Über einen gewaltigen Fortschritt in der Zahlentheorie*

Leonhard Euler

§1 Ganz und gar außerordentlich sind die Dinge, welche der hoch geehrte LAGRANGE in den **Comment. Academia Regiae Borussicae** des Jahres 1773 über die Teiler der sehr allgemeinen Formel $Btt + Ctu + Duu$ bewiesen hat, und sie haben sehr viel Licht in die Zahlentheorie, die immer noch von dichtesten Schatten umhüllt ist, hineingebracht. Deswegen aber, weil diese Abhandlung höchst allgemein ist, stoßen diejenigen, die in Betrachtungen dieser Art nicht hinreichend geübt sind, auf nicht wenige Schwierigkeiten und können auch die Tragweite solch tiefer Beweise nicht hinreichend durchschauen. Deswegen wird es nicht unnütz sein, alle Grundbausteine, auf die diese Beweise gestützt sind, sorgfältiger zu erklären und auf speziellere Formen anzuwenden, weil ja auf diese Weise alles leichter verstanden werden können wird. Desweiteren werde ich besonders genauer erklären, ein wie starkes Firmament sich daraus für die vielen Theoreme, deren Gültigkeit zu erkennen mir freilich nur mit Induktion möglich war, konstruiert wird, woher um vieles klarer werden wird, wie viel noch für deren vollständigen Beweis vermisst wird.

Lemma

§2 Wenn p und q teilerfremde Zahlen waren, dann können gänzlich alle Zahlen in dieser allgemeinen Form $\alpha p \pm \beta q$ erfasst werden, und das auf

*Originaltitel: "De insigni promotione scientiae numerorum", zuerst publiziert in: *Opuscula analytica, Band 2* (1785, geschrieben 1775): pp. 275 – 314, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 4, pp. 163 – 196, Eneström Nummer E598, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

unendlich viele Arten. Den per se leichten Beweis dieses Lemmas findet man vielerorts.

PROBLEM 1

§3 *Wenn p und q teilerfremde Zahlen waren, n hingegen irgendeine beliebige gegebene Zahl, positiv oder negativ, bezeichnet, alle Teiler der Form $pp + nqq$ zu finden.*

LÖSUNG

Es bezeichne D irgendeinen Teiler der in der Form $pp + nqq$ enthaltenen Zahl, und d sei der aus dieser Teilung entspringende Quotient, sodass $Dd = pp + nqq$ ist. Hier ist nun sofort ersichtlich, dass die Zahl d zu q teilerfremd sein wird; denn wenn q einen gemeinsamen Teiler hätte, müsse auch p denselben haben, entgegen der Annahme; deswegen wird die Zahl p durch d und q so ausgedrückt werden können, dass $p = \alpha d \pm \beta q$ ist, nach Einsetzen welches Wertes

$$Dd = \alpha\alpha dd \pm 2\alpha\beta dq + (\beta\beta + n)qq$$

und daher der Teiler

$$D = \alpha\alpha d \pm 2\alpha\beta q + \left(\frac{\beta\beta + n}{d}\right) qq$$

werden wird, wo also $\frac{\beta\beta+n}{d}$ eine ganze Zahl sein wird, welche $= h$ sei, sodass man

$$D = \alpha\alpha d \pm 2\alpha\beta q + hqq$$

hat, für welche Form wir

$$D = frr \pm gqr + hqq$$

schreiben wollen, sodass $f = d$, $r = \alpha$, $g = 2\beta$ ist, und wegen $h = \frac{\beta\beta+n}{d}$ wird $fh = \beta\beta + n$ sein; und daher wird $4fh - gg = 4n$ sein. Daher ist also klar, dass alle Teiler der Form $pp + nqq$ immer in dieser Form enthalten sind:

$$D = frr \pm gqr + hqq,$$

solange nur $4fh - gg = 4n$ war. Und umgekehrt, wenn

$$D = frr \pm gqr + hqq$$

war, wird

$$4Df = 4ffrr \pm 4fgqr + 4fhqq$$

sein; und daher wird wegen $4fh = 4n + gg$

$$4Df = (2fr \pm gq) + 4nqq$$

sein, welche Form von der vorgelegten nicht abweicht, wenn sie nur durch 4 geteilt wird.

KOROLLAR 1

§4 Im Allgemeinen werden sich also alle Teiler der vorgelegten Formel $pp + nqq$ in dieser sich sehr weit erstreckenden Form erfassen lassen: $frr + grs + hss$, solange nur $4fh - gg = 4n$ war, oder $fh - \frac{1}{4}gg = n$; daher ist klar, dass unzählige Formeln dieser Art dargeboten werden können, weil ja die Zahl g nach Belieben angenommen werden kann. Daher müssen aber die Zahlen f und h so bestimmt werden, dass $4fh = 4n + gg$ wird.

SCHOLION

§5 Weil sich ja aber unzählige Formen dieser Art darbieten lassen $frr + grs + hss$, in welchen $4fh - gg = 4n$ ist, scheinen wir daher wenig an Ertrag für unser Unterfangen erlangt zu haben. Nachdem nämlich irgendeine Zahl D vorgelegt worden ist, müssten all jene unzähligen Formeln betrachtet werden, ob zufällig diese Zahl D in einer von jenen enthalten ist. Das Essentielle des gefundenen Erlangte, was wir dem illustren LAGRANGE zuschreiben müssen, besteht darin, dass er gelehrt hat, jene unendliche Menge an Formeln dieser Art für jedweden Fall auf eine kleine Zahl zu reduzieren, was wir im folgenden Problem darlegen wollen.

Problem 2

§6 *Die zuvor gefundene allgemeine Form der Teiler, $frr + grs + hss$, in welcher $4fh - gg = 4n$ sei, in eine andere derselben Form, $f'tt + g'tu + h'uu$, zu transformieren, in welcher $g' < f'$ oder h' sei, während die Eigenschaft $4f'h' - g'g' = 4n$ bleibt.*

Lösung

Wir wollen festlegen, dass $f < h$ ist und g eine gewisse Zahl größer als f ist, und wollen $r = t - \alpha s$ setzen, nach Einsetzen welches Wertes diese Form entspringen wird:

$$ftt + (g - 2\alpha f)ts + (\alpha\alpha f - \alpha g + h)ss;$$

hier wird α offenkundig so angenommen werden können, dass $g - 2\alpha f < f$ wird, wo freilich zu bedenken ist, dass es nichts zur Sache tut, ob $g - 2\alpha f$ als positiv oder negativ hervorgeht. Man setze also $g - 2\alpha f = \pm g'$, sodass gewiss $g' < f'$ ist, dann schreibe man aber analog f' anstelle von f und $\alpha\alpha f - \alpha g + h = h'$ und es wird

$$4f'h' - g'g' = 4fh - gg = 4n$$

sein. Auf diese Weise ist also die vorgelegte Form auf diese reduziert worden:

$$f'tt + g'ts + h'ss,$$

in welcher gewiss $g' < f'$ ist. Wenn es nun passiert, dass g' noch größer war als h', dann wird in gleicher Weise diese Formel in eine andere überführt werden können, in welcher der mittlere Koeffizient kleiner ist als jeder der beiden äußeren, woher klar ist, dass die vorgelegt Form

$$frr \pm grs + hss$$

immer in eine andere der gleichen Form

$$f'tt \pm g'tu + h'uu$$

umgewandelt werden kann, in welcher g' kleiner ist als f' und h', und zugleich auch $4f'h' - g'g' = 4n$ wird.

Korollar 1

§7 Auf diese Weise kann als die unendliche Menge an Formeln $frr + grs + hss$, in welcher $4fh - gg = 4n$ ist, meistens auf eine hinreichend kleine Anzahl reduziert werden, während natürlich alle jene Formeln ausgeschlossen werden können, in welchen der mittlere Koeffizienten g kleiner ist als der eine der beiden äußeren.

Korollar 2

§8 Weil also so $f > g$ wie $h > g$ ist, wird $4fh > 4gg$ sein. Es sei also $4fh = 4gg + \triangle$, und weil $4f - gg = 4n$ sein muss, wird $3gg + \triangle = 4n$ sein, und daher $3gg < 4n$, daher also $g < \sqrt{\frac{4n}{3}}$; deswegen wird es genügen, anstelle von g nacheinander nur die Werte angenommen zu haben, die kleiner als $\sqrt{\frac{4n}{3}}$ sind, aus welchen einzelnen leicht die Werte der Buchstaben f und h aus der Gleichung $4fh = gg + 4n$ berechnet werden, wonach gänzlich alle Teiler der Form $pp + nqq$ gewiss in einer bestimmten dieser einfacheren Formeln enthalten sein werden.

Scholion

§9 Weil ja die Gleichung $4fh - gg = 4n$ keine Geltung haben kann, wenn g keine gerade Zahl ist, wollen wir für g sofort $2g$ schreiben, dass die Form von d dann $frr + 2grs + hss$ ist, wobei $4h - gg = n$ ist, welche Form also immer so reduziert werden kann, dass $2g < f$ oder $< h$ ist. Aber diese Reduktion kann auf angenehmste Weise schrittweise durchgeführt werden, während anstelle von α in der obigen Reduktion die Einheit geschrieben wird. Wenn also ein Teiler

$$D = frr + 2grs + hss$$

war, wird auch

$$D = f'rr + 2g'rs + h'ss$$

sein, während auf zweifache Weise entweder

$$f' = f, \quad g' = f - g \quad \text{und} \quad h' = f - 2g + h$$

oder auch

$$h' = h, \quad g' = h - g \quad \text{und} \quad f' = f - 2g + h$$

ist, weil ja die äußersten Glieder immer miteinander vertauscht werden können. Wenn hier noch nicht $2g' < f'$ oder $2g' < h'$ war, muss diese Operation so lange fortgesetzt werden, bis $2g < f$ oder h wird; dort ist zu bemerken, dass in diesen Formeln der mittlere Term $2grs$ so positiv wie negativ angenommen werden kann, weil die Zahlen r und s alle ganzen positiven oder negativen Zahlen bezeichnen können. Nachdem diese Dinge also vorausgeschickt worden sind, wollen wir alle Primteiler der in der Form $pp + nqq$ oder $pp - nqq$ enthaltenen Zahlen ausfindig machen; weil die zusammengesetzten Teiler freilich aus Primzahlen bestehen, sodass man nach Erkenntnis aller Primteiler zugleich alle zusammengesetzten hat.

