Über gewisse sehr schwer zu findende Integrale*

Leonhard Euler

§1 Es hat sich mir schon vor einiger Zeit diese Integralformel

$$-\int \frac{\partial x \log x}{\sqrt{1-xx}}$$

aufgezeigt, deren Wert von $x=0$ bis $x=1$ erstreckt ich zu erkennen wünschte. Ich hatte nämlich vermutet, ohne jedweden Grund, dass sie teils mit der Quadratur des Kreises, teils mit Logarithmen ausgedrückt wird. Aber alle Versuche diesen Wert ausfindig zu machen, waren vergebens und ich bin immer auf unendliche Reihen von solcher Art gestoßen, deren Summe sich in keiner Weise angeben ließ. Zuerst habe ich nämlich die Wurzel in gewohnter Weise in eine Reihe entwickelt, dass ich diese Formel hatte

$$s=-\int \partial x \log x \left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\text{etc.}\right);$$

für das Integrieren von dieser, weil

$$\int -x^n \partial x \log x = -\frac{x^{n+1}}{n+1}\log x+\int \frac{x^n\partial x}{n+1} = -\frac{x^{n+1}}{n+1}\log x+\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

gilt, wird für $x=1$

*Originaltitel: "De integralibus quibusdam inventu difficillimis", zuerst publiziert in: *Mémoires de l'académie des sciences de St.-Petersbourg, Band 6* (1818, geschrieben 1780): pp. 30 – 53, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 19, pp. 390 – 416, Eneström Nummer E752, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

$$\int -x^n \partial x \log x = \frac{1}{(n+1)^2}$$

sein und, nachdem die einzelnen Terme auf diese Weise integriert worden sind, man findet

$$s = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7^2} + \text{etc.}$$

Diese Reihe ist aber so beschaffen, dass ihre Summation in keiner Weise klar ist.

§2 Also hatte ich versucht, den Faktor $\log x$ in eine Reihe aufzulösen, deren einzelne Terme zu integrierbaren Formeln führten, aber nach sehr vielen Versuchen gelang es mir nicht, bis ich schließlich neulich auf eine geeignete Auflösung von $\log x$ gestoßen bin, mit welcher die ganze Aufgabe mit glücklichem Erfolg erledigt werden konnte. Weil natürlich $\log x = \frac{1}{2} \log xx$ ist, habe ich hier $1 - (1 - xx)$ anstelle von xx geschrieben. Daher ging nämlich sofort

$$-\log xx = \frac{1 - xx}{1} + \frac{(1 - xx)^2}{2} + \frac{(1 - xx)^3}{3} + \text{etc.}$$

hervor und so wurde die vorgelegte Formel in diese überführt

$$s = \int \partial x \left(\frac{(1 - xx)^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{(1 - xx)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{(1 - xx)^{\frac{5}{2}}}{6} + \text{etc.} \right),$$

all deren Anteile leicht auf die Quadratur des Kreises zurückgeführt werden.

§3 Damit dies leichter geleistet werden kann, wollen wir diese Reduktion festlegen

$$\int \partial x (1 - xx)^n = Ax(1 - xx)^n + B \int \partial x (1 - xx)^{n-1},$$

woher durch Differenzieren und Teilen durch $\partial x (1 - xx)^{n-1}$ diese Gleichung entspringt

$$1 - xx = A(1 - xx) - 2nAx^2 + B,$$

woher

$$A + B = 1 \quad \text{und} \quad A + 2nA = 1$$

werden muss. Daher berechnet man also

$$A = \frac{1}{2n+1} \quad \text{und} \quad B = \frac{2n}{2n+1},$$

weshalb man für $x = 1$ diese allgemeine Reduktion

$$\int \partial x (1-xx)^n = \frac{2n}{2n+1} \int \partial x (1-x)^{n-1}$$

haben wird und durch Schreiben von $\lambda + \frac{1}{2}$ anstelle von n wird

$$\int \partial x (1-xx)^{\lambda+\frac{1}{2}} = \frac{2\lambda+1}{2\lambda+2} \int \partial x (1-xx)^{\lambda-\frac{1}{2}}$$

sein.

§4 Weil nun, wenn man die Integrationen immer von $x = 0$ bis $x = 1$ erstreckt,

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{\pi}{2}$$

ist, wird man mit dieser Reduktion finden:

$$\begin{aligned}
\int \partial x (1-xx)^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \\
\int \partial x (1-xx)^{\frac{3}{2}} &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \\
\int \partial x (1-xx)^{\frac{5}{2}} &= \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \\
\int \partial x (1-xx)^{\frac{7}{2}} &= \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\
&\ \text{etc.}
\end{aligned}$$

Nachdem also diese Werte der Reihe nach eingeführt worden sind, werden wir die folgende Reihe erlangen

$$s = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 8} + \text{etc.}\right),$$

welche Reihe um vieles einfacher ist als die, die wir zuvor angeführt haben; dennoch hat sie indes eine außerordentliche Affinität zu selbiger und daher sind diese zwei Reihen einander sogar gleich.

§5 Um die Summe dieser Reihe ausfindig zu machen, wollen wir diese allgemeinere betrachten

$$v = \frac{t^2}{2 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4}t^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6}t^6 + \text{etc.},$$

woher wir durch Differenzieren

$$\frac{\partial v}{\partial v} = \frac{t}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}t^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}t^5 + \text{etc.}$$

erlangen, deren Wert natürlich $\frac{1}{t}\left(\frac{1}{\sqrt{1-tt}} - 1\right)$ ist. Daher wird also

$$v = \int \frac{\partial t}{t}\left(\frac{1}{\sqrt{1-tt}} - 1\right)$$

werden, nach Finden welches Wertes man $t = 1$ setzen müssen wird; und dahen wird die gesuchte Summe

$$s = \frac{\pi}{2}v$$

sein.

