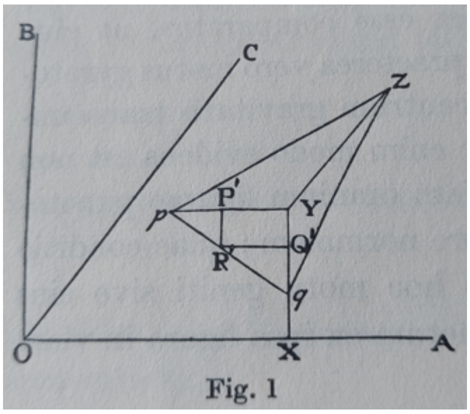
Über das Problem der orthogonalen Trajektorien übertragen auf Flächen*

Leonhard Euler

§1 Die Frage, welche ich hier behandeln will, verhält sich so: Nach Vorlage unendlich vieler Flächen, enthalten in einer gewissen Gleichung zwischen drei Koordinaten, andere ausfindig zu machen, welche jene überall in einem rechten Winkel schneiden. Hier werden wir vor allem nach einem Kriterium zu suchen haben, mit welchem die Normalität zwischen jenen Schnitten bestimmt wird. Zu diesem Zweck wollen wir eine beliebige auf die drei zueinander senkrechten Achsen bezogenen Achsen betrachten, welche OA, OB, OC sein, welchen die drei Koordinaten $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ als parallel festgelegt werden, von welchen also (Fig. 1) die Lage eines beliebigen Punktes Z der vorgelegten Fläche bestimmt wird.

*Originaltitel: "De problemate traiectoriarum orthogonalium ad superficies translato", zuerst publiziert in: *Mémoires de l'académie des sciences de St.-Petersbourg, Band* 7 (1820, geschrieben 1782): pp. 33 – 60, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 29, pp. 276 – 308, Eneström Nummer E757, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".



Der Scan zeigt die entsprechende Figur der Opera Omnia Version.

Damit nun ihr Schnitt, von einer bestimmten anderen Fläche gemacht, bestimmt werden kann, wollen wir die Ebene suchen, welche unsere Fläche im Punkt Z berührt.

§2 Für die diese gegebene Fläche sei die Differentialgleichung

$$dz = pdx + qdy.$$

Und man stelle sich den Schnitt der Ebene AOC parallel und durch den Punkt Z gemacht vor, für welche also y konstant und $dz = pdx$ sein wird; wenn also Zp die Tangente dieses Schnitts und Yp die der Achse OA parallele Subtangente ist, wird

$$Yp = \frac{zdx}{dz} = \frac{z}{p}$$

sein. In gleicher Weise stelle man sich einen anderen Schnitt der Ebene BOC parallel vor, deren Tangente die Gerade Zq sei, deren Subtangente also, wegen des Konstanten x und $dz = qdy$, wird die Subtangente $Yq = \frac{z}{q}$ sein. Daher ist klar, weil die beiden Geraden Zp und Zq die Fläche berühren, dass die ganze Tangentialebene Zpq sein wird.

§3 Wir wollen nun eine andere mit denselben Koordinaten ausgedrückte Fläche betrachten, welche jene im Punkt Z normal durchlaufen muss, für welche wir diese Differentialgleichung festlegen wollen

$$dz = Pdx + Qdy.$$

Es ist also zu bewirken, dass die diese Fläche berührende Ebene zu der vorhergehenden senkrecht ist, was passieren wird, wenn die Gerade zur Fläche normal auf die Ebene trifft, welche die vorhergehende Fläche berührt. Deswegen wollen wir für diese Fläche die Lage der Gerade ausfindig machen, welche zu ihr orthogonal ist.

§4 Wir wollen also auch hier (Fig. 2) einen der Ebene AOC parallelen und durch den Punkt Z gemachten Schnitt betrachten, die Normale welches Schnittes die Gerade ZP sei und weil hier y konstant ist,

bla

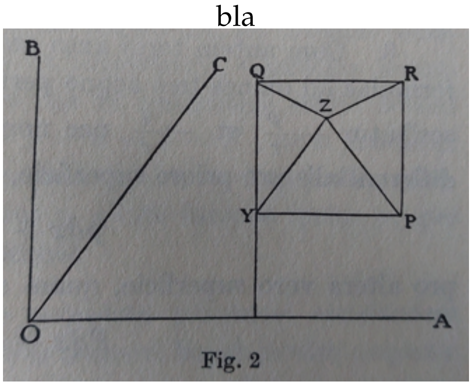


Fig. 2

wird $dz = Pdx$ sein und die Subnormale

$$YP = \frac{zdz}{dx} = zP.$$

In gleicher Weise geschehe der Schritt durch Z parallel zur Ebene BOC, sodass nun x konstant ist und $dz = Qdy$ ist, und ZQ sei orthogonal zu diesem Schnitt, und die Subnormale wird

$$YQ = \frac{zdz}{dy} = zQ$$

sein. Man betrachte nun das rechtwinklige Parallelogramm $YPQR$, und die Gerade ZR wird orthogonal zu beiden Schnitten sein, und daher normal zur Fläche selbst, und so wird $YP = QR = zP$ und $YQ = PR = zQ$ sein. Nun ist es also für unser Unterfangen notwendig, dass die Gerade ZR auf die Tangentialebene Zpq der vorhergehenden Figur fällt.

