Über den immensen Nutzen des Kalküls imaginärer Grössen in der Analysis*

Leonhard Euler

Wie große Zuwächse dem Kalkül imaginärer Größen über die ganze Analysis hinweg zuzurechnen sind, wird nun freilich niemand weiter bezweifeln. Neulich habe ich zwar versucht, die Integration rationaler Formen vollkommen vom Kalkül imaginärer Größen zu loszulösen; aber dennoch ist diese Aufgabe in den Fällen, wo der Nenner mehrere einander gleiche Faktoren hat, von weniger Erfolg gekrönt gewesen. Ja ich bin sogar vor nicht allzu langer Zeit auf solche Integralformeln gestoßen, wie welche ohne Hilfe imaginärer Größen können, ich bis jetzt noch gar nicht erkenne. Nachdem ich nämlich gezeigt hatte, dass der Wert dieser Integralformel

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n + 2\cos\theta + x^{-n}}$$

von der Grenze $x = 0$ bis $x = 1$ erstreckt

$$\frac{\pi \sin\frac{\theta p}{n}}{n \sin\theta \sin\frac{\pi p}{n}}$$

ist, während π den Umfang des Kreises bezeichnet, dessen Durchmesser $= 1$ ist, wird daher leicht diese höchst merkwürdige Schlussfolgerung abgeleitet, dass der Wert dieser Integralformel

*Originaltitel: "De summo usu calculi imaginariorum in analysi", zuerst publiziert in: *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 3* (1788, geschrieben 1776): pp. 25 – 46, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 18, pp. 291 – 317 , Eneström Nummer E621, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

$$\int \frac{\partial x}{x \log x} \cdot \frac{x^p - x^{-p}}{x^n + 2\cos\theta + x^{-n}}$$

gleichermaßen von der Grenze $x = 0$ bis hin zu $x = 1$ erstreckt diesem Integral gleich wird

$$\frac{\pi}{n \sin\theta} \int \frac{\partial p \sin\frac{\theta p}{n}}{\sin\frac{\pi p}{n}},$$

wo natürlich die Größe p als Variable betrachtet wird und das Integral so genommen wird, dass es für $p = 0$ gesetzt verschwindet. Wenn wir nun also $\frac{p}{n} = \varphi$ setzen, muss diese Differentialform $\frac{\partial\varphi \sin m\varphi}{\sin n\varphi}$ integriert werden. Wie also diese Integration mithilfe von imaginären Größen behandelt werden muss, werde ich hier zeigen.

Über die Integration der Formel

$$\int \frac{\partial\varphi \sin m\varphi}{\sin n\varphi}$$

§1 Es ist vor allem anderen ratsam, diese Formel auf gewöhnliche algebraische Größen zurückzuführen, was nicht gefälliger als mit imaginären Größen geleistet werden kann. Für dieses Ziel wollen wir der Kürze wegen

$$t = \cos\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin\varphi \quad \text{und} \quad u = \cos\varphi - \sqrt{-1} \cdot \sin\varphi$$

setzen, sodass $tu = 1$ ist; dann wird aber

$$\partial t = -\partial\varphi(\sin\varphi - \sqrt{-1} \cdot \cos\varphi)$$

und daher

$$\partial t\sqrt{-1} = -\partial\varphi(\cos\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin\varphi) = -t\partial\varphi$$

sein, woher also

$$\partial\varphi = -\frac{\partial t\sqrt{-1}}{t} = \frac{\partial t}{t\sqrt{-1}}$$

werden wird.

§2 Nachdem aber diese Formeln festgelegt worden sind, ist aus den Elementen des Imaginärkalküls bekannt, dass

$$t^{\lambda} = \cos \lambda\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin \lambda\varphi \quad \text{und} \quad u^{\lambda} = \cos \lambda\varphi - \sqrt{-1} \cdot \sin \lambda\varphi$$

ist; daher berechnet man $t^{\lambda} - u^{\lambda} = 2\sqrt{-1} \cdot \sin \lambda\varphi$ und daher

$$\sin \lambda\varphi = \frac{t^{\lambda} - u^{\lambda}}{2\sqrt{-1}}.$$

Daher wird also, wenn wir die Zahlen m und n anstelle von λ schreiben,

$$\frac{\sin m\varphi}{\sin n\varphi} = \frac{t^m - u^m}{t^n - u^n}$$

sein, weshalb, wenn wir das gesuchte Integral mit dem Buchstaben S bezeichnen, dass

$$S = \int \frac{\partial\varphi \sin m\varphi}{\sin n\varphi}$$

ist, wir nach der Substitution nun

$$\partial S = \frac{\partial t}{t\sqrt{-1}} \cdot \frac{t^m - u^m}{t^n - u^n}$$

haben werden. Weil aber $u = \frac{1}{u} = t^{-1}$ ist, ist die vorgelegte Form auf eine gewohnte allein die Variable t beinhaltende Gattung zurückgeführt worden, weil

$$\partial S\sqrt{-1} = \frac{\partial t}{t} \cdot \frac{t^m - t^{-m}}{t^n - t^{-n}}$$

ist, das Integral welcher Formel schon verschiedeneorts entwickelt gefunden wird. Hier muss sich aber dessen erinnert werden, dass die Größe t keine reelle Größe ist, weil $t = \cos \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin \varphi$ ist.

§3 Hier ist aber offensichtlich, dass die beiden Zahlen m und n immer als ganzzahlig angesehen werden können, weil von ihnen das Verhältnis angegeben wird, welches die beiden Winkel $m\varphi$ und $n\varphi$ zueinander haben. Hier wird also zunächst zu prüfen sein, ob der Exponent m größer oder kleiner ist als der Exponent n. weil ja bekannt ist, wenn $m > n$ war, dass unser Bruch ein unechter sein wird und die ganzen Anteile aus ihm herausgenommen werden, bevor die Integration in Angriff genommen wird. Es wird gefällig sein, diese Fälle hier zuerst zu entwickeln.

Es es also zuerst $m = n + \lambda$, so dennoch, dass $\lambda < n$ ist, und es wird leicht klar werden, dass der Bruch

$$\frac{t^{n+\lambda} - t^{-(n+\lambda)}}{t^n - t^{-n}}$$

den ganzen Teil $t^\lambda + t^{-\lambda}$ enthält, nach Entfernen von welchem von diesem Bruch

$$-\frac{t^{n-\lambda} - t^{-(n-\lambda)}}{t^n - t^{-n}}$$

zurückbleibt, welcher Bruch nicht weiter unecht ist. Aus dem ganzen Teil mit $\frac{\partial t}{t}$ multipliziert entspringt das Integral $\frac{t^\lambda - t^{-\lambda}}{\lambda}$. Aber es ist $t^\lambda - t^{-\lambda} = t^\lambda - u^\lambda = 2\sqrt{-1} \cdot \sin\lambda$, was durch $\sqrt{-1}$ geteilt den daraus zu entspringenden Anteil

$$= \frac{2\sin\lambda\varphi}{\lambda}$$

gibt.