§6 Hier wollen wir zuerst die Irrationalität beseitigen, indem wir

$$\sqrt{1-tt} = v$$

setzen, dass $t = \sqrt{1-uu}$ ist. Nun wird also die Integration von der Grenze $t = 0$, das heißt $u = 1$, bis hin zu $t = 1$, das heißt $u = 0$ erstreckt werden müssen. Dann wird aber

$$\frac{\partial t}{t} = -\frac{u \partial u}{1 - uu}$$

sein, woraus man

$$v = -\int \frac{u \partial u}{1-uu}\left(\frac{1-u}{u}\right) = -\int \frac{\partial u}{1+u}$$

findet, deren Integral

$$v = C - \log(1+u)$$

liefert, wo die Konstante C hier $\log 2$ sein muss. Nun geht also für $u = 0$ gesetzt $v = \log 2$ hervor und daher

$$s = \frac{1}{2}\pi \log 2,$$

welches also der Wert der eingangs vorlegten Formel ist, der dermaßen ersehnt worden ist. Außerdem lassen sich nun auch die zuvor gefundenen Reihen summieren, natürlich die Reihen aus § 1, welche

$$\frac{1}{1\cdot 1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7^2} + \text{etc.} = \frac{1}{2}\pi\log 2$$

war, dann ist aber

$$\frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6} + \text{etc.} = \log 2,$$

welche Summierungen für sich betrachtet ziemlich bizarr scheinen können. Daher wollen wir das folgende Theorem hinzufügen:

THEOREM

Nach Vorlage der Integralformel

$$\int \frac{-\partial x \log x}{\sqrt{1-xx}}$$

ist ihr Wert von der Grenze $x = 0$ bis hin zu $x = 1$ erstreckt $= \frac{1}{2}\pi\log 2$.

§7 Wenn wir diese Formel mit dieser einfacheren $\int \frac{-\partial x \log}{1-x}$ vergleichen, wird es verwunderlich erscheinen, dass diese nicht auf die gleiche Weise behandelt werden kann, obgleich dennoch anderswoher bekannt ist, dass ihr Wert von $x = 0$ bis hin zu $x = 1$ erstreckt $= \frac{\pi\pi}{6}$ ist. Weil nämlich

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{etc.}$$

und

$$\int -x^{n-1}\partial x \log x \begin{bmatrix} \text{von} & x=0 \\ \text{bis} & x=1 \end{bmatrix} = \frac{1}{nn}$$

ist, wird daraus diese Reihe entspringen

$$\int \frac{-\partial x \log x}{1-x} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.},$$

deren Summe ich einst als erster gefunden habe $= \frac{\pi\pi}{6}$ zu sein, welchen Wert ich dennoch aus der Integralformel selbst bis jetzt auf noch keine andere Weise finden konnte. Daher folgt also dieses ziemlich merkwürdige Verhältnis

$$\int \frac{-\partial x \log x}{1-x} : \int \frac{-\partial x \log x}{\sqrt{1-xx}} = \pi : 3\log 2.$$

§8 Diesen Spuren folgend lässt sich eine sich um vieles weiter erstreckende Integralformel in gleicher Weise behandeln, welche Operation ich im folgenden Problem erklären werde.

PROBLEM

Nach Vorlage der Integralformel

$$S = \int \frac{-x^{m-1}\partial x \log x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^m}}$$

ihren Wert von $x=0$ bis $x=1$ erstreckt mit einem endlichen Ausdruck, bestehend nur aus Kreisbogen und Logarithmen, darzubieten.

LÖSUNG

§9 Hier wird es vor allem förderlich sein bemerkt zu haben, dass diese Formel

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^m}}$$

völlig von der Irrationalität befreit werden kann, indem man

$$\frac{x}{\sqrt[n]{1-x^n}} = t$$

setzt. Daher geht diese Formel nämlich in diese $\int \frac{t^m \partial x}{x}$ über; dann wird aber $x^n = t^n(1-x^n)$ sein und daher $x^n = \frac{t^n}{1+t^n}$ oder in Logarithmen

$$n \log x = n \log t - \log(1+t^n),$$

woher durch Differenzieren

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial t}{t(1+t^n)}$$

hervorgeht, sodass durch diese Substitution

$$\int \frac{t^{m-1} dt}{1+t^n}$$

hervorgeht, wo, weil für $x = 0$ genommen auch $t = 0$ wird, aber für $x = 1$ gesetzt $t = \infty$ wird, das Integral von $t = 0$ bis hin zu $t = \infty$ zu erstrecken ist. Nun habe ich aber schon vor langer Zeit bewiesen, dass der Wert dieser Formel in diesem Fall

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$$

ist.

Daher folgt also, dass auch der Wert der Integralformel

$$\int \frac{x^{m-1} \partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^m}}$$

von $x = 0$ bis hin zu $x = 1$ erstreckt

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$$

ist, an dessen Stelle wir der Kürze wegen $\triangle$ schreiben wollen.

§10 Nachdem dies im Voraus bemerkt worden ist, wollen wir in der vorgelegten Formel $\frac{1}{n} \log x^n$ anstelle von $\log x$ schreiben und anstelle davon weiter $\frac{1}{n} \log(1-(1-x^n))$, und so werden wir nach der Entwicklung

$$-\log x = \frac{1-x^n}{n} + \frac{(1-x^n)^2}{2n} + \frac{(1-x^n)^3}{3n} + \text{etc.}$$

haben, nach Einsetzen welcher Reihe unsere Formel diese Form annehmen wird

$$S = \int x^{m-1}\partial x \left(\frac{1}{n}(1-x^n)^{1-\frac{m}{n}} + \frac{1}{2n}(1-x^n)^{2-\frac{m}{n}} + \frac{1}{3n}(1-x^n)^{3-\frac{m}{n}} + \text{etc.}\right),$$

deren einzelne Glieder sich auf den zuvor eingeführten Wert $\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$ zurückführen lassen werden. Zu diesem Zweck wollen wir diese allgemeine Reduktion festlegen

$$\int x^{m-1}\partial x(1-x^n)^{\lambda} = A\int x^{m-1}\partial x(1-x^n)^{\lambda-1} + Bx^m(1-x^n)^{\lambda},$$

und nach Differentiation und Division durch $x^{m-1}\partial x(1-x^n)^{\lambda-1}$ geht diese Gleichung

$$1-x^n = A + Bm(1-x^n) - \lambda nBx^n$$

hervor, woher die Buchstaben A und B so bestimmt werden

$$A = \frac{\lambda n}{m+\lambda n} \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{m+\lambda n}.$$

Deswegen, weil all diese Integrale von $x = 0$ bis hin zu $x = 1$ zu erstrecken sind, werden wir diese allgemeine Reduktion haben

$$\int x^{m-1}\partial x(1-x^n)^{\lambda} = \frac{\lambda n}{m+\lambda n}\int x^{m-1}\partial x(1-x^n)^{\lambda-1}.$$

