit der anlegenden Seite c dient; aber dann wird aus denselben gegebenen Größen auch die Seite b mit dieser Gleichung bestimmt werden:

$$\cot b = \frac{\cos B \sin A + \sin B \cos A \cos c}{\sin B \sin c}.$$

§9 Außerdem wird aber aus derselben vorgelegten Formel der ansonsten sehr schwere Fall, in dem vom drei gegebenen Seiten ausgehenden die Seiten verlangt werden, gefunden. Weil nämlich

$$\cos A \sin c = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C$$

ist, wird in gleicher Weise, nach Vertauschen der Buchstaben A und B,

$$\cos B \sin c = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C$$

sein. Wenn die letzte, mit $\cos C$ multipliziert, zur ersten addiert wird, wird diese Gleichung hervorgehen:

$$\sin c(\cos A + \cos B \cos C) = \cos a \sin b \sin^2 C;$$

aber wegen $\sin b \sin C = \sin B \sin c$ wird jene Gleichung diese Form annehmen:

$$\cos A + \cos B \cos C = \cos a \sin B \sin C$$

oder

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin C \cos a \sin B.$$

Nach Vertauschen der Buchstaben A und C, während B dasselbe bleibt, wird

$$\cos C = -\cos B \cos A + \sin B \sin A \cos c$$

werden, welche aus dritten Formel:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

entspringt, wenn die Groß- und Kleinbuchstaben so untereinander vertauscht werden, aber die alle Kosinus negativ genommen werden.

Entwicklung der Formel

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

§10 Hier ist freilich sofort klar, dass auch diese Formel einen zweifachen Nutzen leistet, zum einen, dass aus zwei gegebenen der Seiten a, b, c die Winkel bestimmt werden, was mithilfe dieser Formel

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$$

geschieht, zum anderen, dass aus den zwei Seiten a und b mit dem eingeschlossenen Winkel C die dritte Seite c gefunden wird, was mithilfe dieser Formel geschieht:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

§11 Nun werden wir also diesen Nutzen sogar auf die Winkel übertragen können, weil wir ja gerade

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$

gefunden haben. Daher wird nämlich sofort, wenn die zwei Winkel A, B mit der anliegenden Seite c gegeben sind, der dritte Winkel C bestimmt. Aber darauf, wenn alle drei Winkel des sphärischen Dreiecks gegeben sind, wird jede beliebige Seite, wie zum Beispiel c, auf diese Weise bestimmt:

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}.$$

§12 Weil also die ganze Kugelgeometrie auf den drei oben gefundenen Gleichungen fußt, hat die Vertauschbarkeit der Ecken und Seiten allgemein Geltung, wenn nur alle Kosinus negativ genommen werden. Denn in der ersten Formel:

$$\frac{\sin C}{\sin c} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin a}$$

ist diese Permutabilität per se offensichtlich, weil keine Kosinus auftauchen, weiter ist diese Permutabilität für die beiden anderen Formeln schon gezeigt worden, woher das folgende außerordentliche Theorem entspringt.

Theorem

Nach Vorlage irgendeines beliebigen Kugeldreiecks, dessen Winkel A, B, C und Seiten a, b, c seien, kann immer ein anderes analoges Dreieck dargeboten werden, dessen Winkel die Komplemente der Seiten von jenen zu zwei rechten sind, die Seiten hingegen die Komplemente der Winkel zu zwei rechten sind.

Denn auf diese Weise bleiben die Sinus dieselben, aber alle Kosinus werden negativ und daher auch die Tangenten und Kotangenten. Es ist aber bekannt, dass ein solches Dreieck aus den Polen der drei Seiten des vorgelegten Dreiecks gebildet wird.

§13 Also kann zum praktischen Gebrauch alles Gelehrte in vier Formen dargestellt werden, von welchen zwei sogar so eng zusammenhängen, dass die eine aus der anderen gebildet wird, indem die Klein- und Großbuchstaben so miteinander vertauscht werden, so dass, nachdem die Kosinus negativ genommen worden sind, es genügt sich nur an zwei Formeln zu erinnern. Wir wollen also diese vier Formen mit allen Variationen, welche sie durch Vertauschen der Buchstaben erfahren können, auflisten.