§5 Man überführe also (Fig. 1) diesen Punkt R auf den Punkt R' der vorhergehenden Figur, woraus man zu den geraden Yp und Yq die Normalen $R'P'$ und $R'Q'$ zeichne, weil welche hier auf die andere Seite fallen, wird

$$R'P' = -zQ \quad \text{und} \quad R'Q' = -zP$$

sein. Weil also

$$YP = \frac{z}{p} \quad \text{ist, wird} \quad pP' = \frac{z}{p} + zP$$

sein, woher die Ähnlichkeit der Dreiecke $pP'R'$ und pYq dieses Verhältnis geben wird

$$\frac{1}{p} + P : -Q = \frac{1}{p} : \frac{1}{q},$$

woher diese Gleichheit folgt

$$1 + Pp + Qq = 0,$$

welche also ein Kriterium beinhaltet, dass die beiden Flächen im Punkt Z zueinander normal sind.

§6 Weil aber die drei angenommenen Achsen miteinander vertauschbar sind, dass unsere Formeln sich auf alle drei gleichermaßen erstrecken, ist nichts anderes von Nöten als dass anstelle von P, Q einfach $-\frac{p}{r}$ und $-\frac{q}{r}$ und $-\frac{P}{R}$ und $-\frac{Q}{R}$ geschrieben wird. Denn auf diese Weise wird die Differentialgleichung für die erste Fläche, welche wir als die *zu schneidende* bezeichnen wollen,

$$pdx + qdy + rdz = 0$$

sein, für die andere Fläche hingegen, welche wir als *schneidende* bezeichnen wollen, wird die Gleichung

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

entspringen. Und nun werden die beiden Flächen sich orthogonal schneiden, wenn

$$Pp + Qq + Rr = 0$$

war. Also geht die ganze Aufgabe darauf zurück, dass man ermittelt, wie aus der gegebenen Gleichung für die zu schneidende

$$pdx + qdy + rdz = 0$$

die Gleichung für die schneidende

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

gefunden werden muss, sodass das Kriterium $pp + Qq + Rr = 0$ erfüllt wird.

§7 Hier betrachten wir also die Gleichung für die zu schneidende

$$pdx + qdy + rdz = 0$$

als gegeben, und dennoch lassen sie sich nicht nach Belieben annehmen, weil nicht alle Differentialgleichungen zwischen drei Variablen x, y, z überhaupt möglich sind, sondern nur die, in denen ein gewisses Merkmal auftritt, und dieses Merkmal besteht darin, dass gelten muss:

$$\left(\frac{pdq - qdp}{dz}\right) + \left(\frac{qdr - rdq}{dx}\right) + \left(\frac{rdp - pdr}{dy}\right) = 0.$$

Denn wenn dies nicht passiert, wird die Gleichung in sich absurd sein, und überhaupt nichts bedeuten, sondern enthält viel mehr einen offenkundigen Widerspruch in sich.

§8 Wannimmer aber dieses Merkmal vorhanden ist, dann ist die Gleichung immer möglich und daher wird sich ein Multiplikator angeben lassen, mit welchem sie integrierbar gemacht wird. Ja diese Aufgabe wird sogar bewältigt werden können, wenn zuerst eine der Variablen, wie etwa z, als Konstante angesehen wird, dass nur $pdx + qdy = 0$ ist, weil welche nur zwei Variablen beinhaltet, ist sie auf die gewohnte Weise zu behandeln. Wir wollen festlegen, dass ihr Integral v gefunden worden ist, sodass, wegen des konstant angenommenen z, das vollständige Integral $v = Z$ ist. Auf dieselbe Weise, indem man y als Konstante betrachtet, wird man das Integral der Gleichung $pdx + rdz = 0$ finden, welches u sei, sodass das vollständige Integral $u = Y$ gesetzt werden muss. Aus beiden Integralen zusammen wird man also $v - u = Z - Y$ berechnen; und wenn das zuvor angegebene Merkmal auftreten soll, wird sich die Formel $v - u$ in zwei Teile auflösen lassen, von welchen der eine eine

Funktion nur von z ist, der andere eine nur von y, auf welche Weise die beiden Funktionen Z und Y bestimmt werden.