PROBLEM 3

§10 *Alle in der Form $pp + nqq$ enthaltenen Primteiler zu finden, während die Zahlen p und q so zueinander wie zur Zahl n teilerfremd sind.*

LÖSUNG

I. Weil nämlich hier nur von Primteilern die Rede ist, wenn p nicht teilerfremd zu n wäre, ließe die Formel $pp + nqq$ auch alle Teiler der Zahl n zu, welche deshalb keine Untersuchung verlangen und von selbst hervorgehen. Also sei D irgendein Teiler der Form $pp + nqq$, und wir haben gerade gesehen, dass immer

$$D = frr + 2grs + hss$$

sein wird, während $fh - gg = n$ ist, so dass so $2g < f$ wie $2g < h$ ist; weil daher $f > 2g$ und $h > 2g$ ist, wird $fh > 4gg$ sein. Also sei $fh = 4gg + \triangle$, und weil $fh - gg = n$ ist, wird $3gg + \triangle = n$ sein, und daher $gg < \frac{n}{3}$ und $g < \sqrt{\frac{n}{3}}$. Unter dieser Bedingung wird also die Menge der Formen für den Teiler D auf eine umso kleinere Zahl reduziert, je kleiner die Zahl n war. Weil also

$$D = frr + 2grs + hss$$

war, wird

$$Df = ffrr + 2fgrs + fhss$$

sein, und daher wird wegen $fh = gg + n$

$$Df = (fr + gs)^2 + nss$$

werden, welches die vorgelegte Form selbst ist. In gleicher Weise wird nach Vertauschen der Buchstaben f und h auch

$$Dh = (hs + gr)^2 + nrr$$

sein, woher klar ist, wenn Df eine Zahl der Form $pp + nqq$ war, dass dann auch das Produkt Dh von derselben Form sein wird, sodass es ausreicht, nur einen der beiden gefunden zu haben. Für den entsprechenden Fall suche man also alle Werte des Buchstaben f, welche f, f', f'', f''' etc. seien, und alle Primteiler D werden so beschaffen sein, dass entweder D oder Df oder Df' oder Df'' etc. Zahlen der Form $pp + nqq$ sind. Und all dies folgt aus den Beweisen des illustren LAGRANGE.

II. Diese Ausführungen wollen wir also mit denen zusammenbringen, welche ich einst über die Formen dieser Primteiler mitgeteilt habe, wo ich gezeigt habe, dass all diese Teiler in einem Ausdruck von dieser Art erfasst werden können: $4ni + a$, während a natürlich gewisse zu $4n$ teilerfremde und zugleich kleinere Zahlen als $4n$ bedeutet, wo schließlich nur die Hälfte solcher Zahlen auftritt, nachdem die übrigen davon völlig ausgeschlossen worden sind. Wenn also α diese ausgeschlossenen Zahlen bezeichnet, wird bestätigt werden können, dass keine Zahlen, die in der Form $4ni + \alpha$ enthalten sind, Teiler der Form $pp + nqq$ sein können. Aber diese Formen stimmen hervorragend mit den vorhergehenden überein. Wenn nämlich $D = pp + nqq$ war, muss die eine der beiden Zahlen p und q ungerade sein, und daher q entweder gerade oder ungerade. Es q zuerst gerade, und daher qq eine Zahl der Form $4i$, es wird $D = 4ni + pp$ werden. Daher ist klar, dass jene Buchstabe aa alle ungeraden und zu $4n$ teilerfremden Quadratzahlen erfasst, oder die Reste, die aus der Teilung dieser Quadrate, durch $4n$, zurückbleiben. Wenn aber q eine ungerade Zahl war, und daher qq von der Form $4i + 1$, wird daher $D = 4ni + pp + n$ werden. Daher ist klar, dass der Buchstabe a auch alle Zahlen der Form $pp + n$ umfasst, welche freilich zu $4n$ teilerfremd sind, oder deren aus der Teilung durch $4n$ resultierende Reste. Dieselben Zahlen gehen für a aber auch hervor, wenn Df eine Zahl der Form $pp + nqq$ war, was in Beispielen leichter gezeigt werden können wird.

III. Nachdem diese Dinge erläutert worden sind, weil die Form $4ni + a$ alle Teiler der Form $pp + nqq$ umfasst, die andere Form $4ni + \alpha$ aber keine Teiler in sich beinhaltet, werden von der ersten Form $4ni + a$ alle durch eine bestimmte Zahl der Form $4ni + \alpha$ teilbaren Zahlen ausgeschlossen werden müssen. Wenn es also bewiesen werden könnte, dass auf diese Weise von den Formeln $4ni + a$ gänzlich alle Zahlen ausgeschlossen werden, würde natürlich folgen, dass alle Primzahlen der Form $4ni + a$ gewiss Teiler der Form $pp + nqq$ sind, weil wir nur die zusammengesetzten Zahlen aus diesen Weise ausgeschlossen haben. Die ganze Aufgabe geht also darauf zurück, dass man zeigt, dass Formel $4ni + \alpha$ gänzlich alle Primzahlen enthält, die keine Teiler der Form $pp + nqq$ sein können; wenn das bewiesen werden könnte, würde nichts Weiteres in dieser Art verlangt werden.

KOROLLAR 1

§11 Für jedwede Zahl n werden also Zahlen, die teilerfremd zu $4n$ und kleiner als selbiges sind, in zwei Klassen aufgeteilt, von welchen wir die eine mit dem Buchstaben a, die andere hingegen mit dem Buchstaben α bezeichnet haben, sodass die Formel $4ni + a$ alle Teiler der Form $pp + nqq$ enthält, die andere Formel $4ni + \alpha$ hingegen all jene Teiler völlig ausschließt, und daher kann keine Zahl dieser Form jemals ein Teiler der Formel $pp + nqq$ sein. Aber die Menge der Zahlen der beiden Klassen ist immer dieselbe; wenn die Menge aller Zahlen, die kleiner als $4n$ und zu selbiger teilerfremd sind, $= 2\lambda$ war (denn diese Anzahl ist immer gerade), wird die erste Form a genau λ Zahlen enthalten, und ebenso viele wird die andere Form α enthalten.

KOROLLAR 2

§12 Über diese Formeln $4ni + a$ und $4ni + \alpha$ habe ich schon vor einiger Zeit bewiesen, wenn die Zahlen a und a' in der ersten Klasse auftreten, dass dann dort auch das Produkt aa' auftritt, was auch für die übrigen Zahlen dieser Klasse zu verstehen ist, wenn welche a, a', a'', a''' waren, werden die Produkte so aus zwei wie aus mehreren dieser Zahlen sowie all deren Potenzen in derselben Klasse gefunden werden, nachdem sie natürlich durch $4n$ geteilt worden waren und auf Reste kleiner als $4n$ reduziert worden sind. Weiter habe ich auch bewiesen, wenn α eine Zahl der zweiten Klasse war, dass dann in derselben auch die Zahlen $a\alpha$, $a'\alpha$, $a''\alpha$, $\alpha'''\alpha$ etc. gefunden werden müssen. Daher ist klar, dass die Menge der Zahlen der zweiten Klasse nicht kleiner sein kann als die Menge der ersten Klasse. Dass aber die Menge der beiden völlig gleich ist, kann auch leicht gezeigt werden.

KOROLLAR 3

§13 Also gehen alle Dinge, die noch in dieser Gattung verlangt werden können, darauf zurück, dass man zeigt, dass die Klasse $4ni + \alpha$ alle Primzahlen enthält, die keine Teiler der Form $pp + nqq$ sein können; denn dann wird es erwiesen sein, dass alle Primzahlen der ersten Form $4ni + a$ gewiss Teiler einer gewissen Zahl der Form $pp + nqq$ sind.

PROBLEM 4

§14 *Alle Primteiler der in der Form $pp - nqq$ enthaltenen Form zu finden, wo freilich, wie zuvor, p und q nicht nur teilerfremd zueinander sind, sondern auch teilerfremd zu n sind.*

LÖSUNG

I. Die Bedingung, dass p auch zu n teilerfremd sein soll, wird nur deshalb hinzugefügt, weil ansonsten alle Teiler der Zahl n hier in Betracht kämen, welche wir dennoch hier ausgeschlossen haben, da sie ja per se offensichtlich sind. Hier ist also zuerst klar, wenn D ein Primteiler der Form $pp - nqq$ war, dass er dann auch ein Teiler der Form $nqq - pp$ sein wird, wenn freilich nqq größer war als pp. Denn wenn D ein Teiler der Form $pp - nqq$ war, wird er auch ein Teiler der Form $npp - nnqq$ sein, welche Form, wenn wir r anstelle von nqq schreiben, in diese übergeht: $npp - rr$. Weiter ist auf die gleiche Weise wie zuvor klar, dass immer

$$D = frr + 2grs + hss$$

sein wird, während $fh - gg = -n$ ist, und dass diese Form immer so reduziert werden kann, dass $2g < f$ und zugleich $2g < h$ wird, wo freilich die Vorzeichen der Zahlen f und h nicht beachtet werden, wenn zufällig eines der beiden Glieder negativ wird; weil daher, wegen $f > 2g$ und $h > 2g$, $fh > 4gg$ ist, ist ersichtlich, dass nicht

$$fh - gg = -n$$

sein kann, wenn nicht entweder f oder h negativ war, woher die Form des Teilers so festgelegt werden muss, dass

$$D = frr + 2grs - hss$$

ist, und es muss $-fh - gg = -n$, oder $fh + gg = +n$ werden. Weil ja also $fh > 4gg$ ist, ist es notwendig, dass $5gg < n$ ist, und daher $g < \sqrt{\frac{n}{5}}$, sodass in diesem Fall weniger Werte für g übrig gelassen werden. Aber dann wird

$$Df = ffrr + 2fgrs - fhss$$

oder

$$Df = (fr + gs)^2 - nss$$

sein, welches die vorgelegte Form selbst ist. Weiter wird aber

$$Dh = nrr - (gr - hs)^2$$

sein, welches die umgekehrte Form $npp - qq$ ist. Daher wird also eingesehen, wenn Df eine Zahl der Form $pp - nqq$ war, dass dann in selbiger die Formel Dh eine Zahl der Form $npp - qq$ sein wird.