§4 Wenn aber $m > 2n$ oder $m = 2n + \lambda$ war, dann wird unser Bruch

$$\frac{t^{2n+\lambda} - t^{-2n-\lambda}}{t^n - t^{-n}}$$

diesen ganzen Teil $t^{n+\lambda} + t^{-n-\lambda}$ enthalten, nach Wegschaffen von welchem noch dieser Bruch zurückbleibt

$$\frac{t^\lambda - t^{-\lambda}}{t^n - t^{-n}},$$

welcher nun wegen $\lambda < n$ echt ist. Aber aus dem ganzen Anteil mit $\frac{\partial t}{t}$ multipliziert entspringt durch Integrieren $\frac{t^{n+\lambda} - t^{-n-\lambda}}{n+\lambda} = \frac{t^{n+\lambda} - u^{n+\lambda}}{n+\lambda}$, dessen Wert $\frac{2\sqrt{-1}\cdot\sin(n+\lambda)\varphi}{n+\lambda}$ ist, welcher durch $\sqrt{-1}$ geteilt den daraus entspringenden Anteil

$$= \frac{2\sin(n+\lambda)\varphi}{n+\lambda}$$

liefert.

§5 In gleicher Weise, wenn $m > 3n$ war und $m = 3n + \lambda$ gesetzt wird, wird unser Bruch

$$\frac{t^{3n+\lambda} - t^{-3n-\lambda}}{t^n - t^{-n}}$$

sein, welcher den ganzen Anteil $t^{2n+\lambda} + t^{-2n-\lambda}$ enthält; nachdem dieser aber abgezogen worden ist, wird noch dieser Bruch zurückbleiben

$$\frac{t^{n+\lambda} - t^{-n-\lambda}}{t^n - t^{-n}},$$

welcher immer noch unecht ist und den ganzen Anteil $t^{\lambda} + t^{-\lambda}$ enthält; erst nach Beseitigen von diesem wird der echte Bruch

$$-\frac{t^{n+\lambda} - t^{-(n-\lambda)}}{t^n - t^{-n}}$$

zurückbleiben. Aus den ganzen Anteilen entspringen aber diese Anteile des Integrals

$$\frac{2\sin(2n+\lambda)\varphi}{2n+\lambda} + \frac{2\sin\lambda\varphi}{\lambda}.$$

§6 Wir wollen auch festlegen, dass $m > 4n$ und daher $m = 4n + \lambda$ ist und unser Bruch wird

$$\frac{t^{4n+\lambda} - t^{-4n-\lambda}}{t^n - t^{-n}}$$

sein, welcher sofort den ganzen Anteil $t^{3n+\lambda} + t^{-3n-\lambda}$ enthält; nachdem dieser aber abgezogen worden ist, wird noch dieser Bruch zurückbleiben

$$\frac{t^{2n+\lambda} - t^{-2n-\lambda}}{t^n - t^{-n}},$$

welcher erneut den ganzen Anteil $t^{n+\lambda} + t^{-n-\lambda}$ enthält; nach Subtraktion von diesem wird dieser echte Bruch zurückbleiben

$$\frac{t^{\lambda} - t^{\lambda}}{t^n - t^{-n}}.$$

Nun werden aber aus den ganzen Anteilen für das Integral S diese Teile erhalten werden

$$\frac{2\sin(3n+\lambda)\varphi}{3n+\lambda}+\frac{2\sin(n+\lambda)\varphi}{n+\lambda}.$$

§7 Es sei weiter auch $m > 5n$ oder $m = 5n + \lambda$ und unser Bruch

$$\frac{t^{5n+\lambda}-t^{-5n-\lambda}}{t^n-t^{-n}}$$

wird zuerst den ganzen Anteil $t^{4n+\lambda}+t^{-4n-\lambda}$ enthalten; nach Abspalten von diesem wird noch dieser Bruch zurückbleiben

$$\frac{t^{3n+\lambda}-t^{-3n-\lambda}}{t^n-t^{-n}},$$

welcher nach dem Vorhergehenden noch zwei ganze Teile enthält, nämlich $t^{2n+\lambda}+t^{-2n-\lambda}$ und $t^{\lambda}+t^{-\lambda}$; nach Abziehen von diesen wird schließlich der echte Bruch

$$\frac{t^{n+\lambda}-t^{-(n-\lambda)}}{t^n-t^{-n}}$$

zurückbleiben.

§8 Aus diesen Fällen wird schon hinreichend erkannt, wenn der Exponent n noch größer angenommen wird, wie sich die in S eingehenden ganzen Anteile verhalten werden, welche wir deshalb hier gesammelt auflisten wollen.

I. Wenn $m = n + \lambda$ ist, wird gelten:

$$\int\frac{\partial\varphi\sin(n+\lambda)\varphi}{\sin n\varphi}$$
$$=\frac{2\sin\lambda\varphi}{\lambda}-\int\frac{\partial t}{t\sqrt{-1}}\cdot\frac{t^{n-\lambda}-t^{-(n-\lambda)}}{t^n-t^{-n}}.$$

II. Wenn $m = 2n + \lambda$ ist, wird gelten:

$$\int\frac{\partial\varphi\sin(2n+\lambda)\varphi}{\sin n\varphi}$$
$$=\frac{2\sin(n+\lambda)\varphi}{n+\lambda}+\int\frac{\partial t}{t\sqrt{-1}}\cdot\frac{t^{\lambda}-t^{-\lambda}}{t^n-t^{-n}}.$$

III. Wenn $m = 3n + \lambda$ ist, wird gelten:

$$\int \frac{\partial\varphi \sin(3n+\lambda)\varphi}{\sin n\varphi}$$
$$= \frac{2\sin(2n+\lambda)\varphi}{2n+\lambda} + \frac{2\sin\lambda\varphi}{\lambda} - \int \frac{\partial t}{t\sqrt{-1}} \cdot \frac{t^{n-\lambda} - t^{-(n-\lambda)}}{t^n - t^{-n}}.$$

IV. Wenn $m = 4n + \lambda$ ist, wird gelten:

$$\int \frac{\partial\varphi \sin(4n+\lambda)\varphi}{\sin n\varphi}$$
$$= \frac{2\sin(3n+\lambda)\varphi}{3n+\lambda} + \frac{2\sin(n+\lambda)\varphi}{n+\lambda} + \int \frac{\partial t}{t\sqrt{-1}} \cdot \frac{t^{\lambda} - t^{-\lambda}}{t^n - t^{-n}}.$$

V. Wenn $m = 5n + \lambda$ ist, wird gelten:

$$\int \frac{\partial\varphi \sin(5n+\lambda)\varphi}{\sin n\varphi}$$
$$= \frac{2\sin(4n+\lambda)\varphi}{4n+\lambda} + \frac{2\sin(2n+\lambda)\varphi}{2n+\lambda} + \frac{2\sin\lambda\varphi}{\lambda} - \int \frac{\partial t}{t\sqrt{-1}} \cdot \frac{t^{n-\lambda} - t^{-(n-\lambda)}}{t^n - t^{-n}}.$$

VI. Wenn $m = 6n + \lambda$ ist, wird gelten:

$$\int \frac{\partial\varphi \sin(6n+\lambda)\varphi}{\sin n\varphi}$$
$$= \frac{2\sin(5\lambda+\lambda)\varphi}{5n+\lambda} + \frac{2\sin(3n+\lambda)\varphi}{3n+\lambda} + \frac{2\sin(n+\lambda)\varphi}{n+\lambda} + \int \frac{\partial t}{t\sqrt{-1}} \cdot \frac{t^{\lambda} - t^{-\lambda}}{t^n - t^{-n}}.$$

etc.

