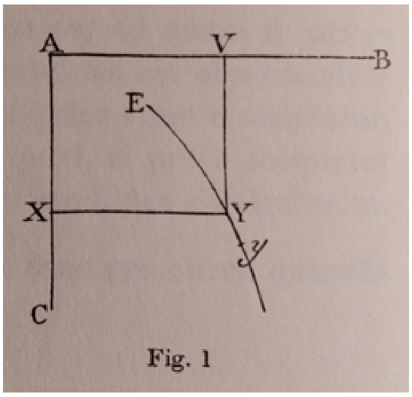
Über ein riesiges Paradoxon, welches in der Analysis der Maxima und Minima auftritt*

Leonhard Euler

§1 Auf dieses Paradoxon, welches ich hier darlegen werde, bin ich gestoßen, als ich das folgende Problem aufgelöst habe:

Über der horizontalen Geraden AB (Fig. 1) die Kurve EY zu beschreiben, sodass, wenn deren einzelne Elemente Yy mit der Quadratwurzel des Abstands YV von jener Geraden multipliziert werden, die Summe all dieser Produkte minimal wird.



Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

*Originaltitel: "De insigni paradoxo, quod in analysi maximorum et minimorum occurrit", zuerst publiziert in: *Mémoires de l'académie des sciences de St.-Petersbourg, Band 3* (1811, geschrieben 1779): pp. 16 – 25, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 25, pp. 286 – 292, Eneström Nummer E735, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

Das Paradoxon besteht aber darin, dass in vielen Fällen andere Linien dargeboten werden können, für welche diese Summe kleiner ausgemacht wird als die in der durch Rechnung gefundenen Kurve, auch wenn sie innerhalb derselben Grenzen enthalten ist. Außerdem kann es aber auch passieren, dass für gewisse zwischen vorgelegten Grenzen zu beschreibenden Kurven jene erwähnte Summe mal größer mal kleiner ist, sodass auch in diesen Fällen ein gewisses Minimum Geltung zu haben scheint. Es scheint also der Mühe Wert zu sein, dieses Paradoxon genauer zu betrachten.

§2 Für dieses Ziel stelle EY die diesem Problem Genüge leistende auf die vertikale Achse AC bezogene Kurve dar, für jedweden Punkt Y von welcher man die Abszisse $AX = x$ dem Abstand YV gleich, die Ordinate hingegen $YY = y$ setze: daher wird für $dy = pdx$ gesetzt das Kurvenelement $Yy = dx\sqrt{1+pp}$ sein, und so wird die Integralformel, deren Wert der kleinste aller sein muss, $\int dx\sqrt{x(1+pp)}$ sein.

§3 Wenn wir diese Erläuterung auf die Bewegung übertragen und den die Kurve EY durchlaufenden Körper festlegen, in den einzelnen Punkten Y die der Höhe VY entsprechende Geschwindigkeit zu haben und diese $= v$ genannt wird, weil v wie $\sqrt{x}$ ist, wird die Kurve gesucht, wenn wessen einzelne Elemente mit dieser Geschwindigkeit v multipliziert werden, die Summe all dieser Produkte als die kleinste hervorgeht. Aber ich habe schon vor einiger Zeit bemerkt, dass Produkt aus dem passierten Raum mit der Geschwindigkeit mit der einst vom illustren Maupertuis gebildeten Idee der geringsten Wirkung übereinstimmt; daher sieht man ein, dass die Kurve, die wir suchen, selbst eine *Flugkurve* ist, welche ein auf beliebige Weise nach vorne geworfener ansonsten kräftefreier Körper beschreibt, und daher eine *Parabel* sein wird.

§4 Weil also die Integralformel

$$\int dx\sqrt{x(1+pp)}$$

zu minimieren ist, wenn sie mit der allgemeinen Form $\int Vdx$ verglichen wird, für welche ich $dV = Mdx + Ndy + Pdp$ gesetzt habe, habe ich bewiesen, dass die gesuchte Kurve mit dieser Gleichung: $Ndx = dP$ ausgedrückt wird. In diesem Fall, in dem $V = \sqrt{x(1+pp)}$ ist, wird also

$$M = \frac{\sqrt{1+pp}}{2\sqrt{x}}, \quad N = 0 \quad \text{und} \quad P = \frac{p\sqrt{x}}{\sqrt{1+pp}}$$

sein. Weil aber $dP = 0$ sein muss, wird diese Größe P konstant sein; daher wird diese Gleichung abgeleitet:

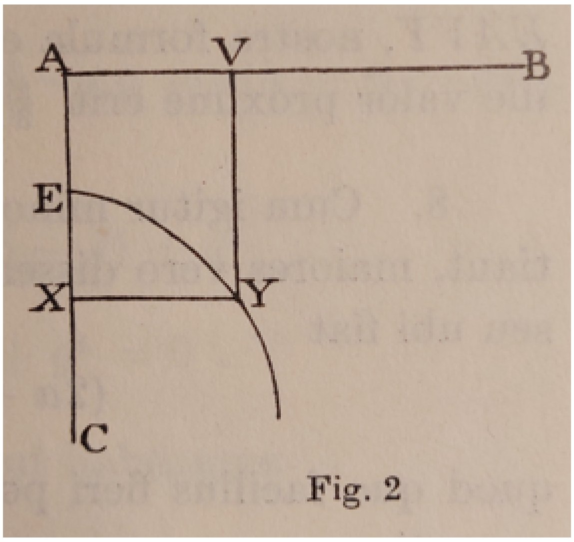
$$\frac{p\sqrt{x}}{\sqrt{1+pp}} = \sqrt{a},$$

und dies ist die die Natur der gesuchten Kurve ausdrückende Gleichung.

§5 Man suche nun (Fig. 2) aus diese Gleichung den Wert von $p = \sqrt{\frac{a}{a-x}}$, woher, weil $p = \frac{dy}{dx}$ ist, wird $dy = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}}$ sein, deren Integration

$$y = 2\sqrt{ax - aa} + b$$

liefert.



Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

Daher ist für $b = 0$ genommen klar, dass die Kurve EY eine um die Achse AC beschriebene Parabel ist, deren Scheitel auf E fällt, während die Strecke $AE = a$ ist, welche zugleich dem Abstand des Brennpunktes der Parabel vom Scheitel gleich wird, dessen Vierfaches also der Parameter der Parabel sein wird, natürlich $4a$. Daher ist also klar, dass alle Parabeln unserer Frage

Genüge leisten, deren Achsen vertikal sind, deren Abstand der Scheitel von der horizontalen Gerade AB aber dem Abstand des Brennpunktes vom Scheitel gleich ist.

§6 All diese Parabeln EY haben also diese Eigenschaft, dass, wenn ihre einzelnen Elemente Yy mit der Quadratwurzel des Abstands YV multipliziert werden, die Summe all dieser Produkte minimal ist; daher wird es der Mühe Wert sein, diesen Wert ausfindig zu machen. Weil wir ja aber oben $p = \sqrt{\frac{a}{x-a}}$ gefunden haben, wird $\sqrt{1+pp} = \sqrt{\frac{x}{x-a}}$ und daher das Kurvenelement $Yy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{x-a}}$ sein, was also mit $\sqrt{x}$ multipliziert $\frac{xdx}{\sqrt{x-a}}$ liefert, dessen Integral tatsächlich ein Minimum sein muss. Aber dieses Integral wird für den ganzen Bogen EY als $= \frac{2}{3}(2a+x)\sqrt{x-a}$ gefunden, welche Größe also kleiner sein müsste, als wenn eine andere Kurve zwischen den Endpunkten E und Y beschrieben und für sie der Wert derselben Integralformel berechnet werden würde.

§7 Dennoch können indes leicht unzählige Fälle dargeboten werden, für welche dieser Wert entsprechend berechnet in Wirklichkeit kleiner gefunden als der gerade ermittelte Wert. Wenn wir nämlich anstelle der Kurve EY vom Punkt E aus über die Geraden EA, AV, VY bis hin zu Y voranschreiten, welcher Weg natürlich um vieles länger ist, als wenn wir den über die Kurve EV gegangen wären, wird der Wert unserer Integralformel für die Strecke EA als $\frac{2}{3}a\sqrt{a}$ gefunden; aber für die Strecke AV, wo $x = 0$ ist, wird der Wert verschwinden; für den Raum VY wird man hingegen $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ haben, sodass für den ganzen Weg $EAVY$ der Wert unserer Formel $= \frac{2}{3}a\sqrt{a} + \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ sein wird, welcher Wert natürlich größer ist als der gefundene Ausdruck $\frac{2}{3}(2a+x)\sqrt{x-a}$, solange x nicht um vieles größer angenommen wird als a; aber Gegenteiliges passiert, wenn x um vieles größer angenommen wird. Wie beispielsweise, wenn für $a = 1$ genommen $x = 100$ gesetzt wird, unsere Formel für die Parabel $\frac{2}{3} \cdot 102\sqrt{99}$ liefert; aber für den Weg $EAVY$ wird unsere Formel hingegen $\frac{2}{3} \cdot 1001$ sein; daher, weil näherungsweise $\sqrt{99} = 10 - \frac{1}{21}$ ist, wird jener Wert annähernd $\frac{2}{3} \cdot 1015$ sein und daher in der Tat größer als der andere.