§11 Mithilfe dieser Reduktion wollen wir die einzelnen Anteile entwickeln; und für den ersten Teil wird $\lambda = 1-\frac{m}{n}$ und daher $\lambda n = n-m$ sein, woher man

$$\int x^{m-1}\partial x(1-x^n)^{1-\frac{m}{n}} = \frac{n-m}{n}\triangle$$

berechnet. Für den zweiten Teil wird $\lambda = 2-\frac{m}{n}$ oder $\lambda n = 2n-m$ sein und daher wird der zweite Teil zu

$$\int x^{m-1}\partial x(1-x^n)^{2-\frac{m}{n}} = \frac{n-m}{n}\cdot\frac{2n-m}{2n}\cdot\triangle$$

berechnet. Für den dritten Teil wird wegen $\lambda = 3-\frac{m}{n}$ oder $\lambda n = 3n-m$

$$\int x^{m-1}\partial x(1-x^n)^{3-\frac{m}{n}} = \frac{n-m}{n}\cdot\frac{2n-m}{2n}\cdot\frac{3n-m}{3n}\cdot\triangle$$

sein. Und in der gleichen Weise wird der vierte Teil

$$\int x^{m-1}\partial x(1-x^n)^{4-\frac{m}{n}} = \frac{n-m}{n}\cdot\frac{2n-m}{2n}\cdot\frac{3n-m}{3n}\cdot\frac{4n-m}{4n}\cdot\triangle$$

sein und so weiter.
Durch Sammeln dieser einzelnen Anteile werden wir für den gesuchten Wert S diesen Ausdruck haben

$$S = \triangle\left(\frac{n-m}{n\cdot n}+\frac{(n-m)(2n-m)}{n\cdot 2n\cdot 2n}+\frac{(n-m)(2n-m)(3n-m)}{n\cdot 2n\cdot 3n\cdot 3n}+\text{etc.}\right),$$

die Summe welcher Reihe also ausfindig gemacht werden muss.

§12 Für dieses Ziel wollen wir diese allgemeinere Reihe betrachten

$$T = \frac{n-m}{n\cdot n}t^n+\frac{(n-m)(2n-m)}{n\cdot 2n\cdot 2n}t^{2n}+\frac{(n-m)(2n-m)(3n-m)}{n\cdot 2n\cdot 3n\cdot 3n}t^{3n}+\text{etc.}$$

und nach Differenzieren und durch Multiplizieren mit t wird

$$\frac{t\partial T}{\partial t} = \frac{n-m}{n}t^n+\frac{(n-m)(2n-m)}{n\cdot 2n}t^{2n}+\frac{(n-m)(2n-m)(3n-m)}{n\cdot 2n\cdot 3n}t^{3n}+\text{etc.}$$

sein, die Summe welcher Reihe natürlich $(1-t^n)^{-\frac{n-m}{n}}-1$ ist, woher man also

$$\partial T = \frac{\partial t}{t}\left((1-t^n)^{-\frac{n-m}{n}}-1\right)$$

ableitet; als logische Konsequent werden wir

$$T = \int\frac{\partial t}{t}\left((1-t^n)^{-\frac{n-m}{n}}-1\right)$$

haben, welches Integral von der Grenze $t=0$ bis hin zu $t=1$ erstreckt werden muss, wonach unser Wert

$$S = \triangle T$$

sein wird.

§13 Nun haben wir also nur so viel gewonnen, dass die Angelegenheit auf eine freilich neue Integralformel zurückgeführt worden ist, aber eine, die keine Logarithmen beinhaltet. Diese Formel wird sich sogar rational machen lassen, indem man

$$1 - t^n = u^n$$

setzt; denn dann wird

$$\frac{\partial t}{t} = -\frac{u^{n-1}\partial u}{1-u^n}$$

werden und daher werden wir

$$T = -\int \frac{(u^{m-1} - u^{n-1})\partial u}{1-u^n}$$

erlangen, welches Integral, weil es von der Grenze $t = 0$ bis hin zu $t = 1$ erstreckt werden musste, nun von $u = 1$ bis hin zu $u = 0$ erstreckt werden muss. Nachdem die Integrationsgrenzen also vertauscht worden sind, wird also

$$S = \triangle \int \frac{(u^{m-1} - u^{n-1})\partial u}{1-u^n} \begin{bmatrix} \text{von} & u = 0 \\ \text{bis} & u = 1 \end{bmatrix}$$

werden, welches Integral nun gewiss mit Logarithmen und Kreisbogen ausgedrückt werden kann, und so ist dem vorgelegten Problem vollkommen Genüge geleistet worden.

§14 Der zweite Teil dieser Formel lässt direkt eine Integration zu, weil

$$\int \frac{u^{n-1}\partial u}{1-u^n} = -\frac{1}{n}\log(1-u^n)$$

ist, welcher Wert schon für $u = 0$ verschwindet, aber für die andere Grenze geht er als unendlich hervor; der erste Teil enthält integriert auch ein solches Glied $-\frac{1}{n}\log(1-u)$, weil welches mit dem vorhergehenden zusammen $\frac{1}{n}\log\frac{1-u^n}{1-u}$ gibt. Weil also $\frac{1-u^n}{1-u} = n$ ist, werden diese zwei Terme zusammen genommen $\frac{1}{n}\log n$ liefern, alle übrigen Anteile des Integrals werden aber eine endlich Größe haben.

§15 Obwohl aber verschiedenerorts Lehren angegeben worden sind, Integrale solcher Formeln zu finden, glaube ich, dass es nicht unnütz sein wird, diese ganze Integration aus den ersten Prinzipien heraus zu wiederholen und auf eine leicht abweichende Art zu behandeln; diese Untersuchung werde ich hier also prägnanter, als es für gewöhnlich zu geschehen pflegt, hinzufügen.

