Über die Konstruktion von Gleichungen*

Leonhard Euler

§1 Sooft in der Auflösung von Problemen zu Differentialgleichungen gelangt wird, ist vor allem zu untersuchen, ob diese Gleichungen eine Integration zulassen; denn ein Problem ist als vollständigst gelöst anzusehen, welches zur Konstruktion einer algebraischen Gleichung geführt wird. Aber wenn die Gleichung, was auch sehr oft geschieht, in keiner Weise in eine algebraische Form überführt werden kann, dann müssen entweder Quadraturen oder Rektifikationen von Kurven, deren Konstruktion man gewahr ist, gebraucht werden. Um dies aber zu erreichen, ist es von Nöten, dass die die Lösung des Problems beinhaltende Gleichung eine Differentialgleichung von nur erstem Grade ist und außerdem eine Trennung der Variablen zulässt, wenn wir freilich die hinreichend bekannten Regeln gebrauchen wollen. Denn diese Regeln sind dieser Einschränkung unterworfen, dass mit deren Hilfe weder Differentialgleichungen höherer Grade noch Differentialgleichungen ersten Grades, deren Trennung nicht bekannt ist, konstruiert werden können. Dieser Sache wegen, sofern die Gleichung nicht auf eine Differentialgleichung ersten Grades reduziert werden und zugleich die Trennung der Variablen ausfindig gemacht werden kann, sucht man vergebens mit jenen Regeln die Konstruktion der Gleichung.

*Originaltitel: "De constructione aequationum", zuerst publiziert in: *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 9* (1744, geschrieben 1737): pp. 85 – 97 , Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 22, pp. 150 – 161, Eneström Nummer E70, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

§2 Ich habe aber auch anderenortes Beispiele einer eigenen sich um vieles weiter erstreckenden Methode angegeben, mit deren Hilfe ich nicht nur viele eine Trennung der Variablen nicht zulassende Differentialgleichungen konstruiert habe, sondern auch Differentialgleichungen zweiten Grades, die nicht einmal auf Differentialgleichungen ersten Grades zurückgeführt werden konnten. Anfänglich habe ich zwar die unendlichen Reihen, in welche ich die vorgelegten Gleichungen überführt hatte, gebraucht, und haben deren Summe auf Quadraturen zurückgeführt. Aber dann, diesen Weg als nicht hinreichend natürlich beurteilend, habe ich nach einer direkten Methode gesucht, mit welcher ich zu denselben Konstruktionen gelangen könnte. Bei dieser Aufgabe habe ich meine Mühe nicht vergebens aufgebracht; denn ich bin auf eine Methode gestoßen, modulare Gleichungen zu finden, mit deren Hilfe der Weg zu Konstruktionen schwierigster Gleichungen bereitet wird. Diese Methode habe ich freilich schon genauer dargestellt, aber ihren außerordentlichen Nutzen beim Konstruieren von Gleichungen habe ich zu jener Zeit nicht aufgezeigt. Dennoch habe ich neuerlichst ein Beispiel jener Gleichungen gegeben, die mithilfe der Konstruktion der Ellipse konstruiert werden können. Aber nun, damit der Gebrauch dieser Methode umfassender verstanden wird, möchte ich einige Spezialfälle durcharbeiten, aus welchen die Konstruktionen sehr vieler Gleichungen folgen. Ich entnehme dabei die Grundlagen aus der Dissertation über unendlich viele Kurven derselben Gattung, welche ich im vorherigen Jahr gelesen habe.