Erste Form

§14 Diese Form involviert zwei Fälle, von denen in dem einen aus drei gegebenen Seiten ein bestimmter Winkel, in dem anderen hingegen aus zwei gegebenen Seiten, zusammen mit dem eingeschlossenen Winkel, die dritte Seite gefunden wird.

$$
\begin{array}{r|l}
\cos A = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} & \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\
\cos B = \dfrac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} & \cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B, \\
\cos C = \dfrac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} & \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.
\end{array}
$$

Zweite Form

§15 Diese Form enthält auch zwei Fälle, von welchen in dem einen aus drei gegebenen Ecken eine Seite, in dem anderen hingegen von zwei gegebenen Winkeln zusammen mit der anderen Seite der dritte Winkel gesucht wird:

$$\begin{array}{l|l}
\cos a = \dfrac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C} & \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \\
\cos b = \dfrac{\cos B + \cos A \cos C}{\sin A \sin C} & \cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b, \\
\cos c = \dfrac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B} & \cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c.
\end{array}$$

Dritte Form

§16 Diese Form umfasst den Fall, in dem aus zwei Seiten zusammen mit dem eingeschlossenen Winkel die zwei übrigen Winkel bestimmt werden, welche Formeln mit ihren Variationen sich so verhalten werden:

$$\begin{array}{l|l}
\cot A = \dfrac{\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C}{\sin a \sin C} & \cot B = \dfrac{\sin a \cos b - \cos a \sin b \cos C}{\sin b \sin C} \\
\cot B = \dfrac{\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A}{\sin b \sin A} & \cot C = \dfrac{\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A}{\sin c \sin A} \\
\cot C = \dfrac{\cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B}{\sin c \sin B} & \cos A = \dfrac{\sin c \cos a - \cos c \sin a \cos B}{\sin a \sin B}
\end{array}$$

Vierte Form

§17 Diese Form betrachtet den Fall, in dem aus zwei Winkeln zusammen mit der anliegenden Seite die beiden übrigen Seiten bestimmt werden, welche Formeln mit ihren Variationen sich so verhalten:

$$
\begin{array}{rl|rl}
\cot a = & \dfrac{\cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c}{\sin A \sin c} & \cot b = & \dfrac{\sin A \cos B + \cos A \sin B \cos c}{\sin B \sin c} \\
\cot b = & \dfrac{\cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a}{\sin B \sin a} & \cot c = & \dfrac{\sin B \cos C + \cos B \sin C \cos a}{\sin C \sin a} \\
\cot c = & \dfrac{\cos C \sin A + \sin C \cos A \cos b}{\sin C \sin b} & \cot a = & \dfrac{\sin C \cos A + \cos C \sin A \cos b}{\sin A \sin b}
\end{array}
$$

§18 Diese Schlichtheit ist umso bemerkenswerter, weil die Auflösung rechtwinkliger Dreiecke sogar sechs voneinander völlig verschiedene Formeln verlangt. Denn wenn der Winkel C ein rechter und daher c die Hypothenuse und a und b beide Katheten waren, sind die sechs erforderlichen Formeln die folgenden:

$$
\begin{array}{lllll}
\cos c & = \cos a \cos b & & & \\
\cos c & = \cot A \cot B & & & \\
\sin a & = \sin c \sin A & \text{oder} & \sin b & = \sin c \sin B \\
\tan b & = \tan c \cos A & \text{oder} & \tan a & = \tan c \cos B \\
\tan a & = \tan A \sin b & \text{oder} & \tan b & = \tan B \sin a \\
\cos A & = \cos a \sin B & \text{oder} & \cos B & = \cos b \sin A,
\end{array}
$$

welche Formeln aus den oberen sofort für

$$\cos C = 0 \quad \text{und} \quad \sin C = 1$$

abgeleitet werden.

§19 Damit aber die Logarithmen benutzt werden können, sind aus den oberen Formeln andere von ihrer Gestalt abzuleiten, welche aus Faktoren bestehen; dies kann durch gewisse Transformationen erlangt werden, mit welchen wir zu den Hälften so der Winkel wie der Seiten geführt werden. Diese Transformationen lassen sich aber auf die folgenden Weisen kurz durchführen.