PROBLEM

Nach Vorlage dieser Integralformel

$$T = \int \frac{u^{m-1} - u^{n-1}}{1 - u^n} \partial u$$

ihren Wert von der Grenze $u = 0$ *bis hin zur Grenze* $u = 1$ *erstreckt ausfindig zu machen.*

LÖSUNG

§16 Gerade haben wir bemerkt, dass das Integral des zweiten Teils

$$\frac{1}{n} \log(1 - u^n)$$

ist und sein unendlicher Wert im Fall $u = 1$ von ersten Teil wiederum aufgehoben wird, woher es genügen wird, allein die Integration des ersten Teils anzugeben; deswegen wollen wir

$$U = \int \frac{u^{m-1} \partial u}{1 - u^n}$$

setzen, sodass

$$\partial U = \frac{u^{m-1} \partial u}{1 - u^n}$$

ist; weil hier der Nenner natürlich den Faktor $1 - u$ hat, entsteht daraus ein solcher Partialbruch

$$\frac{A \partial u}{1 - u},$$

wo

$$A = \frac{u^{m-1}(1-u)}{1-u^n}$$

sein wird, nachdem natürlich $u = 1$ gesetzt worden ist. Gerade haben wir aber gesehen, dass der Wert des Bruches $\frac{1-u}{1-u^n}$ in diesem Fall $\frac{1}{n}$ ist, sodass

$$A = \frac{1}{n}$$

ist, und daher wird der erste Teil des Integrals als

$$\frac{1}{n}\int \frac{\partial u}{1-u} = -\frac{1}{n}\log(1-u)$$

entspringen, welcher mit dem zweiten Teil von T zusammen, wie wir gesehen haben, den Wert

$$\frac{1}{n}\log n$$

ergibt.

§17 Für das Finden der übrigen Anteile dieses Integrals sei

$$1 - 2u\cos\theta + uu$$

irgendein Faktor des Nenners $1 - u^n$, welcher so beschaffen sein muss, dass für

$$uu = 2u\cos\theta - 1$$

gesetzt auch der Nenner selbst verschwindet, aus welcher Bedingung sich der Winkel θ bestimmen lassen wird. Daher folgt aber, dass im Allgemeinen

$$u^\lambda = 2u^{\lambda-1}\cos\theta - u^{\lambda-2}$$

sein wird, aus welcher Form man einsieht, dass die Potenzen von u eine rekurrente Reihe bilden, deren Verhältnisskala $2\cos\theta$, -1 ist; und daher werden sich alle höheren Potenzen von u allein mit der ersten und Konstanten bestimmen lassen. Es ist aber ersichtlich, dass jedes Vielfache dieser Potenzen, wie beispielsweise

$$Auu, \quad Au^3, \quad Au^4 \quad \text{etc.},$$

nach derselben Verhältnisskala $2\cos\theta$, -1 fortschreitet, sodass aus zwei beliebigen leicht die folgende erschlossen werden kann.

§18 Ich habe aber beobachtet, dass diese Progression sehr einfach wird, wenn $A = \sin\theta$ genommen wird; auf diese Weise nehmen wir dieses allbekannte Lemma zur Hilfe

$$\sin(\lambda+1)\theta = 2\cos\theta\sin\lambda\theta - \sin(\lambda-1)\theta,$$

und daher wird man die Reihe dieser Potenzen auf die folgende Weise bilden:

$$\begin{aligned}
u\ \ \sin\theta &= u\sin\theta,\\
u^2\sin\theta &= u\sin 2\theta - \sin\theta,\\
u^3\sin\theta &= u\sin 3\theta - \sin 2\theta,\\
u^4\sin\theta &= u\sin 4\theta - \sin 3\theta,\\
u^5\sin\theta &= u\sin 5\theta - \sin 4\theta\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

und daher schließen wir, dass im Allgemeinen

$$u^\lambda\sin\theta = u\sin\lambda\theta - \sin(\lambda-1)\theta$$

sein wird.

§19 Weil nun

$$\sin(\lambda-1)\theta = \sin\lambda\theta\cos\theta - \cos\lambda\theta\sin\theta$$

ist, wird daraus

$$u^\lambda\sin\theta = u\sin\lambda\theta - \sin\lambda\theta\cos\theta + \cos\lambda\theta\sin\theta$$

werden, als logische Konsequenz

$$u^\lambda = \frac{(u-\cos\theta)\sin\lambda\theta}{\sin\theta} + \cos\lambda\theta,$$

welche Formel zum späteren Gebrauch am besten geeignet ist. Nun, um den Winkel θ zu finden, wollen wir $\lambda = n$ nehmen; es wird

$$u^n = \frac{(u - \cos\theta)\sin n\theta}{\sin\theta} + \cos n\theta$$

sein, woher man den Nenner

$$1 - u^n = \frac{\sin\theta(1 - \cos n\theta) - (u - \cos\theta)\sin n\theta}{\sin\theta}$$

berechnet, welcher, weil er gleich Null sein muss, diese zwei Gleichheiten liefert

$$\sin n\theta = 0 \quad \text{und} \quad \cos n\theta = 1,$$

woher klar ist, dass $n\theta = i\pi$ sein wird, wo i ein ganze gerade oder ungerade Zahl ist; weil aber $\cos n\theta = 1$ sein muss, ist es ersichtlich, dass für i gerade Zahlen genommen werden müssen, sodass die für den Winkel θ anzunehmenden Werte

$$0, \quad \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{4\pi}{n}, \quad \frac{6\pi}{n}, \quad \frac{8\pi}{n} \quad \text{etc.}$$

sind, deren erster 0 den Faktor $1 - u$ des Nenners gibt, welchen wir schon oben erledigt haben.

§20 Nun bezeichne θ irgendeinen anderen dieser Winkel und diese Formel $1 - 2u\cos\theta + uu$ wird gewiss ein Faktor unseres Nenners $1 - u^n$ sein und unser Bruch $\frac{u^{m-1}}{1-u^n}$ wird in aufgelöster Form gewiss einen Teil dieser Form enthalten

$$\frac{N}{1 - 2u\cos\theta + uu},$$

dessen Zähler N, wie ich anderenortes gezeigt habe, aus dieser Form

$$N = \frac{u^{m-1}(1 - 2u\cos\theta + uu)}{1 - u^n}$$

gefunden werden wird, nachdem natürlich $uu - 2u\cos\theta + 1 = 0$ gesetzt worden ist, in welchem Fall so der Zähler wie der Nenner verschwinden wird; daher, um den Wert dieses Bruchs

$$\frac{1 - 2u\cos\theta + uu}{1 - u^n}$$

zu finden, werden die Differentiale anstelle des Zählers und des Nenners eingesetzt