§3 Weil also die ganze Aufgabe auf das Finden von modularen Gleichungen zurückgeht, sei $z = \int Pdx$, und P eine beliebige aus x und a sowie weiteren Konstanten zusammengesetzte Funktion, in welcher Integration von Pdx freilich nur x wie eine Variable behandelt werde. Es wird aber gesucht, wenn das Integral $\int Pdx$, für neben x auch variabel angenommenes a, differenziert wird, welches Differential hervorgehen wird. Es muss also eine Differentialgleichung entweder ersten Grades, wenn es möglich ist, oder eines gewissen höheren Grades gefunden werden, in welcher a gleichermaßen als Variable enthalten sei wie x oder z. Eine Gleichung von dieser Art, welche ich nach Hermann modular nennen werde, wird die drei Variablen z, x und a beinhalten, welche aber in eine Gleichung von zwei Variablen übergehen wird, wenn entweder z oder x ein bestimmter oder von a abhängender Wert zugeteilt wird. Eine solche Gleichung wird also eine beliebige Form haben, und eine Differentialgleichung welchen Grades auch immer sie ist, sie wird immer mithilfe der Gleichung $z = \int Pdx$ konstruiert werden können. Denn wenn für einen beliebigen gegebenen Wert von a der Ausdruck $\int Pdx$ dargeboten wird, was vermöge Quadraturen geschehen kann, und man z oder x jenem angenommenen Wert gleich annimmt, wird die eine von z oder x durch a bestimmt werden, und daher wird ihre Größe bekannt. Deshalb wird für einen gegebenen Wert der einen unbekannten Größe die Größe des anderen angegeben werden können, worin die Konstruktion jedweder Gleichung selbst ja besteht.

§4 Aber die modulare Gleichung wird eine Differentialgleichung entweder ersten oder zweiten oder dritten oder eines höheren Grades sein, je nach Beschaffenheit der Funktion P. Um dies zu erkennen und die modulare Gleichung selbst zu finden, müssen die folgenden Größen aus P bestimmt werden. Zuerst differenziere man natürlich P für konstant gehaltenes x nach der Variable a, und dieses Differential geteilt durch da sei Q. Aber dann differenziere man in gleicher Weise Q für alleinige Variable a und teile dieses Differential durch da; was hervorgeht, setze man R. In gleicher Weise wird weiter durch Differenzieren von R und Teilen durch da die neue Größe S entspringen, und aus dieser weiter T, V etc. Also werden all diese Größen Q, R, S, T etc. aus der gegebenen Funktion P heraus bekannt sein. Nachdem diese gefunden worden sind und a wiederum als konstant festgelegt worden ist, wenn

$$\int Qdx = \alpha \int Pdx + K$$

war, wo α irgendwie durch a und Konstanten gegeben sein kann, bezeichnet K indes irgendeine aus a, x und konstanten zusammengesetzte Funktion; dann wird die modulare Gleichung eine Differentialgleichung ersten Grades sein, welche aus jener erhalten werden wird, wenn anstelle von $\int Pdx$ wieder z und $\frac{dz-Pdx}{da}$ anstelle von $\int Qdx$ eingesetzt wird. Also wird die modulare Gleichung diese sein

$$\frac{dz - Pdx}{da} = \alpha z + K.$$

Aber diese Größe K, weil sie um irgendeine Konstante vermehrt oder vermindert werden kann, ist so anzunehmen, dass sie für $x = 0$ gesetzt verschwindet; wenn das Integral von Pdx so angenommen werden muss, dass es für $x = 0$ gesetzt verschwindet; das ist im Folgenden immer zu bemerken. Anstelle von

K wird also immer $K - C$ geschrieben werden können, und C ist die Größe, welche hervorgeht, wenn in K $x = 0$ hervorgeht.

§5 Wenn $\int Qdx$ nicht von $\int Pdx$ abhängt, und daher eine Gleichung von dieser Form

$$\int Qdx = \alpha \int Pdx + K$$

nicht gefunden werden kann, ist zu sehen, ob

$$\int Rdx = \alpha \int Qdx + \beta \int Pdx + K$$

ist, wo wiederum α und β und Konstanten, K hingegen durch x, a und Konstanten gegeben festgelegt wird. Wenn eine Gleichung einer solcher Form geformt werden konnte, dann wird die modulare Gleichung eine Differentialgleichung zweiten Grades sein und durch diese Formeln gefunden werden