II. Wir wollen diese Erkenntnisse auch auf die Form der Teiler anwenden, welche ich einst dargeboten habe; und zuerst freilich, wenn $D = pp - nqq$ war, für die Fälle, in denen q eine gerade Zahl ist, und daher qq von der Form $4i$, wird $D = pp - 4ni$ werden; wenn also $D = 4ni + a$ gesetzt wird, wegen $pp > 4ni$, wird, wenn $pp = 4bk + b$ gesetzt wird, eine solche Form hervorgehen: $D = pp - 4ni$, sodass $a = b$ ist, und daher alle zu $4n$ teilerfremden Quadratzahlen in sich umfasst. Wenn aber q eine ungerade Zahl ist, und daher qq von der Form $4i + 1$, wird $D = pp - n - 4ni$ werden, und nachdem wiederum $pp = 4nk + b$ gesetzt worden ist, geht $D = 4ni + b - n$ hervor, sodass in diesem Fall $a = b - n$ ist, wo b alle Quadratzahlen bezeichnen kann, oder die daraus entspringen Reste. In gleicher Weise, wenn $D = npp - qq$ war, ist es ersichtlich, dass die daraus für a hervorgehenden Werte negativ sein werden, sodass a alle Quadratzahlen umfasst, weiter auch alle Zahlen der Form $pp - n$, so positiv wie negativ genommen; deswegen wird die Form aller Teiler so dargeboten werden können, dass $4ni \pm i$ ist, aber die Form für die von der ersten Klasse ausgeschlossenen Zahlen wird $4ni \pm \alpha$ sein, deren Menge der ersten gleich ist, natürlich erhält α immer ebenso viele Werte, wie der Buchstabe a.

III. Damit also auch in dieser Art nichts Weiteres verlangt werden kann, ist nur das übrig, dass bewiesen wird, dass die letzte Form $4ni \pm \alpha$ gänzlich alle Primzahlen enthält, die niemals Teiler einer Zahl der Form $pp - nqq$ oder der Form $npp - qq$ sein können.

Korollar 1

§15 Über diese beiden Formeln $4ni \pm a$ und $4ni \pm \alpha$, von welchen jene alle Teiler beinhaltet, diese sie hingegen ausschließt, gelten dieselben Dinge, die zuvor gelehrt worden sind. Wenn nämlich a, a', a'' etc. zur ersten Klasse gehören, werden ebendort auch so alle Potenzen wie alle Produkte aus zwei oder mehreren dieser Zahlen gefunden werden; aber wenn α hingegen eine Zahl der zweiten Klasse war, werden ebenda dann auch alle Zahlen $a\alpha$, $a'\alpha$, $a''\alpha$ etc. auftreten, sodass die Menge dieser Zahlen nicht kleiner sein kann als die der ersten Klasse.

Korollar 2

§16 Weil ja der Buchstabe a alle Quadrate umfasst, wird ein möglicher Wert vor allem $= 1$ sein, dann aber auch 9, 25 etc., wenn die Zahl n nicht den Teiler 3 oder 5 etc. hat. Denn in diesen Fällen müssen all diese Quadrate ausgeschlossen werden, weil andernfalls die Form $4ni \pm a$ keine Primzahl werden könnte.

Scholion

§17 Nachdem diese allgemeinen Lehren also erläutert worden sind, werden alle Dinge deutlicher werden, wenn wir spezielle Fälle entwickeln; denn hier werden noch viele andere Dinge auftauchen, die sich im Allgemeinen nicht angingen ließen. Es wird aber genügen, das an einigen Beispielen gezeigt zu haben, nach Behandeln von welchen es nicht schwierig sein wird, eine Tabelle zu konstruieren, welche für alle Fälle die Form der Primteiler darbietet.

Beispiel 1

§18 Alle Primteiler der in der Form $pp + qq$ enthaltenen Zahlen zu finden, während natürlich für p und q teilerfremde Zahlen angenommen werden.

Lösung

Nachdem der Primteiler

$$D = frr + 2grs + hss$$

gesetzt worden ist, muss wegen $n = 1$ auch $fh = gg + 1$ sein, dann aber $g < \sqrt{\frac{1}{3}}$; daher ist klar, dass für g kein anderer Wert angenommen werden kann als 0; dann wird aber $fh = 1$ und daher so $f = 1$ und $h = 1$ sein, und alle Teiler werden in der Form $D = rr + ss$ enthalten sein, sodass die Summe zweier Quadrate keine anderen Teiler zulässt als die, die selbst die Summe zweiter Quadrate sind. Aber die andere Form der Teiler wird $4i + 1$ sein, und es werden gänzlich alle Zahlen der Form $4n + 3$ oder $4n - 1$ ausgeschlossen. Wenn es also bewiesen werden könnte, dass die Formel $4i - 1$ gänzlich alle Primzahlen enthält, die nicht Teiler der Form $pp + qq$ sein können, dann wäre zugleich bewiesen, dass auch alle Primteiler der Form $4i + 1$ die Summe zweier Quadrate sein werden. Dies ist aber schon vor langer Zeit von mir nach Fermat bewiesen worden.

Beispiel 2

[§ 18 a] Alle Primteiler der Form $pp - qq$ zu finden.

Lösung

Dieses Beispiel bezieht sich auf das vierte Problem, und es ist $n = 1$, und weil $g < \sqrt{\frac{1}{5}}$ sein muss, wird notwendig $g = 0$ werden, und daher $fh = 1$, woher diese Form der Teiler entspringt: $D = rr - ss$, welche natürlich gänzlich alle Primteiler, außer 2, enthält. Denn obwohl diese Form die Faktoren $r + s$ und $r - s$ hat, enthält sie dennoch alle Primteiler, wenn $r - s = 1$ war, deren Natur eigentümlich ist. Das zeigt auch die andere Form der Teiler auf, nach welcher, wegen $a = 1$, $4i \pm 1$ wird, in welcher gänzlich alle ungeraden Zahlen enthalten sind, sodass in diesem Fall keine ausgeschlossen werden, und die andere Form $4i \pm \alpha$ in diesem Fall allein keine Geltung hat. Überdies gehört dieser Fall eigentlich nicht hierher, weil die Teiler der Form $pp - qq$ per se bekannt sind.

Beispiel 3

§19 Alle Primteiler der Form $pp + 2qq$ zu finden.

Lösung

Dieser Fall bezieht sich auf das dritte Problem, während $n = 2$ ist, weil woher $g < \sqrt{\frac{2}{3}}$ sein muss, wird $g = 0$ sein, und daher $fh = 2$, daher wird die Form der Teiler $= rr + 2ss$ sein. Daraus ist es klar, dass die Zahlen der Form $pp + 2qq$ keine anderen Teiler zulassen als die, die von derselben Form sind, was freilich auch schon vor einiger Zeit von mir gezeigt worden ist. Aber die andere Form $D = 8i + a$, wegen $a = pp$, oder auch $a = pp + 2$, gibt diese zwei Werte für a: 1 und 3, sodass alle Teiler der Form $pp + 2qq$ entweder $8i + 1$ oder $8i + 3$ sind. Also sind die Formen, die aus der Klasse der Teiler ausgeschlossen werden, $8i + 5$ oder $8i + 7$, welche also unter der Form $8i + \alpha$ erfasst werden müssen. Wenn also bewiesen werden könnte, dass allein die Primzahlen dieser Formen von der Klasse der Teiler ausgeschlossen werden, wäre zugleich bewiesen, dass alle Primzahlen der Form $8n + 1$ und $8n + 3$ in der Formel $pp + 2qq$ enthalten sind, was freilich schon gezeigt worden ist. Überdies können die beiden letzten Form auch so ausgedrückt werden: $8i - 1$ und $8i - 3$, sodass die Werte von α die negativen von a sind, was im Allgemeinen über Teiler der Form $pp + nqq$ festzuhalten ist.

Beispiel 4

§20 Alle Primteiler der Form $pp - 2qq$ oder $2pp - qq$ zu finden.

Lösung

Aus dem vierten Problem ist $n = 2$, und daher, wegen $g < \sqrt{\frac{2}{5}}$, wird wiederum $g = 0$ und $fh = 2$ sein, woher für die Teiler $D = rr - 2ss$, oder auch $D = 2rr - ss$, sein wird; daher ist klar diese Formen kleine anderen Teiler zulassen als die, die selbst von derselben Form sind. Aber für die Form $D = 8i + a$, weil $a = pp$ ist, oder auch $a = pp - 2$, werden die Werte für a dann ± 1 sein, also werden alle Teiler in der Form $8i \pm 1$ enthalten sein; also werden alle Zahlen der Form $8i \pm 3$ ausgeschlossen. Daher, wenn allein die Primzahlen der Form $8i \pm 3$ von der Klasse der Teiler ausgeschlossen werden, ist es notwendig, dass alle Primzahlen der Form $8i \pm 1$ in der vorgelegten Form enthalten sind.

KOROLLAR 1

§21 Während im dritten Problem die Reduktion der Teiler auf die Form $pp + nqq$ meistens nur auf eine einzige Weise gelingt, gelingt eine solche Reduktion im Fall des vierten Problems immer auf unendlich viele Weisen; denn es lassen sich die Zahlen p und q immer auf unendlich viele Weisen so annehmen, dass entweder der Teiler D selbst oder Df der Form $pp - nqq$ gleich wird.