§8 Weil also kleinere für x angenommene Werte mit der Natur des Minimums einhergehen, die größeren aber unstimmig sind, wollen wir nach der

Grenze suchen, bei welcher diese Unstimmigkeit beginnt oder wo

$$(2a+x)\sqrt{x-a} = a\sqrt{a} + x\sqrt{x}$$

wird; damit dies leichter geschehen kann, wollen wir $a = 1$ und $x = tt + 1$ nehmen, dass man die Gleichung

$$t(tt+3) = 1 + (tt+1)^{\frac{3}{2}} \quad \text{und daher} \quad (1+tt)^{\frac{3}{2}} = t^3 + 3t - 1$$

hat, und nach Nehmen von Quadraten wird gelten:

$$t^6 + 3t^4 + 3tt + 1 = t^6 + 6t^4 - 2t^3 + 9tt - 6t + 1 \quad \text{oder} \quad 3t^3 - 2tt + 6t - 6 = 0.$$

Man setze $t = \frac{s}{3}$, dass diese Gleichung hervorgeht:

$$s^3 - 2ss + 18s - 54 = 0,$$

daher wird näherungsweise $s = \frac{30}{11}$, also $t = \frac{11}{10}$, und daher $x = \frac{221}{121}$. Daher ist klar, dass die Abweichung beginnt, bevor man $x = 2$ nimmt.

§9 Um dies allgemeiner zu entwickeln, wollen die gefundene Kurve (Fig. 3) so konstruieren, dass sie durch die zwei gegebenen Punkte F und H hindurchgeht, indem wir $Ff = f$, $Hh = h$, die Strecke fh hingegen $= 2g$ setzen, sodass nach Zweiteilen dieser Strecke in g entsprechend $fg = hg = g$ ist.

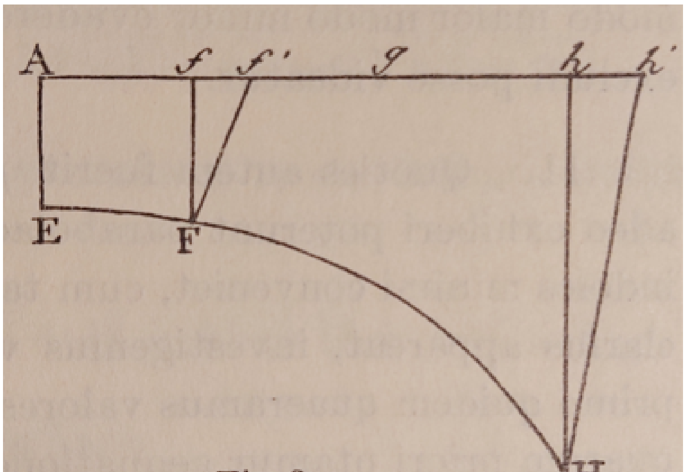


Fig. 3

Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

Man sucht also so die Lage der Achse der Parabel wie ihren Scheitel E. Zu diesem Zweck sei wie oben $AE = a$ und der Abstand $Ag = v$, sodass $Af = v - g$ und $Ah = v + g$ ist. Nachdem all dies festgelegt worden ist, wenn wir in unserer gefundenen Gleichung $y = 2\sqrt{ax - aa}$ entweder $y = v - g$ oder $y = v + g$ nehmen, wird entweder $x = f$ oder $x = h$ sein müssen, woher wir diese zwei Gleichungen erhalten:

$$v - g = 2\sqrt{af - aa} \quad \text{und} \quad v + g = 2\sqrt{ah - aa},$$

aus welchen die Werte so für v wie für g gefunden werden müssen. Nachdem v aber eliminiert worden ist, wird sofort

$$g = -\sqrt{af - aa} + \sqrt{ah - aa} \quad \text{oder} \quad g + \sqrt{af - aa} = \sqrt{ah - aa}$$

sein; daher wird nach Nehmen von Quadraten

$$gg + 2g\sqrt{af - aa} + af - aa = ah - aa \quad \text{oder} \quad 2g\sqrt{af - aa} = a(h - f) - gg,$$

und durch erneutes Quadrieren

$$4gg(af - aa) = aa(h - f)^2 - 2agg(h - f) + g^4$$

oder

$$aa((h - f)^2 + 4gg) - 2agg(h + f) + g^4 = 0.$$

Für die Lösung dieser Gleichung wollen wir $a = \frac{gg}{z}$ setzen, dass wir

$$0 = zz - 2(h + f)z + (h - f)^2 + 4gg$$

haben, woher

$$z = (h + f) + 2\sqrt{hf - gg}$$

und daher

$$a = \frac{gg}{h + f + 2\sqrt{ff - gh}}$$

wird.

