Über die vielen transzendenten Grössen, die sich in keiner Weise mit Integralformeln ausdrücken lassen*

Leonhard Euler

§1 Integralformeln, deren Integration sich mit algebraischen Größen nicht durchführen lässt, pflegen für gewöhnlich als die einzige Quelle von allen transzendenten Funktionen angesehen zu werden. So sind nämlich aus der Integralformel

$$\int \frac{dx}{x}$$

die Logarithmen und aus der Formel

$$\int \frac{dx}{1+xx}$$

die Kreisbogen entstanden; die Größen, auch wenn sie transzendent sind, sind nun freilich so in der Analysis angenommen worden, dass sie genauso leicht gehandhabt werden können wie die algebraischen Größen selbst. Außerdem sind aber auch die Größen, die die Rektifizierung von Kegelschnitten beinhalten, von den Geometern schon dermaßen erforscht worden, dass die Probleme, die auf sie zurückgeführt worden sind, für vollkommen gelöst gehalten zu werden pflegen. Diese transzendenten Größen sind aber in Integralformeln von dieser Art enthalten

*Originaltitel: "De plurimis quantitatibus transcendentibus, quas nullo modo per formulas integrales exprimere licet", zuerst publiziert in: *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 1780: II* (1784, geschrieben 1775): pp. 31 – 37, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 15, pp. 522 – 527, Eneström Nummer E565, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

$$\int dx \sqrt{\frac{f+gxx}{b+kxx}},$$

und wie oft auch immer andere transzendente Größen auftauchen, sie werden immer verstanden, mit Quadraturen von gewissen Kurven dargestellt werden zu können; auf diese Weise werden sie auf Integralformeln zurückgeführt, die, wie kompliziert auch immer sie waren, dennoch eingeschätzt werden, die wahren Werte solcher transzendenten Größen auszudrücken.

§2 Dennoch habe ich indes beobachtet, dass unzählige andere Gattungen von transzendenten Größen dargeboten werden können, die auf keine Weise mit Integralformeln ausgedrückt werden können, auch wenn deren Werte sich zumeist näherungsweise hinreichend leicht bestimmen lassen. Größen von dieser Art entspringen aber hauptsächlich aus solchen unendlichen Reihen, deren Summen bis jetzt auf keine Art auf Integralformeln zurückgeführt werden können, unter welchen diese besonders merkwürdige, von der geometrischen kaum abweichende, unendliche Reihe auftritt

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{31}+\frac{1}{63}+\text{etc.},$$

die Nenner welcher Brüche um die Einheit von den Potenzen von zwei abweichen, deren Summe in der Tat ohne Mühe näherungsweise angegeben wird. Leicht sieht man aber ein, dass sie weder rational noch irrational sein kann; aber dann scheint auch hinreichend gewiss, dass sie weder mit Logarithmen noch mit Kreisbogen ausgedrückt werden kann. Dennoch steht indes kein anderer Weg offen, eine Integralformel von solcher Art ausfindig zu machen, deren Wert die Summe dieser Reihe exakt darböte. Wenn also die einzelnen Terme dieser Reihe auf gewohnte Weise in geometrische Reihen umgewandelt werden, ist es bemerkenswert, dass ihre Summe mit den folgenden Formeln dargestellt werden kann

$$\int \frac{1}{2^{xx}}+2\int \frac{1}{2^{xx+x}}+2\int \frac{1}{2^{xx+2x}}+2\int \frac{1}{2^{xx+3x}}+\text{etc.},$$

wo $\int \frac{1}{2^{xx}}$ die Summe der unendlichen Reihe bezeichnet, deren dem Index x zukommende Term $\frac{1}{2^{xx}}$ ist, welche also

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{2^{16}}+\frac{1}{2^{25}}+\text{etc.}$$

sein wird; die Summe dieser Reihe kann aber gleichermaßen in keiner Weise dargeboten werden, was freilich auch für die restlichen Anteile zu verstehen ist. Aber diese wahre Summe der vorgelegten Reihe ist näherungsweise $1,606695152$; wenn diese Zahl einer bestimmten bekannten Größe, wie einem Logarithmus oder Kreisbogen, gleich entdeckt werden würde, wäre das zweifelsohne eine außerordentliche Entdeckung.