§9 Aber die vollständige Integralgleichung wird außerdem die beliebige Konstante a involvieren, weil sich welcher unendlich viele Werte zuteilen lassen, wird unsere Differentialgleichung: $pdx + qdy + rdz = 0$ zugleich unendlich viele Flächen in sich umfassen, welche also alle von der zu findenden schneidenden Fläche gleichermaßen überall in rechten Winkeln geschnitten werden. Deswegen werden wir jene Konstante a, welche durch die Integration eingeführt wird, den variablen *Parameter* nennen, dessen Veränderung unendlich viele zu schneidende Flächen liefern wird.

§10 Wenn also umgekehrt unendlich viele zu schneidende Flächen vorgelegt werden, erfasst in einer einzigen Gleichung zwischen den drei Variablen x, y, z und dem variablen Parameter a erfasst, muss daraus unsere Differentialgleichung der Form $pdx + qdy + rdz = 0$ so gefunden werden, dass der Parameter a in sie nicht weiter eingeht. Daher, welche endliche Gleichung auch immer zwischen den drei Variablen x, y, z und dem variablen Parameter a vorgelegt wird, muss aus ihr vor allem der Wert dieses Parameters a ermitteln werden, welcher also einer gewissen Funktion nur von x, y, z gleich werden wird, das Differential welches Ausdrucks uns erst gleich Null gesetzt die Differentialgleichung $pdx + qdy + rdz = 0$ geben wird; daher muss dann anschließend die Gleichung für die zu schneidenden Flächen abgeleitet werden.

§11 Nachdem also die Differentialgleichung für die zu schneidenden Flächen $pdx + qdy + rdz = 0$ aufgestellt worden ist, wird daran zu arbeiten sein, dass daraus die Gleichung für die schneidenden Flächen $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ gefunden wird; hier ist es freilich ersichtlich, dass eine der drei Buchstaben P, Q, R durch Teilung beseitigt werden kann, dann ist aber ein anderer aus der kanonischen Gleichung $Pp + Qq + Rr = 0$ zu bestimmen, sodass nur eine einzige beliebige Größe in der Rechnung zurückbleibt, welche aber so definiert werden muss, dass die Gleichung möglich wird, was immer auf unendlich viele Arten geleistet werden kann, wie im Folgenden deutlich werden wird.

§12 Weil aber kein Grund besteht, warum einer der drei Buchstaben P, Q, R eher als die übrigen aus der Gleichung $Pp + Qq + Rr = 0$ bestimmt wird, wird es sehr förderlich sein, spezielle Fälle zu betrachten, in welchen einer dieser

Buchstaben Null gesetzt wird. Es sei also zuerst $P = 0$ und weil $Qq + Rr = 0$ sein muss, wird $Q : R = r : -q$ sein; daher, weil nur das Verhältnis in diese Rechnung eingeht, wird man $Q = r$ und $R = -q$ setzen können, sodass man für die zu schneidenden diese Gleichung hat: $rdy - qdz = 0$, wenn welche nur die zwei Variablen y und z beinhaltet, sodass die dritte x überhaupt nicht vorhanden ist, wird die Integration keine Schwierigkeiten bereiten, und weil das Integral eine beliebige Konstante erhält, werden zugleich unendlich viele schneidende Kurven erlangt.

§13 Auf dieselbe Weise, wenn $Q = 0$ wird, wird $Pp + Rr = 0$ und daher $P = r$ und $R = -p$ sein müssen, sodass man die Gleichung $rdx - pdz = 0$ hat, wenn welche nur die zwei Variablen x und z enthalten hat, würde sie ebenso eine partikuläre Lösung liefern. Wenn man also schließlich $R = 0$ nimmt, muss $P = q$ und $Q = -p$ werden, sodass die Gleichung $qdx - pdy = 0$ ist, welche oftmals auch eine Lösung liefern kann, je nachdem wie die Differentialgleichung für die zu schneidenden Flächen beschaffen war.

§14 Nachdem aber diese Fälle gleichsam als die grundlegenden festgelegt worden sind, werden sie sich beliebig miteinander kombinieren lassen. Indem man schließlich beliebige Buchstaben L, M, N einführt, wird man im Allgemeinen

$$P = Mr - Nq, \quad Q = Np - Lr \quad \text{und} \quad R = Lq - Mp$$

setzen können. Daher wird nämlich offenkundig $Pp + Qq + Rr = 0$ sein; und so wird man für die zu schneidenden Flächen diese sehr allgemeine Differentialgleichung haben:

$$dx(Mr - Nq) + dy(Np - Lr) + dz(Lq - Mp) = 0$$

haben, welche, auch wenn sie drei beliebige Größen zu beinhalten scheint, dennoch zu verstehen ist, tatsächlich nur eine einzige zu involvieren. Aber diese Menge dieser Buchstaben dient hauptsächlich dafür, dass sie sich so bestimmen lassen, dass daher eine mögliche Gleichung gefunden wird.