$$\int Pdx = z, \quad \int Qdx = \frac{dz - Pdx}{da},$$

$$\int Rdx = \frac{d\left(\frac{dz-Pdx}{da}\right) - Qdx}{da}.$$

Wenn wir in gleicher Weise zu Gleichungen voranschreiten, in welchen $\int Sdx$, $\int Tdx$ etc. enthalten sind, dann wird die modulare Gleichung eine Differentialgleichung von höheren Graden sein und selbige wird dann aus diesen und den folgenden Formeln gefunden werden, welche sind:

$$\int Sdx = \frac{d\left(\frac{d\left(\frac{dz-Pdx}{da}\right) - Qdx}{da}\right) - Rdx}{da}$$

und Tdx wird dem Differential dieser Gleichung um Sdx vermindert und durch da geteilt gleich. Und auf diese Weise ist weiter fortzuschreiten, wenn die modulare Gleichung zu Differentialen höherer Grade aufsteigt.

§6 Nachdem diese Dinge vorausgeschickt worden sind, werde ich diese spezielle Differentialgleichung betrachten:

$$z = \int e^{ax} X dx,$$

wo X irgendeine von a nicht abhängende Funktion von x und Konstanten bedeutet. Und zuerst werde ich freilich untersuchen, welchen Wert X haben muss, dass die modulare Gleichungen eine Differentialgleichung von nur erstem Grad wird, und zugleich Gleichungen welcher Art mithilfe der Formel

$$z = \int e^{ax} X dx$$

konstruiert werden können. Es ist aber e die zahl, deren Logarithmus die Einheit ist, und ich lege das Integral von $e^{ax} X dx$ fest so genommen zu werden, dass es für $x = 0$ gesetzt verschwindet. Weil also $P = e^{ax} X$ ist, und X von a nicht abhängt, wird $e^{ax} X x da$ dessen Differential für konstant festgelegtes x sind, und daher

$$Q = e^{ax} X x.$$

Damit also die modulare Gleichung eine Differentialgleichung ersten Grades ist, muss gelten

$$\int e^{ax} X dx = \alpha \int e^{ax} X x + K - C.$$

Wir wollen $K = e^{ax} X p$ setzen und man nehme das Differential für konstant festgelegtes a, man wird haben:

$$e^{ax} X x dx = \alpha e^{ax} X dx + e^{ax} X dp + e^{ax} p dX + e^{ax} a X p dx$$

oder

$$X x dx = \alpha X dx + X dp + p dX + a X p dx.$$

Daher entspringt

$$\frac{dX}{X} = \frac{x dx - a dx - dp - a p dx}{p},$$

wo für p ein solcher Wert in x angenommen werden muss, dass X als von a in keiner Weise anhängig hervorgeht; aber α kann in arbiträrer Weise von a anhängend gewählt werden.

§7 Nachdem aber daraus geeignete Werte für X gefunden worden sind, wird die modulare Gleichung für X sein:

$$dz - e^{ax}Xdx = \alpha zda + (e^{ax}Xp - C)da.$$

Wir wollen zuerst festlegen, dass p eine Konstante $= m$ ist, es wird gelten:

$$\frac{dX}{X} = \frac{xdx - (\alpha + ma))dx}{m},$$

und es werde

$$\alpha + ma = b \quad \text{oder} \quad \alpha = b - ma,$$

sodass b und m nicht von a abhängen; es wird

$$\frac{dX}{X} = \frac{xdx - bdx}{m} \quad \text{und} \quad \ln X = \frac{x^2 - 2bx}{2m}$$

sowie

$$X = e^{\frac{x^2-2bx}{2m}}$$

sein; die Konstante C wird indes $= m$ sein. Deswegen entspringt aus der Gleichung