KOROLLAR 2

§22 Aber im Fall dieses Beispiels verdient es bemerkt zu werden, wenn $D = pp - 2qq$ war, dass dann auch $D = 2rr - ss$ sein wird, weil diese zwei Formen ja immer einander gleich werden können, denn nach Gleichsetzen von jenen wird

$$pp + ss = 2(qq + rr) = (q + r)^2 + (q - r)^2,$$

sodass $p = q + r$ und $s = q - r$ ist.

KOROLLAR 3

§23 Alle Primteiler der Form $pp + 3qq$ zu finden.

LÖSUNG

Weil hier $n = 3$ ist, und daher $g < 1$, wird nur $g = 0$ sein, und daher wird der Teiler $D = rr + 3ss$ sein, sodass auch in diesem Fall alle Primteiler von der Form $pp + 3qq$ sein werden. Weil aber die für g gefundene Grenze der Einheit gleich wird, welche es nicht überschreiten darf, wollen wir auch den Fall $g = 1$ entwickelt, woher $fh = 4$ wird und daher entweder $f = 1$ oder $h = 4$, oder $f = 2$ und $h = 2$. Im ersten Fall wird

$$D = rr + 2rs + 4ss = (r + s)^2 + 3ss,$$

welche die vorgelegte Form selbst ist. Im anderen Fall wird

$$D = 2rr + 2rs + 2ss,$$

weil welche Form den Faktor 2 hat, muss

$$D = rr + rs + ss$$

gesetzt werden, welche aber gleichermaßen auf die vorgelegte zurückgeführt wird. Denn wenn s eine gerade Zahl ist, sagen wir $s = 2t$, wird

$$D = rr + 2rt + 4tt = (r + t)^2 + 3tt$$

sein; wenn aber s eine ungerade Zahl ist, wird auch r eine ungerade Zahl sein müssen, weil wir ansonsten auf den vorherigen Fall zurückgeführt werden würden; also wird $r + s$ eine gerade Zahl sein, woher nach Setzen von $2t - s$

$$D = 4tt - 2ts + ss = 3tt + (t - s)^2$$

werden wird, woher klar ist, dass die obige Folgerung immer noch gilt, und immer $D = rr + 3ss$ ist. Weiter wird für die Formel $12i + a$ wegen $a = pp$ auch $a = 1$ sein, dann aber gibt die Formel $a = pp + 3$ entsprechend $a = 7$, woher alle Teiler in einer der beiden dieser Formeln enthalten sein werden: $12i + 1$ oder $12i + 7$, welche wir zusammengenommen so darstellen wollen $12i + 1, +7$, oder auch auf diese Weise $12i + 1, -5$. Wenn sich nämlich alle Werte von a im Allgemeinen unter $2n$ senken lassen, natürlich unter Zulassung negativer Zahlen, dann wird die andere Formel $12i \pm \alpha$, in welcher kein Teiler enthalten ist, $12i + 5$ oder $12i + 11$, oder $12i - 1, +5$ sein, woher klar ist, dass im Allgemeinen alle Werte von α negativ genommen die von a sind.

BEISPIEL 6

§[23 a] Alle Primteiler der Formel $pp - 3qq$ oder auch $3pp - qq$ zu finden.

LÖSUNG

Indem man hier das vierte Problem anwendet, wird $n = 3$ sein, und daher $g < \sqrt{\frac{3}{5}}$, als logische Konsequenz $g = 0$ und $fh = 3$, woher der Teiler $D = rr - 3ss$ sein wird. Daher ist klar, dass diese Zahlen keine anderen Teiler zulassen als diese, die von derselben Form sind. Weiter gehen für die Formel

$12i \pm a$, wegen $a = pp$, oder $a = 3 - pp$, keine anderen Werte hervor als $a = 1$, sodass alle Teiler in dieser Form enthalten sind: 12 ± 1. Also wird die Teiler aufschließende Form $12i \pm 5$ sein.

Scholion

§24 Diese Formen habe ich schon vor einiger Zeit abgehandelt, und ich habe bewiesen, dass sie keine anderen Teiler zulassen als die, die von derselben Form sind, was bei größeren für n angenommenen Zahlen nicht immer gelingt. Es wird aber gefällig sein, die Fälle auszuschließen, in denen n entweder eine Quadratzahl oder durch eine Quadratzahl teilerbar ist. Wenn nämlich $n = kmm$ wäre, dann käme die Formel $pp \pm kmmqq$ mit dieser zusammen: $pp \pm kqq$.

Beispiel 7

§25 Alle Primteiler der Zahlen $pp + 5qq$ zu finden.

Lösung

Wegen $\sqrt{\frac{5}{3}} > g$ wird entweder $g = 0$ oder $g = 1$ sein; im ersten Fall wird $fh = 5$, im zweiten hingegen $fh = 6$. Der erste Fall gibt den Teiler $D = rr + 5ss$, welche die vorgelegte Form selbst ist; die zweite hingegen gibt

$$\begin{aligned} D &= rr + 2rs + 6ss \quad \text{oder} \\ D &= 2rr + 2rs + 3ss, \end{aligned}$$

von welchen Formen jene durch Reduktion auf die erste zurückführt, weil

$$D = (r+s)^2 + 5ss$$

ist; diese weicht aber von jener ab, weil daher

$$2D = 4rr + 4rs + 6ss = (2r+s)^2 + 5ss$$

wird; daher ist es klar, dass alle Teiler entweder selbst Zahlen von dieser Form sind oder deren Doppeltes, sodass, wenn der Teiler D selbst nicht von der Form $pp + 5qq$ war, sein Doppeltes gewiss von dieser Form sein wird. Weiter werden für die Form $20i + a$, wegen $a = pp$, ihre daraus entstehenden Werte 1 und 9 sein, aus der anderen Formel $= pp + 5$ werden aber dieselben Werte 1 und 9 berechnet. Weil aber hier nur von Teilern die Rede ist, wird für a sogar $\frac{pp+5}{2}$ genommen werden können, woher die Werte 3, 7 entspringen, und so wird die alle Teiler enthaltende Form $20+1, +3, +7+9$ sein, während die die Teiler ausschließende Form $10i-1, -3, -7, -9$ sein wird. Wenn nun bewiesen werden könnte, dass diese letzte Formel alle Primzahlen enthält, die keine Teiler der vorgelegten Form sein können, wäre zugleich bewiesen, dass alle in der ersten Form enthaltenen Primzahlen gewiss Teiler einer gewissen Zahl der Form $pp+5qq$ sind, und daher entweder sie selbst oder deren Doppeltes dieselbe Form haben muss. Solche Zahlen bis hin zu hundert sind aber

$$1, \quad 3, \quad 7, \quad 23, \quad 29, \quad 41, \quad 43, \quad 61, \quad 67, \quad 83, \quad 89.$$

Beispiel 8

§26 Alle Primteiler von Zahlen der Form $pp-5qq$ zu finden.

Lösung

Hier ist aus dem vierten Problem $n=5$, woher wegen $g<\sqrt{\frac{n}{5}}$ man $g=0$ oder auch $g=1$ nehmen können wird. Denn es wird nichts schaden $g=1$ zu nehmen; es wäre nur überflüssig, selbigem einen größeren Wert zuzuteilen. Aber $g=0$ gibt den Teiler $rr-5ss$, das heißt einen der vorgelegten Form; der andere Wert $g=1$ hingegen gibt $fh=4$ und daher entweder

$$\begin{aligned} D &= rr+2rs-4ss \quad \text{oder} \\ D &= 2rr+2rs-2ss. \end{aligned}$$

Die erste wird auf $D=(r+s)^2-5ss$ zurückgeführt, das heißt auf die vorgelegte; die zweite hingegen gibt durch 2 geteilt den Teiler

$$D=rr+rs-ss,$$

welche Form auch auf die vorgelegte zurückgeführt wird, was ich so zeige. Entweder werden beide Zahlen r und s ungerade sein, oder die eine gerade und die andere ungerade. Für den zweiten Fall sei $s=2t$ und es wird

$$D=rr+2rt-4tt \quad \text{oder} \quad D=(r+t)^2-5tt$$

sein. Wenn aber die beiden Zahlen ungerade sind, wird deren Summe $r+s$ gerade sein, sei sie $=2t$, und daher $r=2t-s$, woher

$$D = 4tt - 2ts - ss = 5tt - (t+s)^2$$

wird. Es ist also klar, dass alle Teiler der Zahlen der vorgelegten Form auch von derselben Form sind. Nun liefert für die Form $20 \pm a$ der Wert $a = pp$ hier 1 und 9, aber der andere Werte $a = 5 - pp$ liefert ebenso 1 und 9, sodass alle Teiler in der Form $20i \pm 1, \pm 9$ enthalten sind. Aber die Teiler ausschließende Form wird $20i \pm 3, \pm 7$ sein.

SCHOLION

§27 Weil ja schon aus diesen Beispielen zur Genüge klar wird, wie für kleine Zahlen n diese einzelnen Operationen durchgeführt werden müssen, wollen wir noch einige Beispiele mit größeren Zahlen hinzufügen.

BEISPIEL 9

§28 Alle Primteiler von Zahlen der Form $pp + 17qq$ zu finden.

LÖSUNG

Weil $\sqrt{\frac{17}{3}} < 3$ ist, werden wir für g die drei Werte 0, 1, 2 haben. Zuerst sei $g = 0$, und daher $fh = 17$, daher entspringt der Teiler $D = rr + 17ss$, und daher einer der vorgelegten Form. Als zweites nehme man $g = 1$, es wird $fh = 18 = 1 \cdot 18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$ sein, woher diese Formen entstehen:

1) $D = rr + 2rs + 18ss = (r+s)^2 + 17ss$,

2) $D = 2rr + 2rs + 9ss$, woher

wird, sodass $2D$ von der vorgelegten Form ist.