§15 Es wird aber genügen nur partikuläre Gleichungen erhalten zu haben, weil ja aus zwei solchen Lösungen sehr leicht die vollständige gebildet werden können wird. Wenn nämlich die Integralformel gefunden worden ist, wie etwa von $du = 0$, sodass $u = b$ ist, wo b einen variablen Parameter bedeutet, enthält sie unendlich viele schneidende Flächen. Und wenn außerdem eine andere solch Integralformel wie $dv = 0$ bekannt wird, sodass $v = c$ auch eine partikuläre Lösung darbietet, dann wird der Frage freilich die aus den beiden zusammengesetzte Gleichung genügen:

$$f du + g dv = 0.$$

Daher, wenn für f irgendeine Funktion von u und für g irgendeine von v angenommen wird, wird eine sehr allgemeine der Frage Genüge leistende Gleichung entspringen, nämlich:

$$\Phi : u = \varphi : v,$$

oder man wird einfacher $v = \Phi : u$ setzen können, und diese Bedeutung erstreckt sich sehr weit, weil sie nicht nur alle dem Stetigkeitsgesetz folgenden Funktionen, sondern auch alle unstetigen Funktionen bedeutet.

§16 Diese Lösung hat also eine weit andere Natur als die Lösung des Problems der orthogonalen Trajektorien, welche natürlich nur unendlich viele aus der Veränderlichkeit des Parameters entspringende schneidende Kurven liefert, während in die gegenwärtige Lösung sogar eine völlig unbestimmte Funktion eingeht, welche nicht nur unendlich viele Flächen, sondern sogar unendlich viele Arten von Flächen umfasst.

§17 Es ist aber meist äußert schwierig Fälle von dieser Art, in denen die Gleichung möglich ist, zu finden, und oftmals erfordert diese Aufgabe großen Scharfsinn; besonders wenn die zu schneidenden Flächen nicht hinreichend einfach sind; hier ist besonders das zu erwirken, dass die Lage der drei Achsen an die Lage des Problems maximal angepasst gefunden wird; deswegen möchte ich die folgenden Probleme hier beifügen, aus welchen sehr viele außerordentliche Kunstgriffe Probleme von dieser Art zu behandeln zutage treten werden. Dort habe ich meist die eingangs gefundenen Formeln genutzt, wo $r = -1$ und $R = -1$ war.

PROBLEM 1

§18 *Wenn für die zu schneidenden Flächen $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ war, welche Gleichung die für unendlich viele zueinander parallele Ebenen ist, die Gleichung für die schneidenden Flächen zu finden.*

LÖSUNG

Weil das Differential der vorgelegten Gleichung $dz = \alpha dx + \beta dy$ ist, geht nach Vergleich dieser mit der Gleichung $dz = pdx + qdy$ $p = \alpha$, $q = \beta$ hervor. Also liefert für die schneidenden Flächen, mit der Gleichung $dz = Pdz + Qdy$ ausgedrückt, die kanonische Gleichung $1 + \alpha P + \beta Q = 0$

$$Q = -\frac{1+\alpha P}{\beta},$$

nach Einsetzen welches Wertes man

$$dz = Pdx - \frac{1+\alpha P}{\beta}dy \quad \text{oder} \quad dz + \frac{dy}{\beta} = \frac{P}{\beta}(\beta dx - \alpha dy)$$

berechnet. Daher folgert man nun leicht, dass $\frac{P}{\beta}$ eine Funktion von $\beta x - \alpha y$ sein muss, dass Integral selbst aber auch einer Funktion von dieser Art gleich sein wird, sodass man diese vollständige Integralgleichung hat:

$$z + \frac{y}{\beta} = F : (\beta x - \alpha y),$$

welche Gleichung also unendlich mal unendlich viele Flächen umfasst. Wenn nämlich nur

$$z + \frac{y}{\beta} = C(\beta x - \alpha y)$$

wäre, enthielte diese Gleichung schon unendlich viele zueinander parallele ebene Flächen; weil also jede beliebige Funktion gleichermaßen Genüge leistet, ist es offenkundig, dass die Anzahl der Lösung unendlich Mal größer ist.