§9 Nachdem also diese Fälle, in denen $m > n$ ist, mit so glücklichem Erfolg erledigt worden sind, wird die ganze Aufgabe auf die Integration der Formel $\frac{\partial\varphi \sin m\varphi}{\sin n\varphi}$ für die Fälle zurückgeführt, in denen $m < n$ ist, weil ja aus dem gerade Erläuterten offenkundig ist, wie jene Fälle sehr leicht auf diese reduziert werden können. Dann wird also mithilfe unserer Substitution $t = \cos\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin\varphi$ zu dieser Formel gelangt

$$S\sqrt{-1} = \int \frac{\partial t}{t} \cdot \frac{t^m - t^{-m}}{t^n - t^{-n}},$$

deren Integration wir also nun angehen wollen.

Untersuchung der Integralformel $\int \frac{\partial t}{t} \cdot \frac{t^m - t^{-m}}{t^n - t^{-n}}$, wobei $m < n$ ist

§10 Hier werden vor allem anderen alle trinomischen Faktoren unseres Nenners $t^n - t^{-n}$ ausfindig gemacht werden müssen, die Form welcher einzelnen so dargeboten werden kann $t^1 - 2\cos\omega + t^{-1}$, wo der Winkel ω so bestimmt werden muss, dass für

$$t^1 - 2\cos\omega + t^{-1} = 0$$

gesetzt zugleich der Nenner selbst verschwindet; dann wird aber daraus

$$t = \cos\omega + \sqrt{-1} \cdot \sin\omega$$

berechnet, woher sofort klar ist, dass

$$t^n = \cos n\omega + \sqrt{-1} \cdot \sin n\omega \quad \text{und} \quad t^{-n} = \cos n\omega - \sqrt{-1} \cdot \sin n\omega$$

sein wird, weswegen unser Nenner auf diese Form $2\sqrt{-1} \cdot \sin n\omega$ zurückgeführt werden wird, welcher Wert also gleich Null gleich wird.

§11 Weil also $\sin n\omega = 0$ sein muss, werden alle Werte, welche sich für $n\omega$ annehmen lassen, 0π, π, 2π, 3π etc. sein, woher die Werte für den Winkel ω entsprechend $\frac{0\pi}{n}$, $\frac{1\pi}{n}$, $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{3\pi}{n}$ etc. und im Allgemeinen $\frac{i\pi}{n}$ sein wird, während i eine beliebige ganze Zahl sein wird. Daher scheinen also für alle Faktoren unseres Nenners n von diesen Werten genommen werden zu müssen; aber es ist offensichtlich, wie viele solcher Formeln $t^1 - 2\cos\omega t^{-1}$ auch immer aber miteinander multipliziert werden, dass der letzte Term niemals als $-t^{-n}$ hervorgehen kann. Aber hier muss man sich dessen erinnern, was über Integrationen von dieser Art im Allgemeinen gelehrt worden ist, natürlich dass eine solcher trinomischer Faktor $tt - 2t\cos\omega + 1$ im Fall, in dem $\omega = 0$ ist, kein Quadrat $(t-1)^2$, sondern nur den einfachen Faktor $t - 1$ bedeutet, was auch passiert, wenn $\omega = \pi$ ist; dann ist auch nicht der quadratische Faktor

$(t+1)^2$, sondern nur der einfache $t+1$ zu nehmen; daher, weil diese Fälle unter den Werten von ω auftreten, ist es notwendig, dass die Anzahl dieser Faktoren um die Einheit vermehrt wird. Hier trägt es sich gefälligerweise zu, dass die diese aus den Werten $\omega = 0$ und $\omega = \pi$ zu entspringenden Fälle aus der Betrachtung gestrichen werden.

§12 Weil also unser Bruch $\frac{t^m - t^{-m}}{t^n - t^{-n}}$ in lediglich einfache Brüche aufgelöst werden muss, deren Nenner $t^1 - 2\cos\omega + t^{-1}$ sind, wollen wir für irgendeinen von diesen Brüchen

$$\frac{t^m - t^{-m}}{t^n - t^{-n}} = \frac{\Delta}{t - 2\cos\omega + t^{-1}} + R$$

festlegen, wo R alle übrigen Brüche umfasst, und nun wollen wir auf beiden Seiten mit $t - 2\cos\omega + t^{-1}$ multiplizieren, dass

$$\frac{(t^m - t^{-m})(t - 2\cos\omega + t^{-1})}{t^n - t^{-n}} = \Delta + R(t - 2\cos\omega + t^{-1})$$

hervorgeht; daher, wenn wir nun $t - 2\cos\omega + t^{-1} = 0$ setzen, was durch Setzen von

$$t = \cos\omega + \sqrt{-1} \cdot \sin\omega$$

geschieht, wird daraus der Zähler unseres Bruchs als

$$\Delta = (t^m - t^{-m})\frac{t - 2\cos\omega + t^{-1}}{t^n - t^{-n}}$$

berechnet. Dann ist es aber offenkundig, dass in diesem Bruch, zu welchem wir geführt worden sind, in diesem Fall so der Zähler wie der Nenner verschwindet, woher wir gemäß der allbekannten Regel an deren Stelle ihre Differentiale schreiben wollen, und dieser Bruch wird diese Form $\frac{t^1 - t^{-1}}{n(t^n + t^{-n})}$ annehmen, wo offensichtlich $t^1 - t^{-1} = 2\sqrt{-1} \cdot \sin\omega$, aber $t^n + t^{-n} = 2\cos n\omega$ sein wird, sodass nun der Wert dieses Bruches $\frac{\sqrt{-1} \cdot \sin\omega}{n\cos n\omega}$ sein wird, welcher mit $t^m - t^{-m} = 2\sqrt{-1} \cdot \sin m\omega$ multipliziert unseren gesuchten Zähler

$$\Delta = -\frac{2\sin\omega\sin m\omega}{n\cos n\omega}$$

geben wird. Weil aber $\sin n\omega = 0$ ist, wird immer entweder $\cos n\omega = 1$ oder $\cos n\omega = -1$ sein, je nachdem ob, wenn man im Allgemeinen $\omega = \frac{i\pi}{n}$ setzt, die Zahl i gerade oder ungerade war.

§13 Nachdem also dieser Bruch

$$-\frac{2\sin\omega\sin m\omega}{n\cos n\omega}\cdot\frac{1}{t-2\cos\omega+t^{-1}}$$

gefunden wurde, multipliziere man ihn mit $\frac{\partial t}{t}$ und integriere und so gelangen wir zu dieser Integralformel

$$-\frac{2\sin\omega\sin m\omega}{n\cos n\omega}\int\frac{\partial t}{t}\cdot\frac{1}{t-2\cos\omega+t^{-1}},$$

deren Integration keine weitere Schwierigkeit bereitet; denn sie würde zu einem Kreisbogen führen, dessen Tangens $=\frac{t\sin\omega}{1-t\cos\omega}$ ist; aber weil die Größe t nun imaginär ist, gewinnen wir daraus wenig, weil es ja notwendig wäre, diesen imaginären Bogen auf reelle Bogen zurückzuführen, weil ja bekannt ist, dass imaginäre Bogen auf reelle Logarithmen zurückgeführt werden.