$$z = \int e^{\frac{x^2-2bx+2max}{2m}}dx$$

diese modulare Gleichung

$$dz = (b - mz)zda - mda + e^{\frac{x^2-2bx+2max}{2m}}(dx + mda).$$

Also kann diese Gleichung, welcher Funktion von a auch immer die Größe x gleich gesetzt wird, dass nur die zwei Variablen z und a übrig sind, immer konstruiert werden; dies ist freilich bereits aus anderer Quelle bekannt, weil die eine Variable z eine Dimension hat. Aber wenn z ein durch a und Konstanten gegebener Wert zugeteilt wird, wird man eine Gleichung zwischen den Variablen a und x haben, welche auf die gewohnte Weise weniger handhabbar erscheint; dennoch wird sie auf diese Weise konstruiert werden können: Für jedweden Wert von a konstruiere man die Kurve, deren Ordinate, welche der Abszisse x zukommt,

$$= e^{\frac{x^2-2bx+2max}{2m}}$$

sein wird, und auf dieser Kurve nehme eine Fläche gleich jener Funktion von a, welcher z gleich ist, die auf diese Weise bestimmte Abszisse wird der wahre Wert von x sein.

§8 All dies ist aus der Festlegung $p = m$ hervorgegangen, und m und b waren die Konstante a nicht beinhaltende Größen. Wir wollen aber weiter

$$p = \beta + \gamma x$$

setzen, es wird

$$\frac{dX}{X} = \frac{xdx - \alpha dx - \gamma dx - \beta adx - \gamma axdx}{\beta + \gamma x}$$

sein, welcher Ausdruck, damit a aus ihm herausgehe,

$$\frac{dX}{X} = \frac{fxdx - gdx}{mx + n}$$

gesetzt werde, wo f, g, m und n unser a beinhalte, es wird

$$\beta = \frac{n}{f + ma}, \quad \gamma = \frac{m}{f + ma}$$

und auch

$$\alpha = \frac{g - m - na}{f + ma} \quad \text{sowie} \quad p = \frac{n + mx}{f + ma}$$

sein. Daher entspringt

$$\log X = \frac{fx}{m} - \frac{fn + gm}{m^2} \ln(mx + n)$$
$$\text{sowie} \quad X = e^{\frac{fx}{m}} (mx + n) e^{\frac{-fn - gm}{m^2}}$$

und

$$K = e^{ax + \frac{fx}{m}} (mx + n)^{\frac{m^2 - fn - gm}{m^2}} : (f + ma),$$

und daher

$$C = \frac{n^{\frac{m^2 - fn - gm}{m^2}}}{f + ma}.$$

Man setze $f = 0$, was ohne Einschränkung der Allgemeinheit geschehen kann; es wird hiernach sein:

$$z = \int e^{ax}(mx+n)^{\frac{-g}{m}}dx;$$

daher wird die folgende modulare Gleichung entspringen

$$dz = \frac{(g-m-na)zda}{ma} + \frac{e^{ax}(mx+n)^{-\frac{-g}{m}}(madx+nda+mxda)}{ma} - \frac{n^{\frac{m-g}{m}}da}{ma}.$$

Es sei z in irgendeiner Weise durch a gegeben, sodass gilt

$$dz + \frac{n^{\frac{m-g}{m}}da - (g-m-na)zda}{ma} = \frac{Ada}{ma},$$

man wird die Konstruktion dieser Gleichung haben

$$Ada = e^{ax}(mx+n)^{\frac{-g}{m}}(madx+nda+mxda),$$

welche freilich nach der Substitution $x = \frac{y-na}{ma}$ leicht separiert wird.

§9 Weil also diese Gleichungen, welche man aus den modularen Differentialgleichungen ersten Grades findet, die gewöhnlichen Regeln für Konstruktionen nicht übersteigen, ist zu modularen Differentialgleichungen zweiten Grades voranzuschreiten. Ich werde jedoch die erste Form $z = \int e^{ax}Xdx$ beibehalten und werde ausfindig machen, eine Funktion von welcher Art X von x sein muss, damit die modulare Gleichung zu einer Differenzen-Differentialgleichung ansteigt. Es wird aber

$$P = e^{ax}X, \quad Q = e^{ax}Xx \quad \text{und} \quad R = e^{ax}Xx^2$$

sein, woher ich festlege:

$$\int e^{ax}Xx^2dx = \alpha\int e^{ax}Xdx + \beta\int e^{ax}Xdx + K - C.$$

Man nehme

$$K = e^{ax}Xp,$$

man wird nach Nehmen der Differentiale

$$Xx^2dx = \alpha Xxdx + \beta Xdx + Xdp + pdX + aXpdx$$

haben, woher

$$\frac{dX}{X} = \frac{x^2dx - \alpha xdx - \beta dx - dp - apdx}{p}$$

wird. Man setze

$$p = \frac{(x-\gamma)(x-\delta)}{a},$$

es wird

$$\frac{dX}{X} = \frac{-dp}{p} + \frac{a(\gamma+\delta-\alpha)xdx - a(\gamma\delta+\beta)dx}{(x-\gamma)(x-\delta)}$$

sein. Es sei

$$a\gamma + a\delta - \alpha a = f \quad \text{oder} \quad \alpha = \gamma + \delta - \frac{f}{a} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{g}{a} - \gamma\delta,$$

während γ, δ und f, g von a nicht abhängende Größen sind. Es wird also

$$\frac{dX}{X} = \frac{-dp}{p} + \frac{fxdx - gdx}{(x-\gamma)(x-\delta)}$$

und

$$\ln X - \ln c = \frac{\gamma f - g - \gamma + \delta}{\gamma - \delta} \ln(x-\gamma) + \frac{\delta f - g - \delta + \gamma}{\delta - \gamma} \ln(x-\delta)$$

oder

$$X = c(x-y)^{\frac{\gamma f - g - \gamma + \delta}{\gamma - \delta}} (x-\delta)^{\frac{\delta f - g - \delta + \gamma}{\delta - \gamma}}$$

sein.

§10 Man setze

$$\frac{\gamma f - g - \gamma + \delta}{\gamma - \delta} = \lambda \quad \text{und} \quad \frac{\delta f - g - \delta + \gamma}{\delta - \gamma} = \mu,$$

es wird

$$f = \lambda + \mu + 2 \quad \text{und} \quad g = \gamma\mu + \delta\lambda + \gamma + \delta$$

sein. Daher wird

$$X = c(x-\gamma)^{\lambda}(x-\delta)^{\mu}, \quad \alpha = \gamma + \delta - \frac{\lambda + \mu + 2}{a}$$

sein und

$$\beta = \frac{\gamma\mu + \delta\lambda + \gamma + \delta}{a} - \gamma\delta$$

sowie

$$K = \frac{ce^{ax}(x-\gamma)^{\lambda+1}(x-\delta)^{\mu+1}}{a}$$

und

$$C = \frac{c(-\gamma)^{\lambda+1}(-\delta)^{\mu+1}}{a}$$

sein. Deshalb wird

$$z = \int e^{ax}(x-\gamma)^{\lambda}(x-\delta)^{\mu}cdx$$

werden, welche die folgende modulare Differentialgleichung geben wird

$$\begin{aligned}
&d\left(\frac{dz - e^{ax}(x-\gamma)^{\lambda}(x-\delta)^{\mu}cdx}{da}\right) = e^{ax}(x-\gamma)^{\lambda}(x-\delta)^{\mu}cxdx \\
&+(\gamma+\delta)dz - \frac{(\lambda+\mu+2)dz}{a} \\
&-\left(\gamma+\delta-\frac{\lambda+\mu+2}{a}\right)e^{ax}(x-\gamma)^{\lambda}(x-\delta)^{\mu}cdx \\
&+\frac{(\gamma\mu+\delta\lambda+\gamma+\delta)zda}{a} - \gamma\delta zda \\
&+\frac{e^{ax}(x-\gamma)^{\lambda+1}(x-\delta)^{\mu+1}cda}{a} - \frac{(-\gamma)^{\lambda+1}(-\delta)^{\mu+1}cda}{a}.
\end{aligned}$$