PROBLEM 2

§19 *Wenn für die zu schneidenden Flächen $zz = cc - xx - yy$ war, welche Gleichung unendlich viele konzentrische Kugeln umfasst, die Gleichung für die schneidenden Flächen zu finden.*

LÖSUNG

Weil durch Differenzieren

$$zdz = -xdx - ydy \quad \text{oder} \quad dz = -\frac{x}{z}dx - \frac{y}{z}dy$$

hervorgeht, wird

$$p = -\frac{x}{z} \quad \text{und} \quad q = -\frac{y}{z}$$

sein. Wenn nur für die schneidenden Flächen

$$dz = Pdx + Qdy \quad \text{wegen} \quad 1 + Pp + Qq = 0$$

gesetzt wird, wird

$$p = -\frac{x}{z} \quad \text{und} \quad q = -\frac{y}{z}$$

sein. Wenn man nun für die schneidenden Flächen

$$dz = Pdx + Qdy \quad \text{wegen} \quad 1 + Pp + Qq = 0$$

gesetzt wird, muss

$$1 - \frac{Px}{z} - \frac{Qy}{z} = 0$$

werden, woher

$$Q = \frac{z - Px}{y}$$

wird, nach Einsetzen welches Wertes in jener Gleichung diese berechnet wird:

$$dz = Pdx + \left(\frac{z - Px}{y}\right) dy \quad \text{oder} \quad ydz - zdy = P(ydx - xdy).$$

Daher ist klar, dass P eine Funktion des Bruchs $\frac{x}{y}$ sein muss und das vollständige Integral

$$\frac{z}{y} = F : \frac{x}{y} \quad \text{oder} \quad z = yF : \frac{x}{y}.$$

Aber $F : \frac{x}{y}$ enthält alle Funktionen keiner Dimension von x und y; daher wird z irgendeiner Funktion einer Dimension von x und y gleich wird, welche

Gleichung gänzlich alle Kegel mit Scheitel im Mittelpunkt der konzentrischen Kugeln, welche Form auch immer die Basen haben. Denn alle aus dem Mittelpunkt zur Fläche eines solchen Kegels gezogenen Geraden sind natürlich normal zur Kugeloberfläche.

PROBLEM 3

§20 *Wenn für die schneidenden Flächen die Gleichung*

$$zz = \alpha xx + \beta yy + \gamma$$

gegeben war, die Gleichung für die schneidenden Flächen zu finden.

LÖSUNG

Weil also

$$dz = \frac{\alpha x}{z}dx + \frac{\beta y}{z}dy$$

ist, wird man

$$p = \frac{\alpha x}{z} \quad \text{und} \quad q = \frac{\beta y}{z}$$

haben; wenn man für die zu schneidenden Flächen $dz = Pdx + Qdy$ setzt, muss aus der kanonischen Gleichung werden:

$$z + \alpha Px + \beta Qy = 0,$$

woher $Q = -\frac{z+\alpha Px}{\beta y}$ wird, nach Einsetzten welches Wertes man diese Gleichung berechnet:

$$dz = Pdx - \left(\frac{z + \alpha Px}{\beta y}\right) dy,$$

oder

$$\beta ydz + zdy = P(\beta ydx - \alpha xdy),$$

welche in diese teilweise sofort integrierbar überführt wird

$$\frac{\beta y dz + z dy}{yz} = \frac{Px}{z}\left(\frac{\beta y dx - \alpha x dy}{xy}\right),$$

woher durch Integrieren

$$\beta \ln z + \ln y = \int \frac{Px}{z} \cdot d.(\beta \ln x - \alpha \ln y)$$

wird, wo also

$$\frac{Px}{z} = F : (\beta \ln x - \alpha \ln y) = F : \frac{x^\beta}{y^\alpha}$$

sein muss. Wenn also $\alpha = -1$ und $\beta = -1$ genommen wird, welches der Fall des vorhergehenden Problems ist, wird

$$\frac{y}{z} = F : \frac{y}{x} \quad \text{oder} \quad z = \frac{y}{F : \frac{y}{x}} = yF : \frac{x}{y}$$

sein, welche Lösung mit der zuvor gegebenen vollkommen übereinstimmt.

PROBLEM 4

§21 *Wenn für die zu schneidenden Flächen*

$$z^3 = \alpha x^3 + \beta y^3 + \gamma$$

war, die Gleichung für die zu schneidenden Flächen zu finden.

LÖSUNG

Die Differentiation der vorgelegten Gleichung liefert $dz = \frac{\alpha xx}{zz}dx + \frac{\beta yy}{zz}dy$, woher

$$p = \frac{\alpha xx}{zz} \quad \text{und} \quad q = \frac{\beta yy}{zz}$$

wird. Daher muss für die schneidenden Flächen, wenn $dz = Pdx + Qdy$ war,

$$1 + \frac{\alpha Pxx}{zz} + \frac{\beta Qyy}{zz} = 0$$

werden, woher man

$$Q = -\frac{zz + \alpha Pxx}{\beta yy}$$

berechnet, durch Einsetzen welches Wertes diese Gleichung hervorgeht:

$$\beta yydz + zzdy = P(\beta yydx - \alpha xxdy)$$

oder

$$\frac{\beta dz}{zz} + \frac{dy}{yy} = \frac{Pxx}{zz}\left(\frac{\beta yydx - \alpha xxdy}{xxyy}\right),$$

deren Integral

$$\frac{\beta}{z} + \frac{1}{y} = \int \frac{Pxx}{zz} d.\left(\frac{\beta}{x} - \frac{\alpha}{y}\right) = F : \left(\frac{\beta}{x} - \frac{\alpha}{y}\right)$$

ist.