Erste Transformation

§20 Diese Transformation wird aus dieser Formel der ersten Form

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

am bequemsten abgeleitet. Denn zuerst folgt:

$$1 - \cos A = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c}$$
$$1 + \cos A = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c}.$$

Weil

$$\frac{1-\cos A}{1+\cos A} = \tan^2 \frac{1}{2}A \quad \text{ist, wird} \quad \tan^2 \frac{1}{2}A = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\cos a - \cos(b+c)}$$

sein; es ist aber bekannt, dass

$$\cos p - \cos q = 2 \sin \frac{q-p}{2} \sin \frac{p+q}{2}$$

ist, woher wir

$$\tan \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin \frac{a-b+c}{2} \cdot \sin \frac{a+b-c}{2}}{\sin \frac{b+c-a}{2} \cdot \sin \frac{a+b+c}{2}}}$$

haben werden.

Zweite Transformation

§21 Diese entnimmt man aus der Formel der ersten Form

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

woher man

$$1 - \cos a = -\frac{\cos(B+C) + \cos A}{\sin B \sin C},$$
$$1 + \cos a = \frac{\cos A + \cos(B-C)}{\sin B \sin C}$$

ableitet, und so wird

$$\tan^2\frac{1}{2}a = -\frac{\cos(B+C)+\cos A}{\cos(B-C)+\cos A}$$

sein. Weil nun

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

ist, wird

$$\tan\frac{1}{2}a = \sqrt{-\frac{\cos\frac{B+C-A}{2}\cos\frac{B+C+A}{2}}{\cos\frac{B+A-C}{2}\cos\frac{A+C-B}{2}}}$$

sein.

Dritte Transformation

§22 Diese Transformation lässt sich auch aus der ersten Form heraus erledigen, indem man diese zwei Formeln verbindet:

$$\cos a - \cos b\cos c = \sin b\sin c\cos A,$$

$$\cos b - \cos a\cos c = \sin a\sin c\cos B;$$

von diesen liefert jene durch diese geteilt

$$\frac{\cos a - \cos b\cos c}{\cos b - \cos a\cos c} = \frac{\sin b\cos A}{\sin a\cos B} = \frac{\sin B\cos A}{\sin A\cos B}.$$

Man addiere auf beiden Seiten die Einheit und es wird

$$\frac{(\cos a + \cos b)(1-\cos c)}{\cos b - \cos a\cos c} = \frac{\sin(A+B)}{\sin A\cos B}$$

werden, man substrahiere auf beiden Seiten die Einheit, es wird

$$\frac{(\cos a - \cos b)(1+\cos c)}{\cos b - \cos a\cos c} = \frac{\sin(B-A)}{\sin A\cos B}$$

hervorgehen, welche Gleichung durch die erste geteilt

$$\frac{\cos a - \cos b}{\cos a + \cos b}\cdot\cot^2\frac{1}{2}c = \frac{\sin(B-A)}{\sin(B+A)}$$

gibt. Es ist aber bekannt, dass

$$\frac{\cos p - \cos q}{\cos p + \cos q} = \tan\frac{q+p}{2}\tan\frac{q-p}{2}$$

ist, woher man berechnet:

$$\tan\frac{b-a}{2}\cdot\tan\frac{b+a}{2}\cdot\cot^2\frac{1}{2}c = \frac{\sin(B-A)}{\sin(B+A)}.$$

§23 Wir wollen diese Formel aus der primären Eigenschaft zur Hilfe nehmen:

$$\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin A},$$

woher wir

$$\frac{\sin b - \sin a}{\sin b + \sin a} = \frac{\sin B - \sin A}{\sin B + \sin A}$$

ableiten, welche auf diese Form zurückgeführt wird:

$$\tan\frac{b-a}{2}\cot\frac{b+a}{2} = \tan\frac{B-A}{2}\cot\frac{B+A}{2}.$$

Wenn wir nun die zuvor gefundene Gleichung mit dieser multiplizieren, wird diese hervorgehen:

$$\left(\tan\frac{b-a}{2}\right)^2\cot^2\frac{1}{2}c = \frac{\left(\sin\frac{B-A}{2}\right)^2}{\left(\sin\frac{B+A}{2}\right)^2}$$

oder nach Ziehen der Wurzel

$$\tan\frac{b-a}{2}\cot\frac{1}{2}c = \frac{\sin\frac{B-A}{2}}{\sin\frac{B+A}{2}}.$$