3) $D = 3rr + 2rs + 6ss$,

deren Dreifaches die vorgelegte Form annimmt: $3D = (3r+s)^2 + 17ss$.
Als drittes sei $g = 2$ und daher $fh = 21 = 1 \cdot 21 = 3 \cdot 7$; daher entspringt

1) $D = rr + 4rs + 21ss = (r+2s)^2 + 17ss$,

2) $D = 3rr + 4rs + 7ss$,

deren Dreifaches wiederum die vorgelegte Form annimmt. Deswegen werden alle Teiler so beschaffen sein, dass entweder sie selbst oder deren Doppeltes oder deren Dreifaches die vorgelegte Form haben. Was weiter die Form $68i + a$ betrifft, liefert der Wert $a = pp$ die Zahlen 1, 9, 25, 49, 13, 53, 33, 21; der andere Wert $a = pp + 17$ gibt aber $21, 31,$ etc., welche Zahlen mit den vorhergehenden übereinstimmen. Weil aber hier auch Hälften und Drittel auftreten können, ist zuerst klar, dass die Form $a = \frac{pp}{2}$ keine geeigneten Werte liefert; aber $a = \frac{pp}{3}$ liefert die folgenden Zahlen 3, 27, 7, 11, 39, 23, 31, 63. Weiter gibt dahingegen die Formel $a = \frac{pp+17}{2}$ die Werte 9, 13, 21 etc., welche Zahlen schon auftreten. Schließlich liefert die Formel $a = \frac{pp+17}{3}$ die Werte 7, 11, 27 etc., welche ebenso vorhanden sind. Deswegen werden alle geeigneten Werte für a sein:

$$1, \ 3, \ 7, \ 9, \ 11, \ 13, \ 21, \ 23, \ 25, \ 27, \ 31, \ 33, \ 39, \ 49, \ 53, \ 63.$$

Aber diese Zahlen können um vieles leichter gefunden werden; denn sobald wir auch nur einige gefunden haben, weil wir ja wissen, dass deren Produkte aus zwei oder mehreren auch auftreten müssen, treten vor allem aber alle Quadratzahlen per se auf, aus denen, weil auch 3 auftritt, schon gänzlich alle gefunden werden. Wenn wir nun also all diese Zahlen unter die Hälfte der Zahl 68 herabsenken, während wir die Komplemente zu 68 der größeren mit dem Zeichen $-$ versehen, dann werden die Werte von a die folgende Reihe festlegen:

$$+1, \ +3, \ -5, \ +7, \ +9, \ +11, \ +13, \ -15, \ -19, \ +21,$$
$$+23, \ +25, \ +27, \ -29, \ +31, \ +33.$$

Wenn wir nun die Vorzeichen all dieser Zahlen ändern, werden wir alle Werte des Buchstabens α für die Formel $68i + \alpha$ erhalten, von welcher alle Teiler ausgeschlossen sind.

KOROLLAR 3

§29 Daher ist also klar, dass auch für alle positiven anstellte von n angenommenen Zahlen in den Werten des Buchstaben a gänzlich alle ungeraden Zahlen kleiner als $2n$ und die, die zu n teilerfremd sind, auftreten, während die einen mit dem Zeichen $+$, die anderen mit dem Vorzeichen $-$ behaftet sind.

BEISPIEL 10

§30 Alle Primteiler von in der Form $pp - 19qq$ oder auch $19pp - qq$ enthaltenen Zahlen zu finden.

LÖSUNG

Hier wird also wegen $n = 19$ auch $g < \sqrt{\frac{19}{5}}$ sein, und daher $g < 2$, woher wir entweder $g = 0$ oder $g = 1$ haben werden. Es sei also zuerst $g = 0$ und wegen $fh = 19$ wird der Teiler $D = rr - 19ss$ sein, und daher sind diese Werte nun von der vorgelegten Form. Es sei weiter $g = 1$ und es wird

$$fh = 19 - 1 = 18 = 1 \cdot 18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$$

werden; daher sind drei Fälle zu entwickeln:

1) $D = rr + 2rs - 18ss = (r+s)^2 - 19ss,$

welche Form schon in der vorgelegten enthalten ist.

2) $D = 2rr + 2rs - 9ss,$

deren Doppeltes auf die vorgelegte Form zurückgeht.

3) $D = 3rr + 2rs - 6ss,$

deren Dreifaches in der vorgelegten Form enthalten ist. Und so sind alle gesuchten Teiler entweder selbst oder deren Doppeltes oder deren Dreifaches in der vorgelegten Form enthalten. Darauf müssen für die Form $4ni \pm a$ oder $76i \pm a$ die Werte von a aus den folgenden Formeln abgeleitet werden.

1) $a = pp$ gibt 1, 9, 25, 49, 5, 45, 17, 73, 61.

2) $a = \frac{pp}{2}$ gibt keine geeigneten Werte, weil alle gerade wären.

3) $a = \frac{pp}{3}$, oder $a = 3tt$ liefert diese Werte:

$$3, \;\; 27, \;\; 75, \;\; 71, \;\; 15, \;\; 59, \;\; 51, \;\; 67, \;\; 31.$$

4) $a = 19 - pp$ gibt 15, 3 etc.,

welche schon auftauchen

5) $a = \frac{19-pp}{2}$ gibt 9, 5, 3 etc.,

welche selben schon vorhanden sind

6) $a = \frac{19-pp}{3}$ gibt 5, 1, 15 etc.,

welchen auch schon vorhanden sind. Deswegen können alle für a anzunehmenden geeigneten Zahlen, weil sie ja so positiv wie negativ angenommen werden können, unter 38 gesenkt werden, während natürlich die Komplemente zu 76 der größeren hinzugefügt werden:

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad 9, \quad 15, \quad 25, \quad 27, \quad 31.$$

Für die andere Form $76i \pm \alpha$, in welcher keine Teiler auftreten können, sind aber die Werte von α die folgenden:

$$7, \quad 11, \quad 13, \quad 21, \quad 23, \quad 29, \quad 33, \quad 35, \quad 37.$$

SCHOLION

§31 Bisher haben wir keine anderen Zahlen für n angenommen als Primzahlen, weswegen wir noch zwei Beispiele zu zusammengesetzen Zahlen hinzufügen wollen.

BEISPIEL 11

§32 Alle Primteiler von in der Form $pp + 30qq$ enthaltenen Zahlen zu finden.

LÖSUNG

Hier wird es, wegen $n = 30$ und $g < \sqrt{10}$, gefällig sein, anstelle von g vier Werte anzunehmen, 0, 1, 2, 3, welche wir einzeln durchgehen wollen:

I. $g = 0$ liefert $fh = 30$, woher für den Teiler D die folgenden Formeln entstehen:

$$\begin{aligned} &1) \quad D = rr + 30ss, \\ &2) \quad D = 2rr + 15ss, \\ &3) \quad D = 3rr + 10ss, \\ &4) \quad D = 5rr + 6ss, \end{aligned}$$

deren erste mit der vorgelegten Form übereinstimmt, dann aber das Doppelte der zweiten, das Dreifache der dritten und das Fünffache der vierten; hier bemerke man, dass anstelle des Fünffachen auch das Sechsfache genommen werden kann, weil ja, wenn

$$5D = pp + 30qq$$

war, dann auch

$$5D = pp + 30qq$$

sein wird.

II. Es sei nun $g = 1$, es wird $fh = 31$ sein, woher die eine einzige Form

$$D = rr + 2rs + 31ss = (r+s)^2 + 30ss$$

entsteht, welches die vorgelegte Form selbst ist.

III. Es sei $g = 2$, es wird $fh = 34 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 17$ sein; daher entstehen die zwei Formen:

$$\begin{aligned} &1) \quad D = rr + 4rs + 34ss = (r+2s)^2 + 30ss, \\ &2) \quad D = 2rr + 4rs + 17ss, \end{aligned}$$

deren Doppeltes auf die vorgelegte Form zurückgeführt werden wird.

IV. Es sei $g = 3$ und wird $fh = 39 = 3 \cdot 13$ sein, woher wiederum zwei Formen entstehen:

$$\begin{aligned} &1) \quad D = rr + 6rs + 39ss = (r+3s)^2 + 30ss, \\ &2) \quad D = 3rr + 6rs + 13ss, \end{aligned}$$

deren Dreifaches die vorgelegte Form annimmt. Aus diesen folgt, dass alle Teiler D so beschaffen sind, dass entweder D oder $2D$ oder $3D$ oder $6D$ in der vorgelegten Form enthalten sind. Weiter bemerke man für die Form $4ni + a = 120i + a$ vor allem, dass die Menge alle Zahlen kleiner als 120 und zugleich teilerfremd zu 120 insgesamt 32 ist, woher wir nun gewiss inferieren können, dass die Anzahl der Werte des Buchstaben a wie α jeweils 16 ist. Weil also zuerst in a alle Quadratzahlen auftreten, wird die Formel $a = pp$ nur diese Zahlen geben: 1 und 49; aber die Formen $\frac{pp}{2}$, $\frac{pp}{3}$ und $\frac{pp}{6}$ liefern überhaupt keine zu 120 teilerfremden Zahlen. Die andere Form $a = pp + 30$ liefert nur diese Zahlen: $31, 79$. Daher liefert aber weiter $a = \frac{pp+30}{2}$ oder diese $a = 2tt + 15$ die Zahlen 17, 23, 47, 113. Weiter liefert $a = \frac{pp+30}{3}$, oder $a = 3tt + 10$, aber 13, 37. Dies Form gibt also nur zwei Werte. Schließlich gibt $a = \frac{pp+30}{6}$, oder $a = 6tt + 5$, diese: 11, 29, 59, 101. Auf diese Weise werden aber nur 14 Werte für den Buchstaben a hervorgehen, sodass noch zwei vermisst werden. Aber hier ist zu betrachten, dass anstelle der Formel $pp + 30$ allgemeiner $pp + 30qq$ gesetzt werden konnte. woher durch Nehmen von $p = 3t$ und Teilen durch 3 auch $a = 3tt + 10qq$ gesetzt werden können wird. Es sei nun $q = 2$, und es wird $a = 3tt + 40$ werden, woher der Fall $t = 1$ uns $a = 43$ liefert, aber $t = 3$ gibt $a = 67$; und auf diese Weise haben wir alle 16 Werte von a erlangt, welche angeordnet so fortschreiten:

$$1,\ 11,\ 13,\ 17,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 43,\ 47,\ 49,\ 59,\ 67,\ 79,\ 101,\ 113.$$

Wenn wir also anstelle der Zahlen größer als 60 deren Komplemente zu 120 mit dem Vorzeichen $-$ schreiben, werden diese Zahlen so aufgelistet werden können:

$$+1,\ -7,\ +11,\ +13,\ +17,\ -19,\ +23,\ +29,\ +31,\ +37,$$
$$-41,\ +43,\ +47,\ +49,\ -53,\ +59,$$

wo gänzlich alle ungeraden zu 30 teilerfremden Zahlen entweder mit dem Vorzeichen $+$ oder $-$ behaftet auftauchen, wenn wo die Vorzeichen verändert werden, man alle Werte des Buchstaben α für die Formel $120i + \alpha$ haben wird, alle deren Zahlen von der Klasse der Teiler ausgeschlossen sind.