1 PROBLEM 5

§22 *Wenn man für die zu schneidenden Flächen diese Gleichung hat*

$$\int Zdz = \int Xdx + \int Ydy + a,$$

während X, Y, Z Funktionen von x, y, z respektive und a ein variabler Parameter ist, die Gleichung für die schneidenden Flächen zu finden.

LÖSUNG

Wegen $Zdz = Xdx + Ydy$ wird $p = \frac{X}{Z}$ und $q = \frac{Y}{Z}$ sein. Wenn also für die schneidenden Flächen $dz = Pdx + Qdy$ ist, muss $Z + PX + QY = 0$ sein, woher

$$Q = -\frac{Z + PX}{Y}$$

wird, nach Einsetzen welches Wertes diese Gleichung entspringt:

$$Ydz + Zdy = P(Ydx - Xdy)$$

oder

$$\frac{dz}{Z} + \frac{dy}{Z} = \frac{PX}{Z}\left(\frac{dx}{X} - \frac{dy}{Y}\right),$$

woher durch Integrieren wird

$$\int \frac{dz}{Z} + \int \frac{dy}{Y} = F : \left(\int \frac{dx}{X} - \int \frac{dy}{Y}\right).$$

PROBLEM 6

§23 *Wenn die Gleichung für die zu schneidenden Flächen $Z = aXY$ war, wo X eine Funktion von x, Y eine von y und a ein variabler Parameter ist, welcher durch Differentiation eliminiert werden muss, die Gleichung für die schneidenden Flächen zu finden.*

LÖSUNG

Um den Parameter a zu eliminieren, nehme man das logarithmische Differential, welches

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{dX}{X} + \frac{dY}{Y}$$

sein wird. Man setze

$$dZ = Z'dz, \quad dX = X'dx, \quad dY = Y'dy,$$

sodass

$$dz = \frac{ZX'}{XZ'}dx + \frac{ZY'}{YZ'}dy$$

ist, woher man

$$p = \frac{ZX'}{XZ'} \quad \text{und} \quad q = \frac{ZY'}{YZ'}$$

berechnet. Es muss also

$$XYZ' + PYZX' + QXZY' = 0$$

werden, woher durch Eliminieren des Buchstabens Q diese Gleichung hervorgeht:

$$XZY'dz + XYZ'dy = P(XY'Zdx - YZX'dy),$$

welche wir durch $XY'Z'$ teilen wollen, dass wir diese haben:

$$\frac{Zdz}{Z'} + \frac{Ydy}{Y'} = PZ\left(\frac{dx}{Z'} - \frac{YX'dy}{XY'Z'}\right) = \frac{PZ}{Z'}\left(dx - \frac{YX'dy}{XY'}\right)$$

haben, oder

$$\frac{Zdz}{Z'} + \frac{Ydy}{Y'} = \frac{PX'Z}{XZ'}\left(\frac{Xdx}{X'} - \frac{Ydy}{Y'}\right).$$

Daher, wenn

$$\frac{PZX'}{XZ'} = F : \left(\int \frac{Xdx}{X'} - \int \frac{Ydy}{Y'}\right)$$

war, wird das vollständige Integral, oder die gesuchte Gleichung für die schneidenden Flächen, sein:

$$\int \frac{Zdz}{Z'} + \int \frac{Ydy}{Y'} = F : \left(\int \frac{Xdx}{X'} - \int \frac{Ydy}{Y'}\right).$$

SCHOLION

§24 Diese Lösung ist die vollständige und enthält nicht nur eine Gattung von schneidenden Flächen, sondern sogar unendlich viele Gattungen. Aber es trägt sich oftmals zu, dass nicht unendlich viele Gattungen an schneidenden Flächen, sondern nur eine einzige Gattung dargeboten werden kann. Wenn etwa unendlich viele Kugeln, welche sich in einem Punkt der Tischebene berühren, vorgelegt worden, dann, wenn der Radius einer bestimmten $= a$ gesetzt wird, wird man diese Gleichung haben:

$$xx + yy + zz = 2az,$$

woher

$$a = \frac{xx + yy + zz}{2z}$$

wird. Daher, weil durch Differenzieren $xdx + ydy + zdz = adz$ ist, wird

$$dz = \frac{xdx + ydy}{a - z}$$

sein, oder wegen

$$a - z = \frac{xx + yy - zz}{2z},$$

wird

$$dz = \frac{2z(xdx + ydy)}{xx + yy - zz}$$

sein; daher berechnet man

$$p = \frac{2xz}{xx + yy - zz} \quad \text{und} \quad q = \frac{2yz}{xx + yy - zz}.$$