Oder was auf dasselbe zurückgeht,

$$z = \int e^{ax}(\varepsilon x + \eta)^{\lambda}(\zeta x + \theta)^{\mu} dx$$

gibt diese modulare Gleichung

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{dz - e^{ax}(\varepsilon x + \eta)^{\lambda}(\zeta x + \theta)^{\mu} dx}{da}\right) &= e^{ax}(\varepsilon x + \eta)^{\lambda}(\zeta x + \theta)^{\mu} x dx \\
-\left(\frac{\eta}{\varepsilon} + \frac{\theta}{\zeta} + \frac{\lambda + \mu + 2}{a}\right)&\left(dz - e^{ax}(\varepsilon x + \eta)^{\lambda}(\zeta x + \theta)^{\mu} dx\right) \\
-\left(\frac{\eta(\mu + 1)}{\varepsilon a} + \frac{\theta(\lambda + 1)}{\zeta a} + \frac{\eta\theta}{\varepsilon\zeta}\right) zda& \\
+e^{ax}(\varepsilon x + \eta)^{\lambda+1}(\zeta x + \theta)^{\mu+1}\frac{da}{\varepsilon\zeta a} - \frac{\eta^{\lambda+1}\theta^{\mu+1} da}{\varepsilon\zeta a}&,
\end{aligned}$$

in welche die Buchstaben ε, ζ, η, λ, μ von a nicht abhängende konstante Größen bezeichnen.

§11 Man teile nun x einen entweder konstanten oder irgendwie von a abhängenden Wert zu, und für konstant angenommenes da schreibe man anstelle von allen Termen, in welchen z nicht enthalten ist, Ada, während A irgendeine resultierende Funktion von a und Konstanten ist. Danach wird die modulare Gleichung in die folgende nur die zwei Variablen z und a beinhaltende Gleichung übergehen:

$$\frac{ddz}{da} + \left(\frac{\eta}{\varepsilon} + \frac{\theta}{\zeta} + \frac{\lambda + \mu + 2}{a}\right) dz + \left(\frac{\eta(\mu + 1)}{\varepsilon a} + \frac{\theta(\lambda + 1)}{\zeta a} + \frac{\eta\theta}{\varepsilon\zeta}\right) zda = Ada,$$

oder

$$\frac{ddz}{da} + \left(b + \frac{c}{a}\right) dz + \left(f + \frac{g}{a}\right) zda = Ada,$$

nach Setzen von

$$\frac{\eta}{\varepsilon} + \frac{\theta}{\zeta} = b, \quad \lambda + \mu + 2 = c, \quad \frac{\eta\theta}{\varepsilon\zeta} = f$$

und

$$\frac{\eta(\mu+1)}{\varepsilon}+\frac{\theta(\lambda+1)}{\zeta}=g.$$

Diese Differenzen-Differentialgleichung wird mithilfe der Gleichung

$$z=\int e^{ax}(\varepsilon x+\eta)^{\lambda}(\zeta x+\theta)^{\mu}dx$$

konstruiert werden können. Wenn in gleicher Weise z ein entweder konstanter oder von a anhängender Wert zugeteilt werden, wird die modulare Gleichung in eine um vieles verwickeltere Differenzen-Differentialgleichung zwischen x und a übergehen, deren Gleichung nichtsdestoweniger dargeboten werden können wird.

§12 Um aber Differentialgleichung ersten Grades zu erhalten, welche auf diese Weise konstruiert werden können, ist es nötig, dass die so gefundenen auf Differentialgleichungen ersten Grades zurückgeführt werden können. Weil dies gelänge, wenn ein solcher Wert von x angegeben werden können, dass A verschwindet, kann dies sehr schwer geleistet werden, wenn wir nicht viele der beliebigen Buchstaben bestimmen können. Ich nehme also diese höher zusammengesetzte fundamentale Gleichung an

$$z=E\int e^{ax}(\eta+\varepsilon x)^{\lambda}(\theta+\zeta x)^{\mu}dx+F\int e^{-ax}(\eta-\varepsilon x)^{\lambda}(\theta-\zeta x)^{\mu}dx,$$