§14 Um diese Arbeit also vermeiden, wollen wir anstelle unserer Variable t den Winkel φ wieder in die Rechnung zurückbringen, und weil wir ja schon gesehen haben, dass $\frac{\partial t}{t}=\partial\varphi\sqrt{-1}$, dann aber $t+u=2\cos\varphi$ ist, wird die zu integrierende Formel nach Einsetzen dieser Werte

$$-\frac{\sin\omega\sin m\omega}{n\cos n\omega}\cdot\frac{\partial\varphi\sqrt{-1}}{\cos\varphi-\cos\omega}$$

sein, welche Formel durch $\sqrt{-1}$ geteilt einen Anteil des gesuchten Integrals S liefert, sodass das S das Aggregat all dieser Formeln ist

$$-\frac{\sin\omega\sin m\omega}{n\cos n\omega}\int\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi-\cos\omega},$$

wenn wir dem Winkel ω freilich nacheinander all seine Werte zuteilten; hier ist es per se offensichtlich, dass in dieser Integration der Winkel ω konstant und allein φ variabel ist.

§15 Aus dem Koeffizienten dieser Formel ist sofort klar, was wir schon oben angedeutet haben, dass aus dem ersten und letzten Wert von ω, natürlich $\omega=0$ und $\omega=\pi$, die Teile des Integrale von selbst aus der Betrachtung gestrichen werden, sodass es nun genügt, anstelle von ω nacheinander diese Werte $\frac{\pi}{n}$, $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{3\pi}{n}$, $\cdots$ $\frac{(n-1)\pi}{n}$ eingesetzt werden. Hier ist zu bemerken, während $\omega=\frac{i\pi}{n}$ ist, sooft i eine gerade Zahl war, dass $\cos n\omega=+1$ sein wird; wenn aber i eine ungerade Zahl ist, dass $\cos n\omega = -1$ sein wird. Nachdem dies angemerkt worden ist, ist die ganze Aufgabe auf die Integration dieser ziemlich bemerkenswerten Formel $\int \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi - \cos\omega}$ zurückgeführt worden.

§16 Es wäre freilich leicht, diese Formel auf gewohnte reelle Größen zurückzuführen; indes kann dennoch auf die folgende Weise diese Integration leichter und eleganter durchgeführt werden. Wir wollen nämlich der Kürze wegen $\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi - \cos\omega} = \partial s$ setzen und gemäß des nun hinreichend üblichen Winkelkalküls wissen wir, dass

$$\cos\varphi - \cos\omega = 2\sin\frac{\omega+\varphi}{2}\sin\frac{\omega-\varphi}{2}$$

ist, und so werden wir

$$\partial s = \frac{\partial\varphi}{2\sin\frac{\omega+\varphi}{2}\sin\frac{\omega-\varphi}{2}}$$

oder

$$\frac{2\partial s}{\partial\varphi} = \frac{1}{\sin\frac{\omega+\varphi}{2}\sin\frac{\omega-\varphi}{2}}$$

haben, welcher Bruch, weil der Nenner aus zwei Faktoren besteht, gefällig in zwei Brüche von dieser Art aufgelöst werden

$$\frac{\alpha\cos\frac{\omega+\varphi}{2}}{\sin\frac{\omega+\varphi}{2}} + \frac{\beta\cos\frac{\omega-\varphi}{2}}{\sin\frac{\omega-\varphi}{2}}$$

kann, wo freilich sofort klar ist, dass $\beta = \alpha$ genommen werden muss, denn dann geht die Summe dieser Brüche als

$$\frac{\alpha\sin\omega}{\sin\frac{\omega+\varphi}{2}\sin\frac{\omega-\varphi}{2}}$$

hervor, woher

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\sin\omega}$$

ist. Daher wird aber

$$\partial s = \frac{1}{2\sin\omega}\left(\frac{\partial\varphi\cos\frac{\omega+\varphi}{2}}{\sin\frac{\omega+\varphi}{2}} + \frac{\partial\varphi\cos\frac{\omega-\varphi}{2}}{\sin\frac{\omega-\varphi}{2}}\right)$$

sein, in welchen Formeln der Zähler natürlich das Differential des Nenners ist, woher wir erschließen, dass

$$s = \frac{1}{\sin \omega} \log \frac{\sin \frac{\omega + \varphi}{2}}{\sin \frac{\omega - \varphi}{2}}$$

sein wird.

§17 Nachdem nun dieses Integral gefunden worden ist, worin das Herzstück dieser ganzen Untersuchung besteht, gibt jeder Faktor des Nenners mit dem gesuchten Integralwert S multipliziert diesen Teil

$$-\frac{\sin m\omega}{n \cos n\omega} \log \frac{\sin \frac{\omega + \varphi}{2}}{\sin \frac{\omega - \varphi}{2}}$$

an die Hand, wo es nur nötig ist, dass anstelle des Winkels ω nacheinander all seine entsprechenden Werte eingesetzt werden; denn dann wird das Aggregat all dieser Formeln den wahren Wert des Integrals

$$S = \int \frac{\partial\varphi \sin m\varphi}{\sin n\varphi}$$

liefern.

§18 Um aber das Integral kürzer darstellen zu können, wollen wir der Kürze wegen $\frac{\pi}{n} = 2\alpha$ setzen, sodass die Werte von ω also 2α, 4α, 6α, $\cdots$ $2(n-1)\alpha$ sein werden; aber dann sei $\varphi = 2\psi$ und der vollständige Wert des Integralformel

$$\int \frac{2\partial\psi \sin 2m\psi}{\sin 2n\psi}$$

wird sein:

$$\begin{aligned} S = \; & \frac{\sin 2m\alpha}{n} \log \frac{\sin(\alpha+\psi)}{\sin(\alpha-\psi)} - \frac{\sin 4m\alpha}{n} \log \frac{\sin(2\alpha+\psi)}{\sin(2\alpha-\psi)} \\ + \; & \frac{\sin 6m\alpha}{n} \log \frac{\sin(3\alpha+\psi)}{\sin(3\alpha-\psi)} - \frac{\sin 8m\alpha}{n} \log \frac{\sin(4\alpha+\psi)}{\sin(4\alpha-\psi)} \\ + \; & \frac{\sin 10m\alpha}{n} \log \frac{\sin(5\alpha+\psi)}{\sin(5\alpha-\psi)} - \frac{\sin 12m\alpha}{n} \log \frac{\sin(6\alpha+\psi)}{\sin(6\alpha-\psi)} \\ & \qquad \text{etc.,} \end{aligned}$$

bis die Anzahl dieser Terme $n-1$ ist. Aber diese Formel gilt nur, wenn $m < n$ ist; wenn $m > n$ war, haben wir schon zuvor gezeigt, Terme von welcher Art darüber hinaus hinzugefügt werden müssen.

§19 Hier ist zu bemerken, dass diese Integrale so genommen worden sind, dass sie für $\varphi = 0$ gesetzt verschwinden, weil ja in diesem Fall alle Logarithmen auf die Einheit zurückgeführt werden. Weiter ist es auch ersichtlich, wenn der Winkel ψ bis hin zu α vermehrt wird, dass dann das Integral bis ins Unendliche wächst; daher ist klar, dass dieser Winkel nicht über diese Grenze hinaus vermehrt werden sollte. Aber auch der anfangs erwähnte Fall, welcher zu dieser Integralformel führt, erfordert nicht, dass dieser Winkel über diese Grenze hinaus vermehrt wird, weswegen es der Mühe Wert sein wird, die gefundene Integration auf diesen Fall anzuwenden.

PROBLEM

Den Wert dieser Integralformel

$$\int \frac{\partial x}{x \log x} \cdot \frac{x^p - x^{-p}}{x^n + 2\cos\theta + x^{-n}}$$

von der Grenze $x = 0$ bis hin zu $x = 1$ erstreckt mit einem endlichen Ausdruck anzugeben.