$$\frac{2(u-\cos\theta)}{-nu^{n-1}}$$

geben, was wegen $u^n = 1$

$$\frac{2u(u-\cos\theta)}{-n}$$

wird und so wird der gesuchte Zähler N

$$-\frac{2u^m(u-\cos\theta)}{n} = \frac{2}{n}(u^m\cos\theta - u^{m+1})$$

sein. Oben haben wir aber

$$u^\lambda = \frac{(u-\cos\theta)\sin\lambda\theta}{\sin\theta} + \cos\lambda\theta$$

gefunden, weswegen

$$\begin{aligned} u^m\cos\theta &= \quad \frac{(u-\cos\theta)\cos\theta\sin m\theta}{\sin\theta} + \cos\theta\cos m\theta, \\ -u^{m+1} &= -\frac{(u-\cos\theta)\sin(m+1)\theta}{\sin\theta} - \cos(m+1)\theta \end{aligned}$$

sein wird, daher

$$N = \frac{2}{n}\left(\frac{(u-\cos\theta)(\cos\theta\sin m\theta - \sin(m+1)\theta)}{\sin\theta} + \cos\theta\cos m\theta - \cos(m+1)\theta\right),$$

oder

$$N = \frac{2}{n}\left(-\frac{(u-\cos\theta)\sin\theta\cos m\theta}{\sin\theta} + \sin m\theta\sin\theta\right)$$

oder

$$N = \frac{2}{n}\left(\sin\theta\sin m\theta - (u-\cos\theta)\cos m\theta\right).$$

§21 Also wird unser Bruch $\frac{u^{m-1}}{1-u^n}$ diesen Partialbruch enthalten

$$\frac{2}{n}\cdot\frac{\sin\theta\sin m\theta-(u-\cos\theta)\cos m\theta}{1-2u\cos\theta+uu},$$

welcher also mit ∂u multipliziert integriert werden muss. Weil er aber aus zwei Teilen besteht, gibt der zweite

$$\frac{2}{n}\int\frac{(u-\cos\theta)\cos m\theta\partial u}{1-2u\cos\theta+uu}$$

integriert

$$\frac{\cos m\theta}{n}\log(1-2u\cos\theta+uu),$$

der erste Teil hingegen

$$\frac{2}{n}\sin m\theta\int\frac{\partial u\sin\theta}{1-2u\cos\theta+uu}=\frac{2}{n}\sin m\theta\arctan\frac{u\sin\theta}{1-u\cos\theta}.$$

Und so wird das ganze Integral dieses Teils

$$=-\frac{\cos m\theta}{n}\log(1-2u\cos\theta+uu)+\frac{2\sin m\theta}{n}\arctan\frac{u\sin\theta}{1-u\cos\theta}$$

sein.

§22 Dieses Integral verschwindet nun offensichtlich für $u=0$. Es ist also nur übrig, dass wir 1 anstelle von u schreiben, wonach der logarithmische Anteil

$$\frac{\cos m\theta}{n}\log(2-2\cos\theta)=\frac{\cos m\theta}{n}\log 4\sin^2\frac{1}{2}\theta=\frac{2\cos m\theta}{n}\log 2\sin\frac{1}{2}\theta$$

sein wird. Der Kreisanteil wird

$$\frac{2\sin m\theta}{n}\arctan\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{2\sin m\theta}{n}\arctan\frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}=\frac{(\pi-\theta)\sin m\theta}{n}$$

sein, als logische Konsequenz wird das ganze aus dem Faktor

$$1-2u\cos\theta+uu$$

des Nenners entspringende Integral

$$-\frac{2\cos m\theta}{n}\log 2\sin\frac{1}{2}\theta + \frac{\pi-\theta}{n}\sin m\theta$$

sein. Wenn also nun in dieser Formel anstelle von θ nacheinander die oben angegebenen Werte eingesetzt werden, welche

$$\frac{2\pi}{n}, \quad \frac{4\pi}{n}, \quad \frac{6\pi}{n} \quad \text{etc.}$$

und im Allgemeinen $\frac{2i\pi}{n}$ waren, gibt die Summe all dieser Formeln den wahren Wert von T, nachdem wir natürlich den Term $\frac{1}{n}\log n$ hinzugefügt haben. Nachdem aber im Allgemeinen

$$\theta = \frac{2i\pi}{n}$$

gesetzt worden ist, wird der daraus entspringende Teil des Integrals

$$-\frac{2}{n}\cos\frac{2mi\pi}{n}\log 2\sin\frac{i\pi}{n} + \frac{(n-2i)\pi}{nn}\sin\frac{2mi\pi}{n}$$

sein, wo anstelle von i die Zahlen 1, 2, 3, 4 etc. geschrieben werden müssen, bis das Integral vollständig ist; nachdem alle Werte abgehandelt worden sind, wird der gesuchte Wert T gefunden sein. Wir wollen das an einigen Beispielen illustren.

Beispiel 1

§23 Es sei $n = 2$, und weil m kleiner sein muss als n, damit die Größe

$$\triangle = \int \frac{x^{m-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^m}} \begin{bmatrix} \text{von} & x = 0 \\ \text{bis} & x = 1 \end{bmatrix}$$

nicht unendlich wird, wird notwendig $m = 1$ und daher $\Delta = \frac{\pi}{2}$ sein. Dann wird aber

$$T = \frac{1}{2}\log 2$$

sein. Man addiere also den Term $\frac{1}{2}\log 2$ und es wird $T = \log 2$ hervorgehen; und so wird, wie wir zuvor gefunden haben,

$$S = \frac{\pi}{2}\log 2$$

sein, welches der Wert der Formel

$$\int \frac{-\partial x \log x}{\sqrt{1-xx}}$$

ist.