Korollar 1

§33 Also werden alle Teiler der Zahlen der Form $pp + 30qq$ in vier Klassen aufgeteilt, deren erste die enthält, die selbst von der Form $pp + 30qq$ sind; die zweite Klasse hingegen die, deren Doppeltes von der Form sind, die dritte, deren Dreifaches, und die vierte schließlich die, deren Fünffaches oder auch Sechsfaches auf die Form $pp + 30qq$ zurückgeführt werden können. Also können diese vier Klassen, wenn wir die vorgelegte Form $pp + 30qq$ mit dem Buchstaben F, die Teiler hingegen mit dem Buchstaben D bezeichnen, auf diese Weise bezeichnet werden:

$$\text{I. } D = F, \quad \text{II. } 2D = F, \quad \text{III. } 3D = F, \quad \text{IV. } 5D = F;$$

hier wird es förderlich sein bemerkt zu haben, wenn $2D = F$ war, dass dann auch $15D = F$ sein wird; und in gleicher Weise, wenn $3D = F$ war, wird auch $10D = F$ sein; aber wenn $5D = F$ war, wird auch $6D = F$ sein.

Korollar 2

§34 Wannimmer wir sagen, dass alle Teiler von Zahlen der vorgelegten Form $pp + 30qq$ in der Form $120i + a$ enthalten sind, ist das nicht so zu verstehen, als ob alle in der Formel $120i + a$ enthaltenen Zahlen Teiler wären, sondern davon müssen all jene ausgeschlossen werden, die durch eine gewisse Zahl der Form $120i + \alpha$ teilbar sind. Nachdem diese aber weggeschafft worden sind, scheint es höchst wahrscheinlich, dass alle übrigen Zahlen der Formel $120i + a$, und daher besonders die Primzahlen, gewiss Teiler einer gewissen Zahl der Form $pp + 30qq$ sein werden. Aber diese in der Formel $120i + a$ enthaltenen Primzahlen können ohne Mühe beliebig weit angegeben werden, welche natürlich der Reihe nach bis hin zu 240 wie folgt voranschreiten:

$$1, \; 11, \; 13, \; 17, \; 23, \; 29, \; 31, \; 37, \; 43, \; 47, \; 59, \; 67, \; 79, \; 101, \; 113,$$

$$131, \; 137, \; 149, \; 151, \; 157, \; 163, \; 167, \; 179, \; 199, \; 233.$$

Korollar 3

§35 Weil ja alle Teiler von vierfacher Art sind, wird es daher auch gefällig sein, die Werte von a auf vier Klassen aufzuteilen, je nachdem ob daraus Teiler der ersten oder zweiten oder dritten oder vierten Klasse entspringen, welchen wir also die Zeichen einer der jeweiligen Klasse 1, 2, 3, 6 auf diese Weise hinzuschreiben wollen:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 1, & 11, & 13, & 17, & 23, & 29, & 31, & 37, & 43, & 47, & 49, & 59, & 67, & 79, & 101, & 113 \\ 1, & 6, & 3, & 2, & 2, & 6, & 1, & 3, & 3, & 2, & 1, & 6, & 3, & 1, & 6, & 2. \end{array}$$

Hier verdient es also bemerkt zu werden, dass die einzelnen Klassen alle viermal auftauchen.

Beispiel 12

§36 Alle Primteiler von in der Form $pp - 30qq$ oder $30pp - qq$ enthaltenen Primzahlen zu finden.

Lösung

Weil hier $\sqrt{\frac{35}{5}} < 3$ ist, haben wir für den Buchstaben g nur die drei Werte 0, 1, 2. Daher weil $fh = 30 - gg$ ist, wird für den ersten Fall $fh = 30$ sein, für den zweiten $fh = 29$ und für den dritten $fh = 26$, welche Fälle wir also entwickeln wollen.

I. Es sei $g = 0$ und daher entspringen die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} 1) &\quad D = rr - 30ss, \\ 2) &\quad D = 2rr - 15ss, \\ 3) &\quad D = 3rr - 10ss, \\ 4) &\quad D = 5rr - 6ss. \end{aligned}$$

II. Wenn $g = 1$ ist, entspringt die eine einzige Form

$$D = rr + 2rs - 29ss = (r+s)^2 - 30ss,$$

welche also die vorgelegte Form selbst ist.

III. Wenn $g = 2$ ist, entspringen die zwei Formeln

1) $D = rr + 4rs - 26ss = (r+2s)^2 - 30ss;$

wiederum die vorgelegte

2) $D = 2rr + 4rs - 13ss,$

deren Doppeltes eine Zahl der vorgelegten Form wird. Daher entstehen also Teiler von vier Arten, die, nachdem der Buchstabe F für die vorgelegte Formel festgelegt worden ist,

$$\text{I. } D = F, \quad \text{II. } 2D = F, \quad \text{III. } 3D = F, \quad \text{IV. } 6D = F$$

sind. Weiter wird aber die alle Teiler enthaltende Formel $120i \pm a$ zuerst entweder $a = pp$ oder $a = \frac{pp}{2}$ oder $a = \frac{pp}{3}$ oder $a = \frac{pp}{6}$ sein, woher keine anderen zu 30 teilerfremden Zahlen entspringen können als die aus der ersten Form $a = pp$, und aus dieser entstehen nur zwei Werte: Natürlich 1 und 49. Aber die andere Form war $a = 30 - pp$ oder $\frac{30-pp}{2}$ oder $\frac{30-pp}{3}$ oder $\frac{30-pp}{6}$, deren erste $a = 30 - pp$ diese Zahlen liefert: 29, 19, 91. Weil wir aber $30qq$ anstelle von 30 setzen können, liefert die Formel $a = 120 - pp$ darüber hinaus diese Zahlen: 119, 71. Die zweite gibt auf die Form $a = 2tt - 15$ gebracht diese Zahlen 13, 7, 17, 83, 113, 107. Dieser Formel ist aber $15pp - 2qq$ gleichwertig, also wird für $p = 3$ auch $a = 135 - 2qq$ sein, woher 13, 7, 103, 37 hervorgehen; und daher kommt darüber hinaus die neue Zahl 103 hinzu. Aus der dritten Form $a = 3tt - 10$ erhalten wird diese neuen Zahlen: 7, 17, aber die affine Form $a = 10tt - 3$ liefert darüber hinaus 37. Aus der letzten Form $5tt - 6$ entstehen diese Werte: 1, 119; aus der affinen Form $a = 6tt - 5$ hingegen diese: 1, 19, 49, 91. Daher ist besonders zu bemerken, dass dieselben Zahlen aus verschiedenen Klassen hervorgehen können. Bisher sind aber hervorgegangen:

$$1,\ 7,\ 13,\ 17,\ 19,\ 29,\ 37,\ 49,\ 71,\ 83,\ 91,\ 103,\ 107,\ 113,\ 119,$$

die Anzahl welcher Werte freilich nur 15 ist, obwohl sie 16 sein müsste; weil wir aber wissen, dass das Komplement zu 120 einer jeden Zahl auch auftreten muss, wird dieser Mangel leicht beseitigt. Es fehlt natürlich 101 als Komplement zu 19. Weil aber die Zahlen a so positiv wie negativ genommen werden können, lassen sich die Komplemente verwerfen, sodass wir für a die folgenden acht Wert haben:

$$1,\ 7,\ 13,\ 17,\ 19,\ 29,\ 37,\ 49,$$

also liefern die übrigen Zahlen die Werte des Buchstaben α, welche ebenso

$$11,\ 23,\ 31,\ 41,\ 43,\ 47,\ 53,\ 59$$

sein werden.

KOROLLAR 1

§37 In diesem Fall, unter Zulassung meines Theorems, dass alle in der Form $4ni + a$ enthaltenen Primzahlen zugleich Teiler der Zahlen der Form $pp \pm nqq$ sind, sind die aus unserer Formel $120i \pm a$ entstandenen Primzahlen bis hin zu 240 die folgenden:

$$1,\ 7,\ 13,\ 17,\ 19,\ 29,\ 37,\ 71,\ 83,\ 101,\ 103,\ 107,\ 113,\ 127,\ 137,$$

$$139,\ 149,\ 157,\ 191,\ 211,\ 223,\ 227,\ 233,\ 239.$$

KOROLLAR 2

§38 Weil wir ja in dieser Entwicklung gesehen haben, dass dieselben Zahlen aus verschiedenen Klassen entstanden sind, ist es offenkundig, dass vergebens vier verschiedene Klassen festgelegt worden sind, sondern zwei von ihnen zu einer verschmolzen werden können. Zuerst werden nämlich alle Teiler der vierten Klasse, für welche $5D = F$, oder auch $6D = F$, war, schon in der ersten Klasse $D = F$ gefunden, sodass immer, sooft $5D = F$ war, auch $D = F$ sein wird. In gleicher Weise sind die Teiler der dritten Klasse auch in der zweiten Klasse enthalten. Wenn nämlich $3D = F$ war, wird auch immer $2D = F$ sein, weswegen alle Teiler für die vorgelegte Form $pp - 30qq$, oder $30pp - qq$, auf nur zwei Klassen zurückgeführt werden können: Denn es wird immer entweder $D = F$ oder $2D = F$ sein.