LÖSUNG

§20 Weil ich diesen gesuchten Wert ja auf diese Integralformel zurückgeführt habe

$$\frac{\pi}{n\sin\theta}\int\frac{\partial p\sin\frac{\theta p}{n}}{\sin\frac{\pi p}{n}},$$

ist zuerst festzuhalten, dass er nur endlich ausgedrückt werden kann, wenn der Winkel θ zu π ein rationales Verhältnis hat. Wir wollen also festlegen, dass dieses Verhältnis $\theta : \pi = \mu : \nu$ ist, sodass μ und ν ganze Zahlen sind, weswegen wir für die zuvor behandelte $m = \mu$ und $n = \nu$ setzen wollen, woher der Winkel $\varphi\varphi = \frac{\pi p}{n}$ sein wird. Wir wollen hier der Kürze wegen $\frac{p}{n} = r$ setzen, dass wir $\varphi = \frac{\pi r}{\nu}$ haben, und der Wert, den wir suchen, wird wegen $p = nr$

$$\frac{\pi}{\sin\theta}\int\frac{\partial r\sin\theta r}{\sin\pi r}$$

sein; daher, weil daraus $\varphi = \frac{\pi r}{\nu}$ wird, wird die oben behandelte Formel $\int\frac{\partial\varphi\sin m\varphi}{\sin n\varphi}$ in diese übergehen

$$S = \frac{\pi}{\nu}\int\frac{\partial r\sin\frac{\mu\pi r}{\nu}}{\sin\pi r}$$

und so wird der Wert, den wir hier suchen, $\frac{\nu S}{\sin\theta}$ sein, sodass es nur nötig ist, den Wert von S für diesen Fall zu entwickeln.

§21 Wir wollen nun den ersten Wert von ω betrachten, welcher $\omega = \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{\nu}$ war, der für S diesen Integralanteil ergibt

$$-\frac{\sin m\omega}{n\cos n\omega}\log\frac{\sin\frac{\omega+\varphi}{2}}{\sin\frac{\omega-\varphi}{2}};$$

hier wird $m\omega = \frac{\mu\pi}{\nu} = \theta$ und $\cos n\omega = -1$ sein; dann aber

$$\omega+\varphi = \frac{\pi}{\nu}(1+r) \quad \text{und} \quad \omega-\varphi = \frac{\pi}{\nu}(1-r).$$

Zuerst muss hier also der Winkel $\frac{\pi}{2\nu}$ genommen werden, welchen wir der Kürze wegen $= \rho$ setzen wollen, dass $\rho = \frac{\pi}{2\nu}$ ist, und der erste Teil unserer Formel S wird

$$\frac{\sin\theta}{\nu}\log\frac{\sin\rho(1+r)}{\sin\rho(1-r)}$$

sein, die folgenden Anteile werden aber

$$-\frac{\sin 2\theta}{\nu}\log\frac{\sin\rho(2+r)}{\sin\rho(2-r)}+\frac{\sin 3\theta}{\nu}\log\frac{\sin\rho(3+r)}{\sin\rho(3-r)}-\text{etc.}$$

sein, welche Teile mit $\frac{\nu}{\sin\theta}$ multipliziert den Wert liefern, welchen unser Problem verlangt, welcher also

$$\begin{aligned}&\frac{\sin\theta}{\sin\theta}\log\frac{\sin\rho(1+r)}{\sin\rho(1-r)}-\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}\log\frac{\sin\rho(2+r)}{\sin\rho(2-r)}\\ +&\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}\log\frac{\sin\rho(3+r)}{\sin\rho(3-r)}-\frac{\sin 4\theta}{\sin\theta}\log\frac{\sin\rho(4+r)}{\sin\rho(4-r)}\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

sein wird; diese Terme müssen bis dorthin fortgesetzt werden, bis deren Anzahl $\nu-1$ wird, wo für unser Problem nur angemerkt sei, dass $r=\frac{p}{n}$ und $\rho=\frac{\pi}{2\nu}$ ist, wobei $\theta:\pi=\mu:\nu$ oder $\theta=\frac{\mu\pi}{\nu}$ gilt, sodass μ eine ganze Zahl ist. Weil also in der vorgelegten Formel der Exponent p notwendig kleiner als n ist, wird r kleiner als die Einheit sein und daher all diese Formeln endlich.

§22 Also ist die allgemeine Form aller Anteile, aus denen dieses Integral besteht,

$$\pm\frac{\sin i\theta}{\sin\theta}\log\frac{\sin\rho(i+r)}{\sin\rho(i-r)}$$

wo das obere Zeichen $+$ gilt, sooft i eine ungerade Zahl war, das untere $-$ hingegen, wenn eine gerade. Für den letzten dieser Anteile wird also $i=\nu-1$ sein. Hier sei sorgfältig bemerkt, wenn wir $i=\nu$ nehmen würden, dass der daraus resultierende Teil von selbst verschwinden würde, weil $i\rho=\nu\rho=\frac{\pi}{2}$ ist und daher die beiden Sinus in den Logarithmen einander gleich sind, sodass es unwesentlich ist, ob die Anzahl der Terme $=\nu-1$ oder $=\nu$ gesetzt wird.

§23 Wir wollen nun den letzten Term unseres Integralwerts betrachten und $i=\nu-1$ setzen, woher $\sin(\nu-1)\theta=\sin(\mu\pi-\theta)$ werden wird, welcher $=\sin\theta$ sein wird, wenn μ eine ungerade Zahl war; wenn aber μ eine gerade Zahl war, wird er $=-\sin\theta$ sein. Dann wird aber

$$i\rho=(\nu-1)\rho=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\nu}$$

und daher

$$\sin\rho(\nu-1+r)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\rho(1-r)\right)=\cos\rho(1-r)$$

sein. In gleicher Weise wird für den Nenner

$$\sin\rho(i-r)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\rho(1+r)\right)=\cos\rho(1+r)$$

sein, sodass im letzten Term die Kosinus derselben Winkel auftreten, deren Sinus im erstem Term auftauchen, welche Vertauschung auch im vorletzten und zweiten Term gefunden wird, dann aber auch im vorvorletzten und dritten, woher je zwei Terme von dieser Art zu einem zusammengefasst werden können.

§24 Hier ist es aber ratsame vier Fälle zu untersuchen, je nachdem ob die beiden Zahlen μ und ν gerade oder ungerade waren.

Es seien also zuerst beide gerade, woher die Koeffizienten des letzten Glieds $\frac{\sin(\mu\pi-\theta)}{\sin\theta}=-\frac{\sin\theta}{\sin\theta}$ und daher das ganze letzte Glied $=-\frac{\sin\theta}{\sin\theta}\log\frac{\cos\rho(1-r)}{\cos\rho(1+r)}$ sein wird, woher das erste Glied zusammen mit dem letzten

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta}\log\frac{\sin\rho(1+r)}{\sin\rho(1-r)}\cdot\frac{\cos\rho(1+r)}{\cos\rho(1-r)}=\frac{\sin\theta}{\sin\theta}\log\frac{\sin 2\rho(1+r)}{\sin 2\rho(1-r)}$$

geben wird. In gleicher Weise werden das zweite und vorletzte Glied zu

$$-\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}\log\frac{\sin 2\rho(2+r)}{\sin 2\rho(2-r)}$$

verschmelzen; dann aber wird das dritte mit dem vorvorletzten

$$\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}\log\frac{\sin 2\rho(3+r)}{\sin 2\rho(3-r)}$$

geben. Und so für die übrigen, sodass auf diese Weise die Anzahl der Glieder auf die Hälfte reduziert wird.