§3 Wie wir hier aber von Potenzen von zwei die Einheit abgezogen haben, so wollen wir zu ihnen nun die unbestimmte Zahl x addieren und

$$y = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{4+x} + \frac{1}{8+x} + \text{etc.}$$

setzen, mit welcher Gleichung, wenn man x als Abszisse, y aber als Ordinate nimmt, eine gewisse Kurve ausgedrückt wird, in welcher sich eine einzige Ordinate, die der Abszisse $x = 0$ entspricht, sich tatsächlich angeben lässt, welche natürlich $y = 2$ sein wird. Aber für alle übrigen Abszissen werden die Ordinaten höchst transzendente Größen sein, die scheinen mit keinen Integralformeln ausgedrückt werden zu können scheinen, sodass die Natur dieser Kurve mit keiner Differential- oder Integralgleichung dargestellt werden kann. Dennoch ist indes ersichtlich, dass den Abszissen

$$x = -1, \quad x = -2, \quad x = -4, \quad x = -8, \quad x = -16 \quad \text{etc.}$$

unendlich große Ordinaten zukommen, aber für $x = \infty$ die Ordinaten verschwinden werden.

§4 Diese Gleichung kann verallgemeinert werden, wenn anstelle von 2 irgendeine andere Zahl a genommen wird, sodass

$$y = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a^2+x} + \frac{1}{a^3+x} + \frac{1}{a^4+x} + \text{etc.}$$

ist, wo der Abszisse $x = 0$ die Ordinate

$$y = \frac{a}{a-1}$$

zukommt, alle übrigen werden hingegen wieder höchst transzendent sein. Es ist aber ersichtlich, wenn man $a = 1$ nähme, dass alle Ordinaten unendlich sein werden, wenn nicht gerade die Abszisse x als Unendlich genommen wird.

Wie wir aber hier allen Brüchen das Vorzeichen $+$ gegeben haben, so werden sie auch alternieren können, dass

$$y = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a^2+x} - \frac{1}{a^3+x} + \frac{1}{a^4+x} - \text{etc.}$$

ist; dann wird der Abszisse $x = 0$ aber die Ordinate

$$y = \frac{a}{a+1}$$

entsprechen. Ja, man wird anstelle von x in den folgenden Termen sogar seine Potenzen von zwei schreiben können, dass man eine Gleichung von dieser Art hat

$$y = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a^2+x^2} + \frac{1}{a^3+x^3} + \frac{1}{a^4+x^4} + \text{etc.},$$

die natürlich so beschaffen ist, dass die Natur dieser Kurve in keiner endlichen oder Differential- oder Integralgleichung ausgedrückt werden zu können scheint.

§5 Außer diesen Formen können aber unendlich viele andere, die nach üblichen Potenzen der Größe x fortschreiten, dargeboten werden, welche sich gleichermaßen auf keine Weise auf Integralformeln reduzieren lassen. Weil nämlich bis jetzt noch keine anderen Reihen summiert werden konnten als die, deren Exponenten in einer arithmetischen Progression fortschreiten, scheint, sobald wir den Exponenten von x irgendein anderes Fortschreitungsgesetz zuteilen, deren Summation stets die Möglichkeiten der Analysis zu überschreiten, auch wenn wir beliebig komplizierte Integralformeln zur Hilfe nehmen wollten. Wenn beispielsweise diese unendliche Gleichung vorgelegt wird

$$y = 1 + x + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + x^{21} + \text{etc.},$$

wo die Exponenten von x Dreickszahlen sind, kann für eine solche Kurve überhaupt keine endliche Gleichung mit jeglichen Integralformeln dargeboten werden. Hier ist freilich sofort offensichtlich, wenn $x = 1$ oder $x > 1$ war, dass die Ordinaten bis ins Unendliche wachsen werden; aber wenn wir für x Werte kleiner als die Einheit nehmen, können hinreichend schnell die Werte der Ordinate y näherungsweise angegeben werden; wenn man beispielsweise $x = \frac{1}{10}$ nimmt, hat man in Dezimalbrüchen sofort