Beispiel 2

§24 Es sei nun $n = 3$ und es wird m entweder 1 oder 2 sein. Aus jedem der beiden Werte geht aber

$$\triangle = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

hervor. Dann muss aber

$$\theta = \frac{2\pi}{3}$$

genommen werden, welchen einzigen Wert genommen zu haben ausreichen wird, aus welchem

$$T = -\frac{2}{3}\cos\frac{2}{3}m\pi \log\sqrt{3} + \frac{1}{9}\pi \sin\frac{2}{3}m\pi$$

ist, wo darüber hinaus $\frac{1}{3}\log 3$ addiert werden muss. Für den Fall $m = 1$ wird also

$$T = \frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{6\sqrt{3}}\pi \quad \text{und daher} \quad S = \frac{\pi\pi}{3\cdot 9} + \frac{\pi \log 3}{3\sqrt{3}}$$

sein, welches der Wert der Integralformel

$$\int \frac{-\partial x \log x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$$

ist. Für den anderen Fall, wo $m = 2$ ist, wird wie zuvor

$$\triangle = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

sein, aber andererseits

$$T = \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{6\sqrt{3}}\pi, \quad \text{daher} \quad S = \frac{\pi \log 3}{3\sqrt{3}} - \frac{\pi\pi}{27},$$

welches der Wert der Integralformel

$$\int \frac{-x\partial x \log x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$$

ist.

§25 Anstelle mehrerer Beispiele wollen wir eine allgemeine Formel für irgendeine Zahl n angeben, indem wir

$$\theta = \frac{2i\pi}{n}$$

nehmen, bis schließlich $2i > n$ wird, welche Fälle natürlich verworfen werden müssen. Dann werden wir also aus der für den Fall

$$\theta = \frac{2i\pi}{n}$$

entwickelten Form, indem wir anstelle von i der Reihe nach 1, 2, 3 etc. schreiben, diesen Wert finden

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{n}\log - \frac{2}{n}\cos\frac{2m\pi}{n}\log 2\sin\frac{\pi}{n} &+ \frac{(n-2)\pi}{nn}\sin\frac{2m\pi}{n} \\ - \frac{2}{n}\cos\frac{4m\pi}{n}\log 2\sin\frac{2\pi}{n} &+ \frac{(n-4)\pi}{nn}\sin\frac{4m\pi}{n} \\ - \frac{2}{n}\cos\frac{6m\pi}{n}\log 2\sin\frac{3\pi}{n} &+ \frac{(n-6)\pi}{nn}\sin\frac{6m\pi}{n} \\ - \text{etc.} & \end{aligned}$$

Diese Anteile müssen natürlich bis dahin fortgesetzt werden, bis schließlich $i < \frac{1}{2}n$ war, und nach Finden dieses Wertes wird man für das erste Problem $S = \triangle T$ haben, während

$$\triangle = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$$

ist.

§26 In diesem Ausdruck tauchen also Terme zweierlei Art auf, deren erste nur Logarithmen beinhalten, die zweiten aber die Quadratur des Kreises π, und hier trägt es sich glücklicherweise zu, dass diese letztgenannten Anteile alle zu einer einzigen Formel zusammengezogen werden können; wenn die auch für die logarithmischen Anteile geleistet werden könnte, wäre das für ein Fund von größter Bedeutung zu halten. Was aber die Kreisteile angeht, werden wir deren Kontraktion im folgenden Problem lehren.

PROBLEM

Alle Kreisteile, zu welchen wir im vorhergehenden Problem geführt worden sind, zu einer Summe zusammenzufassen oder nach Weglassen des gemeinsamen Faktors $\frac{\pi}{2nn}$ diese Reihe

$$(n-2)\sin\frac{2m\pi}{n}+(n-4)\sin\frac{4m\pi}{n}+\cdots+(n-2i)\sin\frac{2im\pi}{n}$$

zu summieren, solange natürlich $2i$ die Zahl n nicht übersteigt.

LÖSUNG

§27 Wir wollen der Kürze wegen $\frac{m\pi}{n}=\varphi$ setzen und die vorgelegte Reihe wird von selbst in diese zwei aufgelöst

$$n\sin 2\varphi + n\sin 4\varphi + n\sin 6\varphi + \cdots + n\sin 2i\varphi,$$

$$n\sin 2\varphi + 4\sin 4\varphi + 6\sin 6\varphi + \cdots + 2i\sin 2i\varphi;$$

denn dann wird die erste weniger die zweite den Wert geben, den wir suchen.

§28 Für die erste wollen wir nun

$$p=\sin 2\varphi+\sin 4\varphi+\sin 6\varphi+\cdots+\sin 2i\varphi$$

setzen und durch Multiplizieren mit $2\sin\varphi$ wird

$$\begin{aligned}2p\sin\varphi = \cos\varphi - \cos 3\varphi - \cos 5\varphi - \cdots - \cos(2i-1)\varphi - \cos(2i+1)\varphi\\ + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \cdots + \cos(2i-1)\varphi\end{aligned}$$

werden, woher

$$p = \frac{\cos\varphi - \cos(2i+1)\varphi}{2\sin\varphi}$$

wird.

§29 Für das Summieren der anderen Reihe wollen wir zuerst diese Reihe betrachten

$$q = \cos 2\varphi + \cos 4\varphi + \cos 6\varphi + \cdots + \cos 2i\varphi,$$

deren Differential sofort

$$\frac{-\partial q}{\partial\varphi} = 2\sin 2\varphi + 4\sin 4\varphi + 6\sin 6\varphi + \cdots + 2i\sin 2i\varphi$$

gibt. Nun werden wir aber

$$\begin{aligned} 2q\sin\varphi = &- \sin\varphi + \sin 3\varphi + \sin 5\varphi + \cdots - \sin(2i-1)\varphi + \sin(2i+1)\varphi \\ &- \sin 3\varphi - \sin 5\varphi - \cdots - \sin(2i-1)\varphi \end{aligned}$$

oder

$$2q\sin\varphi = -\sin\varphi + \sin(2i+1)\varphi$$

und daher

$$q = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(2i+1)\varphi}{2\sin\varphi}$$

finden; als logische Konsequenz werden wir

$$\frac{\partial q}{\partial\varphi} = \frac{(2i+1)\cos(2i+1)\varphi}{2\sin\varphi} - \frac{\sin(2i+1)\varphi\cos\varphi}{2\sin^2\varphi}$$

haben, nach Finden welcher Werte die erste Reihe weniger die zweite, das heißt $np + \frac{\partial q}{\partial\varphi}$, den gesuchten Wert geben wird, aber die im Problem vorgelegte Reihe wird mit $\frac{\pi}{nn}$ multipliziert die Summe aller Kreisteile geben, die wir suchen.