§25 Es bleibe nun ν eine gerade Zahl, μ sei hingegen eine ungerade Zahl und der Koeffizient des letzten Terms wird $\frac{\sin\theta}{\sin\theta}$ sein, welcher also mit dem ersten zusammen

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta}\log\frac{\sin\rho(1+r)}{\sin\rho(1-r)}\cdot\frac{\cos\rho(1-r)}{\cos\rho(1+r)}=\frac{\sin\theta}{\sin\theta}\log\frac{\tan\rho(1+r)}{\tan\rho(1-r)}$$

geben wird. Auf dieselbe Weise wird der zweite Term mit dem vorletzten zu dieser Form zusammengezogen werden

$$-\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}\log\frac{\tan\rho(2+r)}{\tan\rho(2-r)};$$

aber der dritte Term wird zusammen mit dem vorvorletzten

$$\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}\log\frac{\tan\rho(3+r)}{\tan\rho(3-r)}$$

geben.

§26 Nun sei ν eine ungerade Zahl, aber μ eine gerade Zahl und wegen der ersten Bedingung wird der Koeffizient des letzten Term $-\frac{\sin(\mu\pi-\theta)}{\sin\theta}$ sein, welcher wegen der geraden Zahl $\frac{\sin\theta}{\sin\theta}$ und daher wir im zweiten Fall sein wird, woher aus das erste und das letzte Glied zusammen

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta}\log\frac{\tan\rho(1+r)}{\tan\rho(1-r)}$$

geben wird; das zweite zusammen mit dem vorletzten hingegen

$$-\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}\log\frac{\tan\rho(2+r)}{\tan\rho(2-r)};$$

dann aber gibt auch das dritte zusammen mit dem vorvorletzten

$$\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}\log\frac{\tan\rho(3+r)}{\tan\rho(3-r)}.$$

§27 Es seien schließlich die beiden Zahlen μ und ν ungerade und es ist ersichtlich, dass der Fall auf den ersten reduziert wird und das erste und letzte Glied zu

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta}\log\frac{\sin 2\rho(1+r)}{\sin 2\rho(1-r)}$$

zusammengezogen werden, das zweite und das vorletzte zu

$$-\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}\log\frac{\sin 2\rho(2+r)}{\sin 2\rho(2-r)},$$

das dritte und das vorvorletzte zu

$$\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}\log\frac{\sin 2\rho(3+r)}{\sin 2\rho(3-r)}.$$

Daher ist klar, dass diese vier Fälle auf zwei reduziert werden können, je nachdem ob die beiden Zahlen μ und ν entweder von derselben Gestalt waren, natürlich beide gerade oder ungerade, oder von verschiedener Gestalt, die eine gerade, die andere ungerade. Im ersten Fall wird dieselbe Kontraktion Geltung haben, welche wir im ersten Fall angegeben haben, im zweiten hingegen die, die wir für den zweiten Fall gegeben haben.

§28 Aus diesen Ausführungen wird eingesehen, wenn die Zahl ν ungerade war und daher die Anzahl der zuerst gefundenen Terme $\nu-1$ gerade, dass dann all jene Terme zu einer halb so kleinen Anzahl zusammengefasst werden, natürlich $\frac{\nu-1}{2}$. Aber wenn ν eine gerade Zahl war, wird wegen des ungeraden $\nu-1$ nach jener Zusammenfassung nur ein einziger Mittelterm, der dem Wert $i=\frac{\nu}{2}$ zukommt, zurückbleiben, für welchen dieser Logarithmus gefunden werden wird

$$\log\frac{\sin\rho\left(\frac{\nu}{2}+r\right)}{\sin\rho\left(\frac{\nu}{2}-r\right)}=\log\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\rho r\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\rho r\right)}.$$

Weil $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\rho r\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\rho r\right)$ ist, ist es deshalb ersichtlich, dass man in diesem Fall

$$\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\rho r\right)$$

hat; aber der Koeffizient wird

$$\pm\frac{\sin\frac{\nu}{2}\theta}{\sin\theta}$$

sein, wo das obere Vorzeichen gelten wird, wenn $\frac{\nu}{2}$ ungerade war, das untere hingegen, wenn gerade. Es ist aber $\sin\frac{\nu}{2}\theta=\sin\frac{\mu\pi}{2}$, woher klar ist, wenn μ eine gerade Zahl war, dass dieser Term völlig aus der Betrachtung herausgeworfen wird; wenn aber μ eine ungerade Zahl war, dann wird $\sin\frac{\mu\pi}{2}$ entweder $+1$

oder -1 sein. Dies Zweideutigkeit ist schon zuvor aufgelöst worden.

Nachdem diese Dinge bemerkt worden sind, wollen wir die folgenden einfacheren Beispiele durchgehen; hier wird es förderlich sein bemerkt zu haben, dass die Zahl μ immer kleiner sein muss als ν und dennoch nicht $\mu = 0$ genommen werden kann.

§29 Um aber die Entwicklung der Spezialfälle zu vereinfachen, bezeichne Σ jene Integralformel, deren Wert wir bisher stückweise entwickelt haben, sodass

$$\Sigma = \frac{\pi}{\sin\theta}\int \frac{\partial r \sin\theta r}{\sin\pi r}$$

ist; dann wird es also gefällig sein zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem ob die beiden Zahlen μ und ν von derselben oder verschiedener Gestalt waren.

I. μ und ν seien von derselben Gestalt und es wird

$$\begin{aligned}\Sigma = {} & \frac{\sin\theta}{\sin\theta}\log\frac{\sin 2\rho(1+r)}{\sin 2\rho(1-r)} - \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}\log\frac{\sin 2\rho(2+r)}{\sin 2\rho(2-r)} \\ & + \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}\log\frac{\sin 2\rho(3+r)}{\sin 2\rho(3-r)} - \frac{\sin 4\theta}{\sin\theta}\log\frac{\sin 2\rho(4+r)}{\sin 2\rho(4-r)} \\ & \text{etc.}\end{aligned}$$

sein, welche Formeln nicht über die Menge von $\frac{\nu-1}{2}$ fortgesetzt werden dürfen; hier tritt nämlich der Mittelterm nicht auf; wenn nämlich ν eine gerade Zahl war, wird auch μ gerade sein und daher verschwindet der mittlere Koeffizient.

II. Es seien μ und ν von verschiedener Gestalt und wir haben gesehen, dass

$$\begin{aligned}\Sigma = {} & \frac{\sin\theta}{\sin\theta}\log\frac{\tan\rho(1+r)}{\tan\rho(1-r)} - \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}\log\frac{\tan\rho(2+r)}{\tan\rho(2-r)} \\ & + \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}\log\frac{\tan\rho(3+r)}{\tan\rho(3-r)} - \frac{\sin 4\theta}{\sin\theta}\log\frac{\tan\rho(4+r)}{\tan\rho(4-r)} \\ & \text{etc.}\end{aligned}$$

sein wird, welche Terme nicht über die Menge von $\frac{\nu-1}{2}$ hinaus fortgesetzt werden dürfen. Aber hier, sooft ν eine gerade und daher μ eine ungerade Zahl war, wird ein Mittelterm auftreten, der nun einen Platz einnehmen und

$$\pm\frac{1}{\sin\theta}\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\rho r\right)$$

sein wird, wo die Mehrdeutigkeit der Vorzeichen dem Wechsel der Vorzeichen folgt. Überdies ist hier überall zu bemerken, dass $\rho=\frac{\pi}{2\nu}$ und $\theta=\frac{\mu\pi}{\nu}$ ist.