Aber die erste Formel gibt durch die zweite geteilt

$$\tan\frac{b+a}{2}\cot\frac{1}{2}c = \frac{\cos\frac{B-A}{2}}{\cos\frac{B+A}{2}}.$$

Mit diesen Formeln wird also der Fall aufgelöst, in dem die zwei Winkel A und B zusammen mit der anliegenden Seite c gegeben sind und die beiden Seiten a und b gesucht werden, was mithilfe dieser Formeln geschieht:

$$\tan\frac{b-a}{2} = \tan\frac{1}{2}c\frac{\sin\frac{B-A}{2}}{\sin\frac{B+A}{2}}$$

$$\tan\frac{b+a}{2} = \tan\frac{1}{2}c\frac{\cos\frac{B-A}{2}}{\cos\frac{B+A}{2}}.$$

Vierte Transformation

§24 Auf die gleicher Weise leitet man aus diesen Formen ab:

$$\cos A + \cos B\cos C = \sin B\sin C\cos a$$

$$\cos B + \cos A\cos C = \sin A\sin C\cos b,$$

von welchen jene durch diese geteilt

$$\frac{\cos A + \cos B\cos C}{\cos B + \cos A\cos C} = \frac{\sin B\cos a}{\sin A\cos b} = \frac{\sin b\cos a}{\sin a\cos b}$$

liefert. Daher leitet man durch Addieren wie Subtrahieren der Einheit die folgenden neuen Gleichungen ab:

$$\frac{(\cos A + \cos B)(1+\cos C)}{\cos B + \cos A\cos C} = \frac{\sin(a+b)}{\sin a\cos b}$$

$$\frac{(\cos A - \cos B)(1-\cos C)}{\cos B + \cos A\cos C} = \frac{\sin(b-a)}{\sin a\cos b},$$

und durch Teilen von jener durch diese erlangen wir:

$$\frac{\cos A + \cos B}{\cos A - \cos B}\cot^2\frac{1}{2}C = \frac{\sin(a+b)}{\sin(b-a)}$$

oder

$$\tan\frac{B-A}{2}\cdot\tan\frac{B+A}{2} = \cot^2\frac{1}{2}C\cdot\frac{\sin(b-a)}{\sin(b+a)},$$

welche Gleichung multipliziert mit und geteilt durch diese:

$$\tan\frac{B-A}{2}\cot\frac{B+A}{2} = \tan\frac{b-a}{2}\cot\frac{b+a}{2}$$

ergibt:

$$\tan\frac{B-A}{2} = \cot\frac{1}{2}C \cdot \frac{\sin\frac{b-a}{2}}{\sin\frac{b+a}{2}}$$

$$\tan\frac{B+A}{2} = \cot\frac{1}{2}C \cdot \frac{\cos\frac{b-a}{2}}{\cos\frac{b+a}{2}},$$

welche Formeln für den Fall gelten, in dem zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gegeben sind.

§25 Weil wir ja alle Variationen der vorhergehenden Formeln angeführt haben, wollen wir auch diese Fälle zusammen mit allen Variationen auflisten

$$\tan\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{a+c-b}{2}}{\sin\frac{b+c-a}{2}\sin\frac{a+b+c}{2}}}$$

$$\tan\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin\frac{b+c-a}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin\frac{a+c-b}{2}\sin\frac{a+b+c}{2}}}$$

$$\tan\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin\frac{a+c-b}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{a+b+c}{2}}}$$

$$\tan\frac{1}{2}a = \sqrt{-\frac{\cos\frac{B+C-A}{2}\cos\frac{A+B+C}{2}}{\cos\frac{A+B-C}{2}\cos\frac{A+C-B}{2}}}$$

$$\tan\frac{1}{2}b = \sqrt{-\frac{\cos\frac{A+C-B}{2}\cos\frac{A+B+C}{2}}{\cos\frac{B+C-A}{2}\cos\frac{A+B-C}{2}}}$$

$$\tan\frac{1}{2}c = \sqrt{-\frac{\cos\frac{A+B-C}{2}\cos\frac{A+B+C}{2}}{\cos\frac{A+C-B}{2}\cos\frac{B+C-A}{2}}}$$