§30 Aber, um die Werte p und q zu finden, müssen zwei Fälle unterschieden werden, je nachdem ob n eine gerade oder ungerade Zahl war. Sie sei also zuerst gerade und man setze $n = 2i$, sodass i den Ausdruck $\frac{n}{2}$ nicht übersteigen kann, und weil wir ja $\varphi = \frac{m\pi}{n}$ gesetzt haben, wird nun $\varphi = \frac{m\pi}{2i}$ sein, woher wir

$$p = \frac{1}{2}\cot\frac{m\pi}{2i} - \frac{1}{2}\cos m\pi \cot\frac{m\pi}{2i} + \frac{1}{2}\sin m\pi$$

ableiten; dieser Ausdruck wird wegen $\sin m\pi = 0$ auf diesen zurückgeführt

$$p = \frac{1}{2}\cot\frac{m\pi}{2i}(1 - \cos m\pi),$$

wo $\cos m\pi = \pm 1$ ist, je nachdem ob m eine gerade oder ungerade Zahl war, und im ersten Fall wird $p = 0$ sein, im zweiten hingegen $p = \cot\frac{m\pi}{2i}$.

§31 Weiter wird aber in diesem Fall $n = 2i$

$$\frac{\partial q}{\partial \varphi} = i\cos m\pi \cot\frac{m\pi}{2i} - \frac{1}{2}(2i+1)\sin m\pi - \frac{1}{2}\sin m\pi \cot^2\frac{m\pi}{2i}$$

sein, welcher Ausdruck wegen $\sin m\pi = 0$ in diesen übergeht

$$\frac{\partial q}{\partial \varphi} = i\cos m\pi \cot\frac{m\pi}{2i}.$$

Daher, weil die gesuchte Summe $np + \frac{\partial q}{\partial \varphi}$ ist, wird sie $i\cot\frac{m\pi}{2i}$ sein, als logische Konsequenz, indem man anstelle von n wieder $2i$ einsetzt, wird die Summe

$$= \frac{1}{2}n\cot\frac{m\pi}{n}$$

sein.

§32 Wir wollen nun auch den anderen Fall entwickeln, in welchem n eine ungerade Zahl ist, und weil ja $2i + 1$ die Zahl n nicht übersteigen darf, wird natürlich $2i + 1 = n$ gesetzt werden können, wonach wir sofort

$$p = \frac{1}{2}\cot\frac{m\pi}{n} - \frac{\cos m\pi}{2\sin\frac{m\pi}{n}}$$

haben, weiter ist aber

$$\frac{\partial q}{\partial \varphi} = \frac{n\cos m\pi}{2\sin\frac{m\pi}{n}} - \frac{\sin m\pi \cot\frac{m\pi}{n}}{2\sin\frac{m\pi}{n}}$$

und daher die gesuchte Summe selbst

$$np + \frac{\partial q}{\partial \varphi} = \frac{n\cos\frac{m\pi}{n}}{2\sin\frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{2}n\cot\frac{m\pi}{n}.$$

§33 Weil also, ob n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, dieselbe Summe hervorgeht, nämlich $\frac{1}{2}n\cot\frac{m\pi}{n}$, wird diese mit $\frac{\pi}{nn}$ multipliziert die Summe aller Kreisanteile geben, deren Summe also $\frac{\pi}{2n}\cot\frac{m\pi}{n}$ sein wird; als logische Konsequenz wird die oben für T gefundene allgemeine Formel nun sein:

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{n}\log n + \frac{\pi}{2n}\cot\frac{m\pi}{n} &- \frac{1}{n}\cos\frac{2m\pi}{n}\log 2\sin\frac{\pi}{n} \\ &- \frac{1}{n}\cos\frac{4m\pi}{n}\log 2\sin\frac{2\pi}{n} \\ &- \frac{1}{n}\cos\frac{6m\pi}{n}\log 2\sin\frac{3\pi}{n} \\ &- \text{etc.}, \end{aligned}$$

welcher Ausdruck weiter mit

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$$

multipliziert den Wert des im erstem Problem behandelten Ausdrucks geben wird, und so wird es nun aus dieser neuen Formel heraus um vieles leichter sein, nach Belieben spezielle Beispiele zu entwickeln.

§34 Bezüglich der im ersten Problem behandelten Integralformel tritt ein völlig einzigartiger Fall auf, wannimmer $m = n$ ist; dann wird nämlich $\triangle = \infty$. Aber andererseits wird man $T = \int 0\partial u$ haben und so geht $S = \triangle T = \infty \cdot 0$ hervor, deren Wert also auf diese Weise überhaupt nicht bestimmt wird. Aber nach Setzen von $m = n$ wird

$$S = -\int \frac{x^{n-1}\partial x \log x}{1 - x^n}$$

sein, welche Formel mit einer Reihe so entwickelt wird

$$S = \int -x^{n-1}\partial x \log x(1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \text{etc.});$$

diese führt von $x = 0$ bis hin zu $x = 1$ erstreckt wegen

$$\int -x^{\lambda-1}\partial x \log x = \frac{1}{\lambda\lambda}$$

sofort zu dieser Reihe

$$S = \frac{1}{nn}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.}\right);$$

weil die Summe dieser Reihe $\frac{\pi\pi}{6}$ ist, wird

$$S = \frac{\pi\pi}{6nn}$$

sein. Aber es steht kein Weg offen, den Wert aus der vorhergehenden Lösung heraus abzuleiten.

Problem

Nach Vorlage dieser Integralformel

$$V = \int -\partial v(1-v)^{\theta-1}\log v$$

ihren Wert von der Grenze $v = 0$ *bis* $v = 1$ *erstreckt mit einem endlichen Ausdruck darzustellen.*

Lösung

§35 Weil $\log v = \log(1-(1-v))$ ist, wird vermöge einer Reihe

$$-\log v = \frac{1-v}{1} + \frac{(1-v)^2}{2} + \frac{(1-v)^3}{3} + \text{etc.}$$

sein und so wird

$$V = \int \partial v\left(\frac{(1-v)^{\theta}}{1} + \frac{(1-v)^{\theta+1}}{2} + \frac{(1-v)^{\theta+2}}{3} + \text{etc.}\right)$$

sein. Daher, weil im Allgemeinen

$$\int \partial v(1-v)^{\lambda} = -\frac{(1-v)^{\lambda+1}}{\lambda+1} + C$$

ist, muss, damit dieses Integral für $v=0$ verschwindet, $C = \dfrac{1}{\lambda+1}$ werden. Nachdem nun $v=1$ gesetzt worden ist, wird für unseren Fall

$$\int \partial v(1-v)^{\lambda} = \frac{1}{\lambda+1}$$

sein. Deswegen werden wir

$$V = \frac{1}{1(\theta+1)} + \frac{1}{2(\theta+2)} + \frac{1}{3(\theta+3)} + \text{etc.}$$

haben.