Beispiel 1 für $\nu = 2$

§30 Hier wird also $\rho=\frac{\pi}{4}=45^\circ$ sein, aber die Zahl μ ist notwendigerweise $=1$. Weil also $\frac{\nu-1}{2}=\frac{1}{2}$ ist, tritt hier allein der Term auf, den wir als mittleren bezeichnet haben, sodass wir nun

$$\Sigma=\log\tan\frac{\pi}{4}(1+r)=\log\tan 45^\circ(1+r)$$

haben, welcher Wert von selbst aus der allgemeinen Formel abgeleitet wird, weil

$$\Sigma=\pi\int\frac{\partial r\sin\frac{\pi r}{2}}{\sin\pi r}$$

ist; es ist aber $\sin\pi r=2\sin\frac{\pi r}{2}\cos\frac{\pi r}{2}$, woher

$$\Sigma=\frac{\pi}{2}\int\frac{\partial r}{\cos\frac{\pi r}{2}}$$

wird. Wenn wir nun $\frac{\pi r}{2}=\varphi$ setzen, wird wegen $\frac{\pi\partial r}{2}=\partial\varphi$

$$\Sigma=\int\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi}=\log\tan\left(45^\circ+\frac{1}{2}\varphi\right)$$

sein. Nachdem also für φ wieder der angenommene Wert eingesetzt wird, wird $\Sigma=\log\tan 45^\circ(1+r)$ sein, wie wir zuvor gefunden haben.

Beispiel 2 für $\nu = 3$

Hier wird also $\rho=\frac{\pi}{6}=30^\circ$ sein, und weil $\frac{\nu-1}{2}=1$ ist, wird unser Integral aus einem einzigen Term bestehen. Nun kann aber die Zahl μ zwei Werte haben, 1 und 2. Es sei zuerst $\mu=1$ und daher $\theta=\frac{\pi}{3}=60^\circ$, und weil die beiden Zahlen ungerade sind, berechnen wir aus dem ersten Fall

$$\Sigma = \log \frac{\sin 60^\circ (1+r)}{\sin 60^\circ (1-r)}.$$

Aber wenn $\mu = 2$ und daher $\theta = 120^\circ$ war, weil die Zahlen μ und ν ungleiche Gestalt haben, werden wir aus dem zweiten Fall

$$\Sigma = \log \frac{\tan 30^\circ (1+r)}{\tan 30^\circ (1-r)}$$

haben.

Beispiel 3 für $\nu = 4$

§32 Hier wird also $\rho = \frac{\pi}{8} = 22\frac{1}{2}^\circ$ sein, und weil $\frac{\nu-1}{2} = 1\frac{1}{2}$ ist, wird das Integral aus nur einem einzigen ganzen Term bestehen, wenn nicht zufällig ein Mittelterm hinzukommt, wie wir in den einzelnen für μ angenommenen Fällen sehen werden.

1) Es sei also $\mu = 1$; es wird $\theta = 45^\circ$ und $2\theta = 90^\circ$ sein. Daher werden wir also wegen der ungleichen Zahlen μ und ν aus dem zweiten Fall

$$\Sigma = \log \frac{\tan 22\frac{1}{2}^\circ (1+r)}{\tan 22\frac{1}{2}^\circ (1-r)} - 2 \cdot \log 22\tfrac{1}{2}^\circ (2+r)$$

haben.

2) Sei sei $\mu = 2$ und $\theta = 90^\circ$ und $2\theta = 180^\circ$ sein. Daher erhalten wir aus dem ersten Fall

$$\Sigma = \log \frac{\sin 45^\circ (1+r)}{\sin 45^\circ (1-r)}.$$

Weil aber $\sin 45^\circ (1-r) = \cos 45^\circ (1+r)$ ist, ist es ersichtlich, dass

$$\Sigma = \log \tan 45^\circ (1+r)$$

sein wird, weil der Fall natürlich dem Fall $\mu = \nu = 1 : 2$ entspricht.

3) Aber wenn $\mu = 3$ und daher $\theta = 135^\circ$ und $2\theta = 270^\circ$ ist, der Sinus welches Winkels -1 ist, werden wir wegen der verschiedenen Gestalten aus dem zweiten Fall

$$\Sigma = \log \frac{\tan 22\frac{1}{2}^\circ (1+r)}{\tan 22\frac{1}{2}^\circ (1-r)} + \sqrt{2} \cdot \log \tan 22\tfrac{1}{2}^\circ (2+r)$$

haben.

BEISPIEL 4 FÜR $\nu = 5$

§33 Hier wird also $\rho = 18^\circ$ sein, und weil $\frac{\nu-1}{2} = 2$ ist, werden die Integrale aus zwei ganzen Termen bestehen, weil der Mittelterm, welchen wir quasi als einen halben betrachten, hier nicht auftritt.

1) Es sei $\mu = 1$ und es wird $\theta = 36^\circ$ und $2\theta = 72^\circ$ sein; daher gibt uns der erste Fall wegen derselben Gestalt

$$\Sigma = \log \frac{\sin 36^\circ (1+r)}{\sin 36^\circ (1-r)} - \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} \log \frac{\sin 36^\circ (2+r)}{\sin 36^\circ (2-r)}.$$

2) Sei sei $\mu = 2$ und es wird $\theta = 72^\circ$ und daher $\sin 2\theta = \sin 36^\circ$ sein; daher gibt uns der zweite Fall wegen der verschiedenen Gestalten

$$\Sigma = \log \frac{\tan 18^\circ (1+r)}{\tan 18^\circ (1-r)} - \frac{\sin 36^\circ}{\sin 72^\circ} \log \frac{\tan 18^\circ (2+r)}{\tan 18^\circ (2-r)}.$$

3) Es sei $\mu = 3$ und daher $\theta = 108^\circ$ oder $\sin\theta = \sin 72^\circ$ und $\sin 2\theta = -\sin 36^\circ$; daher gibt der wegen der gleichen Gestalt der erste Fall

$$\Sigma = \log \frac{\sin 36^\circ (1+r)}{\sin 36^\circ (1-r)} + \frac{\sin 36^\circ}{\sin 72^\circ} \log \frac{\sin 36^\circ (2+r)}{\sin 36^\circ (2-r)}.$$

4) Es sei schließlich $\mu = 4$ und $\theta = 144^\circ$ und daher $\sin\theta = \sin 36^\circ$ und $\sin 2\theta = -\sin 72^\circ$; daher liefert wegen der ungleichen Gestalten der zweite Fall

$$\Sigma = \log \frac{\tan 18^\circ (1+r)}{\tan 18^\circ (1-r)} + \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} \log \frac{\tan 18^\circ (2+r)}{\tan 18^\circ (2-r)}.$$

Beispiel 5 für $\nu = 6$

Hier ist also $\rho = \frac{\pi}{12} = 15^\circ$, und weil $\frac{\nu-1}{2} = \frac{5}{2}$ ist, werden die Integrale aus zwei ganzen Termen bestehen, zu denen ein Mittelterm oder ein halber Term hinzutreten kann, wannimmer natürlich μ eine gerade Zahl ist.