$\tan\frac{b-a}{2} = \tan\frac{1}{2}c\frac{\sin\frac{B-A}{2}}{\sin\frac{B+A}{2}}$	$\tan\frac{b+a}{2} = \tan\frac{1}{2}c\frac{\cos\frac{B-A}{2}}{\cos\frac{B+A}{2}}$
$\tan\frac{c-b}{2} = \tan\frac{1}{2}a\frac{\sin\frac{C-B}{2}}{\sin\frac{C+B}{2}}$	$\tan\frac{c+b}{2} = \tan\frac{1}{2}a\frac{\cos\frac{C-B}{2}}{\cos\frac{C+B}{2}}$
$\tan\frac{a-c}{2} = \tan\frac{1}{2}b\frac{\sin\frac{A-C}{2}}{\sin\frac{A+C}{2}}$	$\tan\frac{a+c}{2} = \tan\frac{1}{2}b\frac{\cos\frac{A-C}{2}}{\cos\frac{A+C}{2}}$
$\tan\frac{B-A}{2} = \cot\frac{1}{2}C\frac{\sin\frac{b-a}{2}}{\sin\frac{b+a}{2}}$	$\tan\frac{B+A}{2} = \cot\frac{1}{2}C\frac{\cos\frac{b-a}{2}}{\cos\frac{b+a}{2}}$
$\tan\frac{C-B}{2} = \cot\frac{1}{2}A\frac{\sin\frac{c-b}{2}}{\sin\frac{c+b}{2}}$	$\tan\frac{C+B}{2} = \cot\frac{1}{2}A\frac{\cos\frac{c-b}{2}}{\cos\frac{c+b}{2}}$
$\tan\frac{A-C}{2} = \cot\frac{1}{2}B\frac{\sin\frac{a-c}{2}}{\sin\frac{a+c}{2}}$	$\tan\frac{A+C}{2} = \cot\frac{1}{2}B\frac{\cos\frac{a-c}{2}}{\cos\frac{a+c}{2}}$

§26 Aus diesen letzten Formeln wird leicht der Fall abgehandelt, welchen wir noch nicht beleuchtet haben, in dem zwei Seiten mit den gegenüberliegenden Winkeln gegeben sind, und entweder die dritte Seite oder der dritte Winkel gesucht wird, was beides in zweifacher Weise geschehen kann. Wir wollen also diese Formeln mit den Variationen anführen

$$
\begin{array}{l|l}
\tan\frac{1}{2}c = \tan\frac{b-a}{2}\frac{\sin\frac{B+A}{2}}{\sin\frac{B-A}{2}} & \tan\frac{1}{2}c = \tan\frac{b+a}{2}\frac{\cos\frac{B+A}{2}}{\cos\frac{B-A}{2}} \\
\tan\frac{1}{2}a = \tan\frac{c-b}{2}\frac{\sin\frac{C+B}{2}}{\sin\frac{C-B}{2}} & \tan\frac{1}{2}a = \tan\frac{c+b}{2}\frac{\cos\frac{C+B}{2}}{\cos\frac{C-B}{2}} \\
\tan\frac{1}{2}b = \tan\frac{a-c}{2}\frac{\sin\frac{A+C}{2}}{\sin\frac{A-C}{2}} & \tan\frac{1}{2}b = \tan\frac{a+c}{2}\frac{\cos\frac{A+C}{2}}{\cos\frac{A-C}{2}} \\
\cot\frac{1}{2}C = \tan\frac{B-A}{2}\frac{\sin\frac{b+a}{2}}{\sin\frac{b-a}{2}} & \cot\frac{1}{2}C = \tan\frac{B+A}{2}\frac{\cos\frac{b+a}{2}}{\cos\frac{b-a}{2}} \\
\cot\frac{1}{2}A = \tan\frac{C-B}{2}\frac{\sin\frac{c+b}{2}}{\sin\frac{c-b}{2}} & \cot\frac{1}{2}A = \tan\frac{C+B}{2}\frac{\cos\frac{a+c}{2}}{\cos\frac{c-b}{2}} \\
\cot\frac{1}{2}B = \tan\frac{A-C}{2}\frac{\sin\frac{a+c}{2}}{\sin\frac{a-c}{2}} & \cot\frac{1}{2}B = \tan\frac{A+C}{2}\frac{\cos\frac{a+c}{2}}{\cos\frac{a-c}{2}}
\end{array}
$$

Auf diese Weise kann also die gegenwärtige Abhandlung als vollständiges System der ganzen Kugelgeometrie angesehen werden.