KOROLLAR 3

§39 Also sind alle aus unserer Form $120i \pm a$ zu entspringenden Primzahlen von zwei Arten, während sie entweder selbst oder deren Doppeltes die vorgelegte Form haben können, welche in gleicher Weise wie zuvor aufgeteilt werden sollten, indem man den einzelnen Werten die Zahlen 1 oder 2 hinzuschreibt

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 7, & 13, & 17, & 19, & 29, & 37, & 49 \\ 1, & 2, & 2, & 2, & 1, & 1, & 2, & 1. \end{array}$$

Hier sei bemerkt, dass die beiden Zahlen gleich häufig auftauchen.

SCHOLION

§40 Wenn also für Zahlen irgendeiner Form $pp \pm nqq$ alle Primteiler verlangt werden würden, lassen sie sich sehr leicht aus unserer allgemeinen Form $4ni + a$ angeben; während dahingegen, wenn wir die vom illustren LAGRANGE dargebotenen Formeln gebrauchen wollten, sehr lästige Arbeit vonnöten wäre, aus den einzelnen Form $frr + 2grs + hss$ alle Primzahlen zu finden; deswegen ist es besonders zu wünschen, dass ein strenger Beweis von meiner Behauptung entdeckt wird, mit welcher diese Theorie natürlich erst zum höchsten Grad der Perfektion erhoben wird. Ich glaube aber, dass ein solcher Beweis vielleicht erhofft werden kann, wenn die folgenden Gegenstände sorgfältig betrachtet werden.

1) Nachdem für irgendeine vorgelegte Formel $pp \pm nqq$ meine beiden Formen $4ni + a$ und $4ni + \alpha$ festgelegt worden sind, umfassen sie zugleich gänzlich alle ungeraden zur vorgelegten n teilerfremden Zahlen; aber dann werden alle Teiler auf die erste Form $4ni + a$ bezogen; aber keine Zahlen der anderen Form $4ni + \alpha$ können Teiler der vorgelegten sein, oder alle Zahlen der zweiten Klasse werden von der Klasse der Teiler völlig ausgeschlossen.

2) Man betrachte also sorgfältig, dass in jedwedem Fall alle Werte von a nach einem außerordentlichem Gesetz miteinander zusammenhängen, sodass alle zusammen quasi einen Kreislauf bilden, in welchem nichts fehlt und nichts überflüssig ist, weil ja alle Produkt aus zwei oder mehreren dieser Zahlen wiederum in derselben Klasse auftauchen, sodass, sobald einige geeignete Werte für a gefunden worden sind, aus ihnen alle übrigen leicht bestimmt werden können, besonders weil alle Quadratzahlen und deren Reste bezüglich des Teilers $4n$ gewiss eingehen. Wenn also auf diese Weise alle Produkte und auch die Potenzen der schon gefundenen Zahlen eingefügt werden, wird bald diese ganze Klasse so gefüllt sein, dass die Menge der sich hierher erstreckenden Zahlen immer die Hälfte gänzlich aller Zahlen sind, die teilerfremd zu $4n$ und kleiner als selbiges sind; die andere Hälfte wird hingegen die Klasse der Zahlen α liefern, welche in keiner Weise Teiler werden können.

3) Daher ist also klar, dass diese beiden Klassen sich in einem höchst merkwürdigen und in der Natur der Zahlen selbst gelegenen Unterschied voneinander unterscheiden und sogar in ihrer Essenz voneinander unterschieden werden, sodass die Zahlen der einen Klasse in ihrer Natur von der anderen Klasse völlig verschieden sind.

4) Weil ja keine Zahlen der Klasse $4ni + \alpha$ jemals Teiler einer Zahl der Form $pp \pm nqq$ sein können, muss diese Klasse als Ursprung aller Zahlen betrachtet werden, deren Natur von der Gestalt der Teiler abweicht, welches Widerstreben auch auf alle Zahlen ausgedehnt werden muss, welche durch

eine Zahl der Klasse $4ni + \alpha$ teilbar sind. Wenn nämlich solche Zahlen Teiler sein könnten, wären auch alle Zahlen dieser Klasse Teiler, was der Natur der Sache widerspricht.

5) Weil aber die Produkte aus den zwei Zahlen der Klasse $4ni + \alpha$ in die Klasse der Teiler $4ni + a$ übergeht, ist es offensichtlich, dass in der ersten Klasse mehrere von der Gestalt der Teiler ferne auftreten müssen; natürlich all die, die durch eine Zahl der anderen Klasse teilbar sind.

6) Wenn nun all diese Zahlen in der Klasse $4ni + a$ gestrichen oder ausgeschlossen werden, die in der Natur der Teiler hinderlich gemacht werden, scheint es höchst wahrscheinlich, dass alle übrigen Zahlen mit der Gestalt der Teiler versehen sein werden. Weil auf diese Weise nur zusammengesetzte Zahlen herausgeworfen werden, ist es ersichtlich, dass gänzlich alle in der Form $4ni + a$ enthaltenen Zahlen in der Tat Teiler einer bestimmten Zahl der Form $pp \pm nqq$ sein werden. Also geht die ganze Aufgabe darauf zurück, dass dieser Wahrscheinlichkeit die Kraft eines perfekten Beweises vermittelt wird.

Zu beweisendes Theorem

§41 *Wenn a ein Teiler einer Zahl der Form $pp + nqq$ war, sodass $aD = pp + nqq$ ist, dann wird, sooft $4ni + a$ eine Primzahl ist, auch $D(4ni + a)$ eine Zahl der Form $pp + nqq$ sein.*

Hier müssen aber die folgenden Dinge angemerkt werden: 1). Die Zahlen p und q müssen zueinander teilerfremd sein. 2). Der Teiler a muss auch teilerfremd zu n sein, weil ja die Teiler von n davon ausgeschlossen sind. 3). Wenn es zufällig passiert, dass die Zahl $D(4ni + a)$ nicht in der Form $pp + nqq$ enthalten zu sein scheint, dann ist immer ihr Vierfaches, oder auch ihr Produkt mit einem anderen Quadrat, gewiss in ihr enthalten. Weil ja also in diesem Fall

$$D(4ni + a) = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + n\left(\frac{q}{2}\right)^2$$

sein wird, ist diese Auflösung nicht zu verstehen eine Ausnahme zu bilden. Weil also $27 = 4^2 + 11 \cdot 1^2$ ist, wird $a = 27$ und $n = 11$ und $D = 1$ ist, woher die Formel $4ni + a$ hier $44i + 27$ wird, welche im Fall $i = 1$ entsprechend 71 liefert, das heißt eine Primzahl; und dennoch kann in ganzen Zahlen nicht $71 = pp + 11q$ sein. Es ist aber

$$4 \cdot 71 = 284 = 3^2 + 11 \cdot 5^2,$$

und daher

$$71 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 11 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2.$$

Aber solche Fälle treten selten auf und sind daher nicht auszunehmen, weil Zahlen der Form $4ni + \alpha$ so von der Klasse der Teiler ausgeschlossen werden, dass, auch wenn für p und q gebrochene Zahlen angenommen werden, sie dennoch niemals Teiler sein können.

SCHOLION

§42 Es wäre überflüssig, diese Untersuchung auf Formeln der Art $mpp \pm nqq$ auszudehnen, weil alle Teiler der Zahlen der Form $mpp \pm nqq$ immer auch Teiler der Zahlen der Form $pp \pm qq$ sind. Was ich also vor einiger Zeit in **Tomo XIV Comment. Vet. Academiae** über die Teiler vorn Zahlen der Form $mpp \pm nqq$ mitgeteilt habe und zum großen Teil allein aus Induktion geschlossen habe, wird nun durch die außerordentlichen vom illustren LAGRANGE bewiesenen Eigenschaften nicht nur sehr schön illustriert, sondern auch zu einem um vieles höherem Grad an Gewissheit geführt, sodass nun nichts weiter vermisst wird, als dass ein strenger Beweis des erwähnten Theorems entdeckt wird, welcher sich nun freilich bald erhoffen lassen wird. Meine Methode erfreut sich aber besonders dieser Eigenschaft, dass mit ihrer Hilfe gänzlich alle Teiler von Formeln der Art $mpp \pm nqq$ angegeben werden und beliebig weit fortgesetzt werden können, was ich darüber hinaus im folgenden Beispiel erklären werde.

BEISPIEL 13

§43 Alle Teiler der Form $pp + 39qq$ zu finden.

Zuerst wollen wir also mittels der Formeln des illustren LAGRANGE alle verschiedenen Formen dieser Teiler suchen, und weil $n = 39$ und daher $\sqrt{\frac{39}{3}} < 4$

ist, wird es genügen, für g diese vier Werte anzunehmen: 0, 1, 2, 3.

I. Der Wert $g = 0$ liefert $fh = 39$, woher diese zwei Formen entstehen:

$$1)\ \ rr + 39ss, \quad 2)\ \ 3rr + 13ss,$$

deren erste die Teiler $D = F$ und die andere $3D = F$ gibt, während F die vorgelegte Form bezeichnet.

II. Der Wert $g = 1$ gibt $fh = 40$, woher diese Formen entstehen:

1) $D = rr + 2rs + 40ss = (r + s)^2 + 39ss$

und daher $D = F$.

2) $D = 2rr + 2rs + 20ss$,

welche Form aber keine Primzahl sein kann.

3) $D = 4rr + 2rs + 8ss$,

welche Zahl ebenso keine Primzahlen gibt.

4) $D = 5rr + 2rs + 8ss$,

woher $5D = F$ oder auch $8D = F$ wird.

III. Der Fall $g = 2$ gibt $fh = 43$, woher eine einzige Form entspringt:

$$D = rr + 4rs + 43ss = (r + 2s)^2 + 39ss$$

und daher $D = F$.

IV. Schließlich liefert der Fall $g = 3$ zunächst $fh = 48$, woher die folgenden Primzahlen enthaltenen Formen entspringen:

1) $D = rr + 6rs + 48ss = (r + 3s)^2 + 39ss$

und daher $D = F$.