1) Sei sei $\mu = 1$; es wird $\theta = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$ sein, daher $\sin\theta = \frac{1}{2}$, $\sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\sin 3\theta = 1$; daher wird uns wegen der verschiedenen Naturelle der zweite Fall

$$\Sigma = \log\frac{\tan 15^\circ(1+r)}{\tan 15^\circ(1-r)} - \sqrt{3}\cdot\log\frac{\tan 15^\circ(2+r)}{\tan 15^\circ(2-r)} + 2\log\tan 15^\circ(3+r)$$

an die Hand geben.

2) Es sei $\mu = 2$ und daher $\theta = 60^\circ$, woher $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\sin 3\theta = 0$ wird; daher berechnen wir wegen der gleichen Naturelle aus dem ersten Fall

$$\Sigma = \log\frac{\sin 30^\circ(1+r)}{\sin 30^\circ(1-r)} - \log\frac{\sin 30^\circ(2+r)}{\sin 30^\circ(2-r)},$$

welcher Ausdruck als dem vollkommen gleich hervorgeht, den wir oben für den Fall $\nu = 3$ und $\mu = 1$ gefunden haben.

3) Es sei $\mu = 3$ und daher $\theta = 90^\circ$, daher $\sin\theta = 1$, $\sin 2\theta = 0$ und $\sin 3\theta = -1$; daher liefert uns wegen der verschiedenen Naturelle der zweite Fall

$$\Sigma = \log\frac{\tan 15^\circ(1+r)}{\tan 15^\circ(1-r)} + * - \log\tan 15^\circ(3+r)$$

oder

$$\Sigma = \log\frac{\tan 15^\circ(1+r)}{\tan 15^\circ(1-r)\tan 15^\circ(3+r)},$$

welcher Ausdruck dem gleich sein muss, der im ersten Beispiel hervorging, weil in jedem der beiden Fälle $\mu : \nu = 1 : 2$ ist.

4) Es sei $\mu = 4$ und daher $\theta = 120°$, daher $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 2\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 3\theta = 0$; daher liefert wegen der gleichen Naturelle der erste Fall

$$\Sigma = \log\frac{\sin 30°(1+r)}{\sin 30°(1-r)} + \log\frac{\sin 30°(2+r)}{\sin 30°(2-r)},$$

welcher mit dem oberen für den Fall übereinstimmen muss, in welchem $\mu : \nu = 2 : 3$ ist.

5) Es sei $\mu = 5$ und daher $150°$, also $\sin\theta = \frac{1}{2}$, $\sin 2\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 3\theta = 1$; daher gibt uns wegen der verschiedenen Naturelle der zweite Fall

$$\Sigma = \log\frac{\tan 15°(1+r)}{\tan 15°(1-r)} + \sqrt{3}\cdot\log\frac{\tan 15°(2+r)}{\tan 15°(2-r)} + 2\log\tan 15°(3+r).$$

Beispiel 6 für $\nu = \infty$

§35 Weil also der Bruch $\frac{\mu}{\nu}$ als verschwindend festgelegt wird, wollen wir $\mu = 1$ setzen und so wird der Winkel θr in Bezug auf πr verschwinden; daher, weil sich anstelle der Sinus der Winkel θ und θr die Winkel selbst setzen lassen, wird unser Wert

$$\Sigma = \pi\int\frac{r\partial r}{\sin\pi r}$$

sein. Weil weiter auch der Winkel $\rho = \frac{\pi}{2\nu}$ verschwindet, werden sich anstelle aller in für Σ gefundenen Ausdruck auftretenden Sinus die Winkel selbst schreiben lassen, nach Bemerken wovon der Wert der Größe Σ auf die folgende Weise ausgedrückt werden wird

$$\log\frac{1+r}{1-r} - 2\log\frac{2+r}{2-r} + 3\log\frac{3+r}{3-r} - 4\log\frac{4+r}{4-r} + \text{etc.}$$

§36 Diese einzelnen Logarithmen können in gefälliger Weise in Reihen aufgelöst werden. Weil nämlich die allgemeine Form aller Terme $i\log\frac{i+r}{i-r}$ ist, dann aber nach der bekannten Auflösung

$$\log\frac{i+r}{i-r} = \frac{2r}{i} + \frac{2r^3}{3i^3} + \frac{2r^5}{5i^5} + \frac{2r^7}{7i^7} + \text{etc.}$$

ist, wird der ganze Term

$$= 2r\left(1 + \frac{rr}{3ii} + \frac{r^4}{5i^4} + \frac{r^6}{7i^6} + \text{etc.}\right)$$

sein; deswegen wird nach Entwicklung aller Teile in dieser Weise

$$\begin{aligned}
\frac{\Sigma}{2r} = {} & +1 + \frac{rr}{3} + \frac{r^4}{5} + \frac{r^6}{7} + \frac{r^8}{9} + \text{etc.} \\
& -1 - \frac{rr}{3\cdot 4} - \frac{r^4}{5\cdot 4^2} - \frac{r^6}{7\cdot 4^3} - \frac{r^8}{9\cdot 4^4} - \text{etc.} \\
& +1 + \frac{rr}{3\cdot 9} + \frac{r^4}{5\cdot 9^2} + \frac{r^6}{7\cdot 9^3} + \frac{r^8}{9\cdot 9^4} + \text{etc.} \\
& -1 + \frac{rr}{3\cdot 16} + \frac{r^4}{5\cdot 16^2} + \frac{r^6}{7\cdot 16^3} + \frac{r^8}{9\cdot 16^4} + \text{etc.} \\
& \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

sein.

§37 Wenn wir diese Reihe nun nach Spalten ordnen, weil die erste Spalte

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.} = \frac{1}{2}$$

gibt, wird dieser Ausdruck hervorgehen

$$\begin{aligned}
\frac{\Sigma}{2r} = \frac{1}{2} & + \frac{1}{3}rr\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \text{etc.}\right) \\
& + \frac{1}{5}r^4\left(1 - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{16^2} + \frac{1}{25^2} - \text{etc.}\right) \\
& + \frac{1}{7}r^6\left(1 - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{16^3} + \frac{1}{25^3} - \text{etc.}\right) \\
& \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Weil ja also die Summen all dieser Reihen bekannt sind, wird daher mittels Approximation umso leichter der Wert des Buchstaben Σ bestimmt werden können, weil der Buchstabe r immer einen Bruch kleiner als die Einheit bedeutet.

§38 Wenn wir also das zur Hilfe nehmen, was ich einst über die Summe dieser Potenzen herausgefunden habe, und dieselben Bezeichnungen wie dort verwenden, indem wir festlegen:

$$\begin{aligned}
A\pi^2 &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.},\\
B\pi^4 &= 1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{25^2} + \text{etc.},\\
C\pi^6 &= 1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{25^3} + \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\text{etc.},$$

weil ja daraus leicht die Summen abgeleitet werden, wenn die Vorzeichen der Terme alternieren, wird man

$$\frac{\Sigma}{2r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\right)A\pi\pi rr + \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{8}\right)B\pi^4 r^4 + \frac{1}{7}\left(1 - \frac{1}{32}\right)C\pi^6 r^6 + \text{etc.}$$

haben. Hier sollte man sich erinnern, dass

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = \frac{1}{90}, \quad C = \frac{1}{945}, \quad D = \frac{1}{9450}, \quad E = \frac{1}{93555} \quad \text{etc.}$$

Aber die Natur dieser Werte ist schon öfter sehr umfassend dargestellt worden.