§36 Weil nun

$$\frac{1}{1(\theta+1)} = \frac{1}{\theta}\left(1 - \frac{1}{\theta+1}\right)$$

und im Allgemeinen

$$\frac{1}{\alpha(\theta+\alpha)} = \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\theta+\alpha}\right)$$

ist, wird unsere Reihe in diese zwei Teile aufgelöst:

$$V = \frac{1}{\theta}\left\{\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{5} & + \text{etc.} \\ -\frac{1}{\theta+1} & - & \frac{1}{\theta+2} & - & \frac{1}{\theta+3} & - & \frac{1}{\theta+4} & - & \frac{1}{\theta+5} & - \text{etc.} \end{array}\right\};;$$

damit diese leichter auf Integralformeln zurückgeführt werden können, werde die erste so dargestellt

$$p = \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \text{etc.},$$

die andere hingegen auf diese Weise

$$q = \frac{y^{\theta+1}}{\theta+1} + \frac{y^{\theta+2}}{\theta+2} + \frac{y^{\theta+3}}{\theta+3} + \text{etc.},$$

welche natürlich im Fall $y = 1$ in unsere Reihen übergehen. Daher geht aber hervor:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial y} &= 1 + \quad y \quad + y^2 \quad + \quad y^3 \quad + \text{etc.} = \frac{1}{1-y},\\ \frac{\partial q}{\partial y} &= y^\theta + y^{\theta+1} + y^{\theta+2} + y^{\theta+3} + \text{etc.} = \frac{y^\theta}{1-y}.\end{aligned}$$

Daher werden wir also

$$\partial p - \partial q = \frac{\partial y(1-y^\theta)}{1-y}$$

haben; als logische Konsequenz wird also

$$p - q = \int \frac{\partial y(1-y^\theta)}{1-y}$$

sein. Indem man diese Integralformel von $y = 0$ bis $y = 1$ erstreckt, wird unser gesuchter Wert

$$V = \frac{1}{\theta} \int \frac{\partial y(1-y^\theta)}{1-y}$$

sein, welche natürlich immer mit Logarithmen und Kreisbögen angegeben werden kann.

§37 Um diese Formeln der zuvor behandelten etwas mehr anzugleichen, wollen wir zuerst $v = x^n$ setzen, sodass die vorgelegte Formel nun

$$V = nn \int -x^{n-1}\partial x(1-x^n)^{\theta-1} \log x$$

ist. Dann wollen wir aber in der Formel, zu welcher wir geführt worden sind, in gleicher Weise $y = u^n$ setzen und es wird

$$V = \frac{n}{\theta} \int \frac{u^{n-1}\partial u(1-u^{n\theta})}{1-u^n}$$

werden, der Nenner und ein Anteil welcher Formel schon mit der oben gefundenen Form

$$T = \int \frac{(u^{m-1} - u^{n-1})\partial u}{1-u^n}$$

übereinstimmt. Um die Gleichheit zu vervollkommnen, wollen wir $n\theta + n = m$ und daher $\theta = \frac{m-n}{n}$ setzen und so wird die vorgelegte Formel

$$V = nn \int -x^{n-1} \partial x (1-x^n)^{\frac{m-2n}{n}} \log x$$

oder

$$V = nn \int \frac{-x^{n-1} \partial x \log x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{2n-m}}}$$

werden. Dann wird derselbe Wert aber auch so ausgedrückt werden

$$V = \frac{nn}{m-n} \int \frac{u^{n-1} - u^{m-1}}{1-u^n} \partial u,$$

das heißt

$$V = \frac{nn}{n-m} T.$$

Daher hängen also, weil aus dem erstem Problem $S = \triangle T$ ist, die beiden Formeln S und V nun so voneinander ab, dass

$$V = \frac{nn}{n-m} \frac{S}{\triangle}$$

ist.

Scholion

§38 Diese Reduktion kann noch auf eine andere Weise ähnlicher gemacht werden, indem wir $n\theta = m$ oder $\theta = \frac{m}{n}$ setzen, und nun wird die vorgelegte Formel

$$V = nn \int -x^{n-1} \partial x \log x (1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}$$

oder

$$V = nn \int \frac{-x^{n-1} \partial x \log x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}}$$

sein; dann wird aber die davon abgeleitete Formel

$$V = \frac{nn}{m}\int \frac{u^{n-1} - u^{m+n-1}}{1-u^n}\partial u$$

sein. Weil aber

$$u^{m+n-1} = u^{m-1}(1 - (1-u^n))$$

ist, wird diese Formel in die nachstehende überführt werden

$$\frac{nn}{m}\int u^{m-1}\partial u + \frac{nn}{m}\int \frac{u^{n-1} - u^{m-1}}{1-u^n}\partial u$$

und daher

$$V = \frac{nn}{mm} - \frac{nn}{m}T,$$

weswegen diese zwei Integralformeln

$$S = \int \frac{-x^{m-1}\partial x \log x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^m}} \quad \text{und} \quad \frac{V}{nn} = \int \frac{-x^{n-1}\partial x \log x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}}$$

so miteinander zusammenhängen, dass wegen $T = \frac{S}{\triangle}$

$$V = \frac{nn}{mm} - \frac{nn}{m}\frac{S}{\triangle}$$

ist, woher, weil die zweite Formel als leichter angesehen werden kann also die von S, wird nach Finden des Wertes von V

$$S = \triangle\left(\frac{1}{m} - \frac{m}{nn}V\right)$$

sein. Diese Reduktion ist aber jener bei weitem vorzuziehen, die wir zuvor gefunden haben, welcher natürlich diesen Mangel hatte, dass der dort zu behandelnde differentielle Bruch ein unechter war, weil im Zähler die Potenz $u^{n\theta+n-1}$ auftritt, die natürlich größer ist also die Potenz u^n des Nenners; deshalb wird erst jetzt das für die Größe T zuvor entwickelte Integral hier verwendet werden können.