Für die schneidenden Flächen Genügt diese Gleichung:

$$2b = \frac{xx + yy + zz}{\sqrt{xx + yy}},$$

welche differenziert

$$\frac{b(xdx + ydy)}{\sqrt{xx + yy}} = xdx + ydy + zdz$$

gibt, woher

$$zdz = (xdx + ydy)\left(\frac{b}{\sqrt{xx + yy}} - 1\right)$$

wird, oder wegen des Faktors

$$\frac{b}{\sqrt{xx + yy}} - 1 = -\frac{(xx + yy - zz)}{2(xx + yy)},$$

wird man

$$dz = -\frac{(xx + yy - zz)(xdx + ydy)}{2z(xx + yy)} = Pdx + Qdy$$

haben, sodass

$$P = -\frac{x(xx + yy - zz)}{2z(xx + yy)} \quad \text{und} \quad Q = -\frac{y(xx + yy - zz)}{2z(xx + yy)},$$

woher, wie verlangt, $1 + Pp + Qq = 0$ wird. Wenn wir diesen Fall, welcher freilich unendlich viele Lösungen, sondern nur eine einzige Gattung von schneidenden Fläche zulässt, mit der vorhergehenden Methode erledigen wollten, dann würden wir durch Eliminieren des Buchstaben Q zu einer völlig unhandbaren Gleichung gelangen. Ich haben den folgenden, in gleicher Weise zu behandelnden Fall mit nicht unwesentlichen Aufwand gefunden.

THEOREM

§25 *Wenn für die zu schneidenden Flächen $a = -z + \sqrt{xx + yy + zz}$ war, dann wird für die schneidenden Flächen $b = z + \sqrt{xx + yy + zz}$ sein.*

BEWEIS

Für die zu schneidenden Flächen wird durch Nehmen der Differentiale

$$dz = \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{xx + yy + zz}}$$

oder

$$dz(\sqrt{xx + yy + zz} - z) = xdx + ydy$$

oder

$$adz = xdx + ydy$$

sein, woher

$$p = \frac{x}{a} = \frac{x}{\sqrt{xx + yy + zz} - z} \quad \text{und} \quad q = \frac{y}{a} = \frac{y}{\sqrt{xx + yy + zz} - z}$$

wird. Für die schneidenden Flächen wird

$$dz = -\frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{xx + yy + zz}}$$

oder

$$dz(\sqrt{xx + yy + zz} + z) = -xdx - ydy = bdz,$$

daraus

$$P = -\frac{x}{b} = -\frac{x}{\sqrt{xx+yy+zz}+z} \quad \text{und} \quad Q = -\frac{y}{b} = -\frac{y}{\sqrt{xx+yy+zz}+z},$$

woher

$$1 + Pp + Qq = -\frac{xx+yy}{xx+yy} + 1 = 0$$

wird. Die folgenden Probleme werden eine Methode aufzeigen, Fälle von dieser Art zu behandeln, welche wir mehr durch geschicktes Raten als auf direktem Wege auflösen.

PROBLEM 7

§26 *Wenn für die zu schneidenden Flächen*

$$a = \frac{2zz - xx - yy}{xx - yy}$$

war, die Gleichung für die zu schneidenden Flächen zu finden.

LÖSUNG

Weil $a(xx - yy) = 2zz - xx - yy$ ist, wird durch Differenzieren

$$a(xdx - ydy) = 2zdz - xdx - ydy$$

sein, woher man

$$dz = pdx + qdy = \frac{a+1}{2z}xdx - \frac{a-1}{2z}ydy$$

berechnet und daher

$$p = \frac{x(a+1)}{2z} = \frac{x(zz-yy)}{z(xx-yy)} \quad \text{und} \quad q = -\frac{y(a-1)}{2z} = -\frac{y(zz-xx)}{z(xx-yy)}.$$