§10 Daher ist schon sofort klar, wenn nicht $fh > gg$ war, dass die gesuchte Kurve imaginär ist oder in diesen Fällen keine Kurve durch die Punkte F und H hindurchgeführt werden kann, obwohl dennoch für alle Fälle, welche sich nach Belieben durch die Punkte hindurchführen lassen, der Wert unserer Integralformel angegebenen werden kann, welche für die Natur der behandelten Kurve mal größer mal kleiner werden kann, so dass daher die Natur des Minimums keineswegs ausgeschlossen werden zu können scheint.

§11 Sooft aber $fh > gg$ war, werden wegen des mehrdeutigen Wurzelausdrucks sogar zwei durch die Punkte F und H hindurchlaufendene Parabeln dargeboten werden können, jeder von welchen beiden die Natur des Minimums zukommen wird, obwohl sie sich sehr stark voneinander unterscheiden. Damit dies deutlich wird, wollen wir jenen Wert ausfindig machen, welcher ein Minimum sein müsste, und zuerst wollen wir freilich den Wert der Formeln $\sqrt{af - aa}$ und $\sqrt{ah - aa}$ suchen, für deren erste wir die oben in Paragraph 9 gefundene Gleichung gebrauchen wollen:

$$2g\sqrt{af - aa} = a(h - f) - gg,$$

welche wegen $a = \frac{gg}{f+h+2\sqrt{hf-gg}}$

$$\sqrt{af - aa} = -\frac{fg + g\sqrt{fh - gg}}{h + f + 2\sqrt{fh - gg}}$$

liefert. Nach Finden von diesem liefert die Gleichung $\sqrt{ah - aa} = g + \sqrt{af - aa}$

$$\sqrt{ah - aa} = \frac{gh + g\sqrt{fh - gg}}{h + f + 2\sqrt{ff - gg}}$$

oder, indem man der Kürze wegen $\sqrt{ff - gg}$ einfach $\sqrt{\cdots}$ schreibt, dass $a = \frac{gg}{f+h+2\sqrt{\cdots}}$ ist, wird $\sqrt{af - aa} = -\frac{g(f+\sqrt{\cdots})}{f+h+2\sqrt{\cdots}}$ und $\sqrt{ah - aa} = \frac{g(h+\sqrt{\cdots})}{f+h+2\sqrt{\cdots}}$ sein.

§12 Wir wollen nun den Wert unserer Integralformel für irgendeine Kurve mit dem Namen ihres Moments bezeichnen, und weil wir oben gesehen haben, dass das Moment der Kurve EY (Fig. 2) $\frac{2}{3}(2a + x)\sqrt{x - a}$ ist, wird es auch

$$\frac{2}{3\sqrt{a}}(2a + x)\sqrt{ax - aa}$$

sein, woher für unseren Fall das Moment der Kurve EH (Fig. 3)

$$= \frac{2}{3\sqrt{a}}(2a+h)\sqrt{ah-aa}$$

und das Moment für die Kurve EF

$$= \frac{2}{3\sqrt{a}}(2a+f)\sqrt{af-aa}$$

sein wird, welches vom vorhergehenden abgezogen das Moment für den vorgelegten Bogen FH

$$= \frac{2}{3\sqrt{a}}(2a(\sqrt{ah-aa}-\sqrt{af-aa})+h\sqrt{ah-aa}-f\sqrt{af-aa})$$

zurücklässt, welcher Ausdruck, wenn anstelle der Wurzeln die gerade gefundenen Werte geschrieben werden, diese Form annimmt:

$$\frac{2g}{3(f+h+2\sqrt{\cdots})\sqrt{a}}(2a(f+h+2\sqrt{\cdots})+ff+hh+(f+h)\sqrt{\cdots}),$$

welche, wenn anstelle von a sein Wert eingesetzt wird, in diese übergeht

$$\frac{2g}{3(f+h+2\sqrt{\cdots})\sqrt{a}}(2gg+ff+hh+(f+h)\sqrt{\cdots})$$

oder in diese:

$$\frac{2g}{3\sqrt{a}}\left(\frac{2gg+ff+hh+(f+h)\sqrt{\cdots}}{f+h+2\sqrt{\cdots}}\right).$$