$$y = 1,10100100010000100000100000001,$$

welcher Bruch sehr leicht beliebig weit fortgesetzt werden kann, während die Anzahl der zwischen den Einheiten zu platzierenden Nullen immer um eine Einheit wächst. Obwohl aber der wahre Wert dieses Bruchs mit keinen Integralformeln angegeben werden kann, können wir uns dennoch eine hinreichend genaue Anschauung von ihm machen, so dass, wenn zufällig die Quadratur des Kreises auf eine solche Form zurückgeführt werden könnte, er quasi für entdeckt zu halten wäre; und dasselbe wird über alle anderen Dezimalbrüche festzuhalten sein, all deren Stellen nach einem bestimmten Gesetz fortschreiten, so dennoch, dass sie keine Perioden enthalten, in welchen Fällen der Wert natürlich rational dargeboten werden könnte.

§6 Es wäre ohne Zweifel von größter Bedeutung, wenn die Summe dieser Reihe

$$1 + x + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + \text{etc.}$$

mit einem endlichen Ausdruck dargeboten werden könnte, unerheblich wie transzendent er auch sein mag. Denn daraus könnte ein sehr strenger Beweis des Fermat'schen Lehrsatzes entnommen werden, dass alle ganzen Zahlen die Summe von drei Dreieckszahlen sind; denn es wäre nur nötig, den Kubus dieser Summe in eine Reihe aufzulösen und zu zeigen, dass dann gänzlich alle Potenzen von x auftreten müssen.

§7 Weil wir ja hier $x = \frac{1}{10}$ genommen haben, damit die Entwicklung in einen Dezimalbruch möglichst leicht wird, wird die näherungsweise Summation jener Reihe nicht um vieles schwieriger sein, wenn für x irgendein Bruch kleiner als die Einheit angenommen wird. Wenn man eines Beispiels wegen $x = \frac{1}{2}$ nimmt, dass

$$y = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{15}} + \frac{1}{2^{21}} + \text{etc.}$$

wird, wird näherungsweise in einem Dezimalbruch

$$y = 1,64163256066$$

sein.

§8 Aber alle Reihen von dieser Art lassen sich in dieser allgemeinen Form erfassen

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + Dx^{\delta} + \text{etc.},$$

solange die Exponenten α, β, γ, δ etc. nur nicht in einer arithmetischen Progression voranschreiten. Denn welches Gesetz auch immer zwischen den Koeffizienten A, B, C, D etc. festgelegt wird, es ist gewiss, dass der Wert von y niemals auf endliche Weise ausgedrückt werden kann, welche Quadraturen auch immer zur Hilfe genommen werden. Wenn wir also weiter Formen von dieser Art mit anderen von ähnlicher Natur multiplizieren oder sie durcheinander teilen oder in beliebiger anderer Weise kombinieren, werden immer Gattungen von transzendenten Größen von solcher Art entspringen, die alle Integralformeln zu umgehen scheinen. Und diese neuen Gattungen von transzendenten Größen lassen auch keinen Vergleich miteinander zu, woher wir die ungeheure Menge alle verschiedenen Gattungen gar nicht genug bestaunen können.

§9 Weil nämlich zwischen zwei einander beliebig nahen Zahlen nicht nur unzählige rationale Brüche angegeben werden können, sondern auch unendlich mal mehr irrationale Zahlen, welche alle nicht nur von jenen, sondern auch voneinander verschieden sind, scheint es kaum glaubhaft, dass zusätzlich noch unendlich viele Gattungen von Größen gegeben sind, die so so zueinander wie von jenen vollkommen abweichen. Und weil schon unendlich viele solcher Gattungen dargeboten werden können, die mit Integralen dargeboten werden können, sind wir nun gezwungen anzuerkennen, dass außer jenen Gattungen sogar noch unzählige andere Gattungen an transzendenten Größen gegeben sind, die es in keiner Weise zulassen aufeinander zurückgeführt zu werden.