wo E, F, ε, ζ, η, θ, λ, μ von a nicht abhängende konstante Größen sind. Nachdem wie zuvor festgelegt worden ist:

$$b=\frac{\theta}{\zeta}+\frac{\eta}{\varepsilon},\quad c=\lambda+\mu+2,\quad f=\frac{\eta\theta}{\varepsilon\zeta}$$

und

$$g=\frac{\eta(\mu+1)}{\varepsilon}+\frac{\theta(\lambda+1)}{\zeta},$$

wird man aus dieser Gleichung die folgende modulare finden:

$$d\left(\frac{dz - Ee^{ax}(\eta+\varepsilon x)^{\lambda}(\theta+\zeta x)^{\mu}dx - Fe^{-ax}(\eta-\varepsilon x)^{\lambda}(\theta-\zeta x)^{\mu}dx}{da}\right)$$

$$= Ee^{ax}(\eta+\varepsilon x)^{\lambda}(\theta+\zeta x)^{\mu}xdx - Fe^{-ax}(\eta-\varepsilon x)^{\lambda}(\theta-\zeta x)^{\mu}xdx$$

$$-\left(b+\frac{c}{a}\right)(dz - Ee^{ax}(\eta+\varepsilon x)^{\lambda}(\theta+\zeta x)^{\mu}dx - Fe^{-ax}(\eta-\varepsilon x)^{\lambda}(\theta-\zeta x)^{\mu}dx)$$

$$-\left(f+\frac{g}{a}\right)zda + \frac{Ee^{ax}(\eta+\varepsilon x)^{\lambda+1}(\theta+\zeta x)^{\mu+1}da}{\varepsilon\zeta a}$$

$$-\frac{Fe^{-ax}(\eta-\varepsilon x)^{\lambda+1}(\theta-\zeta x)^{\mu+1}da}{\varepsilon\zeta a} - \frac{(E-F)\eta^{\lambda+1}\theta^{\mu+1}da}{\varepsilon\zeta a}.$$

§13 Um nun einen solchen für x einzusetzenden Wert zu finden, dass alle Terme außer denen, in welchen z enthalten ist, verschwinden, setze ich $E = F = 1$, damit der letzte Term verschwindet. Weiter setze ich

$$\frac{\eta}{\varepsilon}+\frac{\theta}{\zeta} = 0 \quad \text{oder} \quad b = 0, \quad \text{und ich setze} \quad x = \frac{-\eta}{\varepsilon},$$

dass die beiden vorletzten Terme verschwinden, wofür verlangt ist, dass $\lambda+1$ und $\mu+1$ positive Zahlen sind. Weil also x einen konstanten Wert hat, werden alle Terme, in denen dx enthalten ist, verschwinden. Es sei der Kürze wegen

$$\varepsilon = -1, \quad \zeta = 1 \quad \text{und} \quad \eta = \theta = h,$$

es wird

$$b = 0, \quad c = \lambda+\mu+2, \quad f = -h^2 \quad \text{und} \quad g = \lambda h - \mu h = h(\lambda-\mu)$$

sein, und die fundamentale Gleichung wird in diese übergehen:

$$z = \int e^{ax}(h-x)^{\lambda}(h+x)^{\mu}dx + \int e^{-ax}(h+x)^{\lambda}(h-x)^{\mu}dx.$$

Wenn in dieser $x = h$ genommen und a als Variable behandelt wird, wird die folgende Gleichung zwischen z und a hervorgehen, wenn da als konstant festgelegt wird:

$$\frac{ddz}{da} + \frac{cdz}{a} + \left(f + \frac{g}{a}\right) zda = 0,$$

welche vermöge der Festlegung $z = e^{\int tda}$ in diese Differentialgleichung ersten Grade überführt werden wird, es geht nämlich hervor:

$$dt + t^2 da + \frac{ctda}{a} + \left(f + \frac{g}{a}\right) da = 0.$$

Man setze

$$ta^c = y \quad \text{oder} \quad t = a^{-c} y,$$

man wird

$$dy + \frac{y^2 da}{a^c} + (fa^c + ga^{c-1}) da = 0$$

haben. Es werde weiter

$$a^{1-c} = u,$$

es wird

$$\frac{da}{a^c} = \frac{du}{1-c}$$

und daher

$$dy + \frac{y^2 du}{1-c} + \frac{f}{1-c} u^{\frac{2c}{1-c}} du + \frac{g}{1-c} u^{\frac{2c-1}{1-c}} du = 0$$

sein, oder aber

$$(\lambda + \mu + 1) dy = y^2 du - h^2 u^{\frac{-2\lambda - 2\mu - 4}{\lambda + \mu + 1}} du + h(\lambda - \mu) u^{\frac{-2\lambda - 2\mu - 3}{\lambda + \mu + 1}} du.$$

Man setze

$$\lambda + \mu = m, \quad \lambda - \mu = n,$$

man wird diese Gleichung haben:

$$(m+1) dy = y^2 du - h^2 u^{\frac{-2m-4}{m+1}} du + nhu^{\frac{-2m-3}{m+1}} du,$$

welche aus der Gleichung

$$z = \int e^{ax}(h-x)^{\frac{m+n}{2}}(h+x)^{\frac{m-n}{2}}dx + \int e^{-ax}(h+x)^{\frac{m+n}{2}}(h-x)^{\frac{m-n}{2}}dx$$

konstruiert werden kann. Denn wenn man nach der so durchgeführten Integration, dass z für $x = 0$ gesetzt verschwindet, $x = h$ nimmt und $u^{\frac{-1}{m+1}}$ für a setzt, wird man eine Funktion von u haben, welche V sei; es wird damit

$$y = \frac{-(m+1)dV}{Vdu}$$

sein, welches der wahre Wert von y in der gefundenen Gleichung ist. Es ist aber anzumerken, dass $m+n$ und $m-n$ positive Zahlen sein müssen.

§14 Wenn so $\frac{m+n}{2}$ wie $\frac{m-n}{2}$ ganze positive Zahlen waren, dann wird der Wert von z durch Integration dargeboten werden können und daher der Wert von V tatsächlich angegeben werden können. In diesen Fällen wird also die vorgelegte Gleichung

$$(m+1)dy = y^2du - h^2u^{\frac{-2m-4}{m+1}}du + nhu^{\frac{-2m-3}{m+1}}du$$

in gewohnter Weise integriert werden können und ihr Integral dargeboten werden können. Man setze also

$$m = i+k, \quad n = i-k,$$

während i und k ganze positive Zahlen bezeichnen, und wir werden diese Gleichung haben

$$(1+i+k)dy = y^2du - h^2u^{\frac{-2i-2k-4}{i+k+1}}du + (i-k)hu^{\frac{-2i-2k-3}{i+k+1}}du;$$

diese wird nicht nur auf die oben erläuterte Weise konstruiert werden können, sondern auch auf die gewohnte Weise separiert und integriert werden können. Denn in der Gleichung

$$z = \int e^{ax}(h-x)^i(h+x)^kdx + \int e^{-ax}(h+x)^i(h-x)^kdx$$

setze man nach der Integration, welche tatsächlich gelingt und so durchgeführt worden ist, dass z für $x = 0$ verschwindet, $x = h$ und für a setze man diesen Wert $u^{\frac{-1}{i+k+1}}$; danach wird z einer gewissen Funktion von u gleich werden, welche V sei; nachdem V aber gefunden worden ist, wird

$$y = \frac{-(i+k+1)dV}{Vdu}$$

sein. Wenn darüber hinaus $k = i$ wird, wird die von Graf RICCATI vorgelegte Gleichung hervorgehen:

$$(1+2i)dy = y^2du - h^2u^{\frac{-4i-4}{2i+1}}du$$

hervorgehen, deren allgemeine Konstruktion somit dargeboten worden ist.