Wenn dieser letzte Bruch mit $p+f-2\sqrt{\cdots}$ erweitert werden, wird sein Zähler

$$= (f+h)(2gg+ff+hh)-2(f+h)(fh-gg)+(2fh-ff-hh-4gg)\sqrt{\cdots}$$

hervorgehen, welcher auf diese Form zurückgeführt wird:

$$(f+h)(4gg+(h-f)^2)-(4gg+(h-f)^2)\sqrt{\cdots}=(4gg+(h-f)^2)(f+h-\sqrt{\cdots}).$$

Aber der Nenner wird hingegen als $(h-f)^2+4gg$ hervorgehen und so trägt es sich in angenehmer Weise zu, dass das gesuchte Moment $= \frac{2g}{3\sqrt{a}}(f+h-\sqrt{\cdots})$ wird. Daher, weil

$$\sqrt{a} = \frac{g}{\sqrt{f+h+2\sqrt{\cdots}}}$$

ist, wird dieses Moment für den Bogen FH

$$= \frac{2}{3}(f+h-\sqrt{\cdots})\sqrt{f+h+2\sqrt{\cdots}}$$

sein.

§13 Sooft also $gg < fh$ war, werden wegen des Wurzelzeichens immer zwei Minima dargeboten werden können, oder von F zu H werden sich zwei Parabelbogen zeichnen lassen. Ja man wird sogar, wenn diese Erläuterungen auf die Flugkurve nach einem Wurf bezogen werden, vom Punkt F aus auf zweierlei Weise einen Körper mit der der Höhe Ff entsprechenden Geschwindigkeit so werfen können, dass er der Punkt H durchläuft. Daher sieht man leicht ein, dass dies geschehen kann, wenn der Punkt H mehr als eine gewisse Distanz entfernt war, in welchem Fall es also nicht verwunderlich ist, dass unsere Kurve imaginär wird, und das wird sich zutragen, sooft $gg > ff$ war.

§14 Wir wollen aber den Fall genauer betrachten, in welchem $fh = gg$ ist, weil ja dann die beiden Lösungen wegen $\sqrt{fh-gg} = 0$ zu einem verschmelzen; aber den wird der Parabelbogen FH einen sehr weiten Wurf darstellen. In diesem Fall wird also das Moment dieses Bogens FH entsprechend $\frac{2}{3}(f+h)^{\frac{3}{2}}$ sein. Wenn wir aber hier über den Weg $FfhH$ bis hin zu H gelangen, wird das diesem Weg entsprechende Moment $= \frac{2}{3}(f\sqrt{f}+h\sqrt{h})$ sein, welches natürlich immer kleiner ist als jenes, welches wir für den Parabelbogen FH gefunden haben, auch wenn dieses in seiner Art das kleinste ist.

§15 Um dieses Paradoxon zu erklären, muss man bemerken, dass das diesem Weg $FfhH$ entsprechende Moment auch in seiner Art das kleinste ist. Natürlich, wenn die Punkte f und h ein wenig verändert werden, wäre das Moment, was dem Weg $Ff'h'H$ entspräche, offenkundig größer. Es wird also wundersam erscheinen, dass dieses Minimum uns nicht von der Rechnung gezeigt wird; aber der Grund dafür ist hinreichend ersichtlich, weil dieser Weg keine stetige Kurve ist. Dennoch wird auch diese Fall in der Rechnung selbst erfasst. Weil nämlich $d \cdot \frac{p\sqrt{x}}{\sqrt{1+pp}} = 0$ sein muss, ist es ersichtlich, dass diese

Formel für die, natürlich vertikalen, Geraden Ff sowie für hH in Wirklichkeit $= 0$ ist; aber für den den horizontalen Weg fh verschwindet sie wegen $x = 0$ wiederum. Überdies ist hinreichend bekannt, dass dieselbe Kurve oftmals mehrere zueinander höchst verschiedene kleinste Ordinaten enthalten kann, solange nur jede Ordinate kleiner ist als die unmittelbar benachbarten zu beiden Seiten hin. Und daher sieht man auch ein, wannimmer die Rechnung zwischen den Punkten F und H zwei Kurven darbietet, dass die Momente für jede der beiden minimal sein können, auch wenn sie sich sehr stark voneinander unterscheiden.