2) $D = 3rr + 6rs + 16ss$

gibt $3D = F$ oder auch $16D = F$. Daher ist also klar, dass insgesamt drei Arten von Teilern gegeben sind.

$$1)\ \ D = F, \quad 2)\ \ 3D = F, \quad 3)\ \ 5D = F.$$

Nachdem diese festgelegt worden sind, wollen wir die Formel $4ni + a = 156i + a$ entwickeln, wo zuerst bemerkt sei, dass die Menge alle Zahlen teilerfremd zu 156 und kleiner als selbige 48 ist, woher es bis zur Hälfte 78 entsprechend 24 sein werden, von welchen die einzelnen entweder positiv oder negativ genommen Werte für den Buchstaben a liefern. Diese Zahlen werden also sein:

$$1,\ \ 5,\ \ 7,\ \ 11,\ \ 19,\ \ 23,\ \ 25,\ \ 29,\ \ 31,\ \ 35,\ \ 37,\ \ 41,\ \ 43,$$
$$47,\ \ 49,\ \ 53,\ \ 55,\ \ 59,\ \ 61,\ \ 67,\ \ 71,\ \ 73,\ \ 77,$$

wo zuerst die Quadrate das Vorzeichen + haben, welche also

$$+1,\ \ +25,\ \ +49$$

sein werden; die Quadrate der übrigen Zahlen hingegen senke man durch Teilung durch 156 unter 78, woher

$$11^2 = -35, \quad 17^2 = -23, \quad 19^2 = +49, \quad 23^2 = +61$$

werden wird. Für die übrigen Zahlen wollen wir die Form $pp + 39$ betrachteten, woher für $p = 1$ natürlich 40 hervorgeht, der Teiler 5 welcher sich auf die dritte Art beziehenden Zahl das Vorzeichen + hat. Weil nun die vorhergehenden Zahlen zur ersten Art zu zählen sind, werden deren Produkte mit 5 zur dritten Art gerechnet werden müssen, woher die folgenden Zahlen entstehen werden:

$$+5,\ \ +41,\ \ -31,\ \ -19,\ \ -67,\ \ -7.$$

Es sei nun $p = 2$ und es wird $4 + 39 = 43$ sein, welches der Teiler der ersten Klasse ist, woher auch die schon gefundenen Zahlen dieser Klasse mit 43 multipliziert Teiler der ersten Klasse geben werden, welche aber, weil die Zahl 43 zu groß ist, leichter aus den folgenden gefundenen werden. Man nehme also $p = 3$ und es wird $pp + 39 = 48$ sein, deren Teiler 3 schon ausgeschlossen worden ist. Es sei also $p = 4$ und es wird $16 + 39 = 55$ sein, deren Teiler 5 wir schon behandelt haben; der andere Teiler 11 hingegen bezieht sich auch auf die dritte Klasse; mit diesem multipliziert werden also die Zahlen der ersten Klasse sein:

$$+11, \quad +59, \quad -37, \quad -73, \quad +71, \quad +47.$$

Man multipliziere auch die Zahlen der dritten Klasse mit 11 und die reduzierten Produkte, welche

$$+55, \quad ,-17, \quad -29, \quad 53, \quad +43, \quad -77$$

sind, werden zur ersten Klasse zurückkehren. Auf diese Weise sind alle Zahlen mit ihren entsprechenden Vorzeichen gefunden, weil welche zur ersten oder dritten Klasse gezählt werden, ist es offenkundig, dass keine Teiler der zweiten Klasse übrig bleiben. Natürlich sind all diese Zahlen schon in der ersten Klasse enthalten, weswegen sich alle Werte von a mit den beigefügten Zeichen I und III so verhalten:

$$\begin{array}{cccccccccccc} +1, & +5, & -7, & +11, & -17, & -19, & -23, & +25, & -29, & -31, & -35, & -37, \\ \mathrm{I} & \mathrm{III} & \mathrm{III} & \mathrm{III} & \mathrm{I} & \mathrm{III} & \mathrm{I} & \mathrm{I} & \mathrm{I} & \mathrm{III} & \mathrm{I} & \mathrm{III} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} +41, & +43, & +47, & +49, & -53, & +55, & +59, & +61, & -67, & +71, & -77 \\ \mathrm{III} & \mathrm{I} & \mathrm{III} & \mathrm{I} & \mathrm{I} & \mathrm{I} & \mathrm{III} & \mathrm{I} & \mathrm{III} & \mathrm{III} & \mathrm{I}. \end{array}$$

Und in der Tat ist die zweite Klasse nicht völlig unnütz; es sind nämlich Primzahlen gegeben, welche wir zur ersten Klasse gezählt haben, deren Auflösung in ganzen Zahlen nicht gelingt und sogar den quadratischen Nenner 16 erfordert, eine Zahl von welcher Art 61 ist, welche nicht anders auf die erste Klasse zurückgeführt werden kann als auf diese Weise: $61 = \left(\frac{25}{4}\right)^2 + 39\left(\frac{3}{4}\right)^2$. Es ist aber $3 \cdot 61 = 183 = 12^2 + 39 \cdot 1^2$. Wenn also nun die negativen für a gefundenen Werte in positive umgewandelt werden, indem man die Komplemente zu 156 nimmt, werden die folgenden Werte hervorgehen:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 1, & 5, & 11, & 25, & 41, & 43, & 47, & 49, & 55, & 59, & 61, & 71, & 79, & 83, & 89, & 103, \\ \mathrm{I} & \mathrm{III} & \mathrm{III} & \mathrm{I} & \mathrm{III} & \mathrm{I} & \mathrm{III} & \mathrm{I} & \mathrm{I} & \mathrm{III} & \mathrm{I} & \mathrm{III} & \mathrm{I} & \mathrm{III} & \mathrm{III} & \mathrm{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} 119, & 121, & 125, & 127, & 133, & 137, & 139, & 149 \\ \mathrm{III} & \mathrm{I} & \mathrm{III} & \mathrm{I} & \mathrm{I} & \mathrm{III} & \mathrm{I} & \mathrm{III}. \end{array}$$

Nun werden also alle in der Form $156i + a$ enthaltenen Primzahlen gewiss Teiler einer gewissen Zahl der Form $p + 39qq$ sein, und sogar entweder sie selbst oder deren Fünffaches oder sogar deren Dreifaches wird von dieser Form sein. Daher werden alle Primteiler von 1 bis hin zu 312 die folgenden sein:

$$1,\ 5,\ 11,\ 41,\ 43,\ 47,\ 59,\ 61,\ 71,\ 79,\ 83,\ 89,\ 103,\ 127,\ 137,\ 139,\ 149,\ 157,$$

$$167,\ 181,\ 197,\ 199,\ 211,\ 227,\ 239,\ 277,\ 281,\ 283,\ 293.$$

KOROLLAR 1

§44 Damit leichter verstanden wird, warum in diesem Fall die zweite Klasse auf die erste zurückgefallen ist, haben wir schon oben gezeigt, wenn der Teiler

$$D = frr + 2grs + hss$$

war, während $fh = gg + n$ war, dass dann nicht nur Df, sondern auch Dh auf die Form $pp + nqq$ gebracht werden kann. Aber daher, wenn allgemeiner

$$k = ftt + 2gtu + huu$$

war, dann wird das Produkt Dk eine Zahl der Form $pp + nqq$ sein; denn nach der Rechnung findet man

$$Dk = (frt + g(ts + ru) + hsu)^2 + n(ts - ru)^2.$$

Wenn also k ein Quadrat werden kann, oder durch eines teilbar, dann wird dieses Quadrat weggelassen werden können. Denn wenn $Dkll$ eine Zahl der Form $pp + nqq$war, dann, wenn auch Brüche zugelassen werden, wird auch Dk von derselben Form sein. So war in unserem Fall für die Teiler der zweiten Klasse

$$D = 3rr + 13ss$$

und daher $k = 3tt + 13uu$, deren Wert für $t = 1$ und $u = 1$ genommen $k = 16$ werden wird, weil welcher ein Quadrat ist, wird diese Form auf die erste zurückgeführt.

Korollar 2

§45 Nun haben also alle Lehrsätze, welche ich vor einiger Zeit zu Teilern von dieser Art in **Comment. veter. Tomo XIV** angegeben hatte, einen um vieles höheren Grad an Gewissheit erlangt, nachdem vom hoch geehrten LAGRANGE die Formen dieser Teiler bewiesen worden sind; und es scheint kein zweifel zu bestehen, dass bald, was in dieser Art noch vermisst wird, mit einem vollständigen Beweis untermauert wird.

Korollar 3

§46 Bevor ich aber diesen Gegenstand ganz verlasse, möchte ich noch eine merkwürdige Beobachtung über die Vorzeichen der Zahlen a hinzufügen, während natürlich alle ihre Werte unter $2n$ gesenkt werden. Weil nämlich die erste und die letzte dieser Zahlen zusammen genommen $2n$ werden, ist zu entscheiden, ob diese zwei Zahlen die gleichen oder ungleiche Vorzeichen haben, denn in jedem der beiden Fälle werden zwei beliebige von den äußersten gleich weit entfernte von diesen Zahlen, deren Summe daher immer $2n$ ist, auch entweder die gleichen oder verschiedene Vorzeichen haben. So hatte in unserem Fall, in welchem $2n = 78$ war, die letzte 77 das Vorzeichen $-$, während die erste 1 immer das Vorzeichen $+$ hat, woher auch die Vorzeichen von zwei von den äußersten gleich weit entfernten immer entgegengesetzt sein werden. Aber aus dem Korollar in Beispiel 11, wo $2n = 60$ war, hatte die Zahl 59 das Vorzeichen $+$, woher auch irgendwelche zwei von den äußersten gleich weit entfernten mit demselben Vorzeichen behaftet entdeckt werden, der Grund für welches Phänomen ohne Mühe ausfindig gemacht werden können wird. Beobachtungen von dieser Art erleichtern aber die Arbeit beim Aufspüren von Teilern nicht unwesentlich.