Damit nun $1 + Pp + Qq = 0$ wird, setze man

$$P = -\frac{yz+vx}{xy+vz} \quad \text{und} \quad Q = -\frac{xz+vy}{xy+vz},$$

wo v eine neue unbestimmte variable Größe ist. Daher wird für die schneidenden Flächen die Gleichung $dz = Pdx + Qdy$ diese Form annehmen:

$$(yz + vx)dx + (xz + vy)dy + (xy + vz)dz = 0,$$

deren Integral, wie man leicht erkennt,

$$xyz + \int v(xdx + ydy + zdz)$$

ist. Daher, wenn man v irgendeiner Funktion von $xx + yy + zz$ gleich setzt, wird die Gleichung für die schneidenden Flächen, welche wir suchen

$$xyz = F : (xx + yy + zz)$$

oder durch Invertieren

$$xx + yy + zz = F : xyz.$$

PROBLEM 8 (UMGEKEHRT)

§27 *Wenn für die zu schneidenden Flächen $xx + yy + zz = F : xyz$ war, die Gleichung für die schneidenden Flächen zu finden.*

LÖSUNG

Man setze $F : xyz = v$, es wird $d.F : xyz = v'd.xyz$ und daher

$$xdx + ydy + zdz = v'(yzdx + xzdy + xydz),$$

oder

$$dx(x - v'yz) + dy(y - v'xz) + dz(z - v'xy) = 0,$$

daher

$$p = \frac{v'yz - x}{z - v'xy} \quad \text{und} \quad q = \frac{v'xz - y}{z - v'xy}.$$

Nach Finden von diesen wird sich die kanonische Gleichung $1 + Pp + Qq = 0$ so verhalten:

$$z - v'xy + Pv'yz - Px + Qv'xz - Qy = 0,$$

welche Gleichung so in zwei Teile in diese zwei geteilt werde:

$$\text{I.}\quad z - Px - Qy = 0, \quad \text{II.}\quad xy - Pyz - Qxz = 0.$$

Aus der ersten berechnet man nun $Q = \frac{z-Px}{y}$, nach Einsetzen welches Wertes in der anderen man

$$P = \frac{x(zz-yy)}{z(xx-yy)} \quad \text{und daher} \quad Q = -\frac{y(zz-xx)}{z(xx-yy)}$$

findet. Also wird die Gleichung für die schneidenden Flächen $dz = Pdx + Qdy$ nun

$$zdz(xx-yy) = xdx(zz-yy) - ydy(zz-xx)$$

sein, welche gefälliger so dargestellt werden kann:

$$zdz(xx-yy) - zz(xdx-ydy) = xy(xdy-ydx),$$

das Integral welcher Gleichung, durch $(xx-yy)^2$ geteilt,

$$\frac{zz}{2(xx-yy)} = \int \frac{xy(xdy-ydx)}{(xx-yy)^2}$$

ist. Um diese letzte Form zu integrieren, setze man $y = tx$, und es wird

$$\int \frac{xy(xdy-ydx)}{(xx-yy)^2} = \int \frac{tdt}{(1-tt)^2} = \frac{1}{2(1-tt)} = \frac{xx}{2(xx-yy)}$$

sein. Nachdem die Konstante in entsprechender Weise eingeführt worden ist, haben wir für die schneidenden Flächen diese Gleichung erhalten:

$$\frac{zz}{2(xx-yy)} = A + \frac{xx}{2(xx-yy)} \quad \text{oder} \quad A = \frac{zz-xx}{2(xx-yy)},$$

welche von der im vorhergehenden Problem für die zu schneidenden Flächen vorgelegten Gleichung:

$$a = \frac{2zz-xx-yy}{xx-yy}$$

nur um eine konstante Größe abweicht. Wenn nämlich $A = \frac{a-1}{4}$ gesetzt wird, wird ebenso

$$a = \frac{2zz - xx - yy}{xx - yy}$$

sein.

PROBLEM 9

§28 *Wenn für die zu schneidenden Flächen $az = xx + yy + nzz$ war, die Gleichung für die schneidenden Flächen zu finden.*

LÖSUNG

Durch Differenzieren geht

$$dz = \frac{2xdx + 2ydy}{a - 2nz} = \frac{2z(xdx + ydy)}{xx + yy - nzz}$$

hervor, woher

$$p = \frac{2xz}{xx + yy - nzz} \quad \text{und} \quad q = \frac{2yz}{xx + yy - nzz}$$

wird. Damit nun $1 + Pp + Qq = 0$ wird, setze man

$$P = -\frac{x(xx + yy - nzz) - Sy}{2z(xx + yy)} \quad \text{und} \quad Q = -\frac{y(xx + yy - nzz) + Sx}{2z(xx + yy)};$$

daher entspringt für die schneidenden Flächen diese Gleichung:

$$\begin{aligned} 2zdz(xx + yy) - nzz(xdx + ydy) + (xx + yy)(xdx + ydy) \\ = S(ydx - xdy), \end{aligned}$$

welche durch $(xx + yy)^{\frac{1}{2}n+1}$ geteilt integrierbar wird; denn das Integral oder die gesuchte Gleichung wird sich so verhalten:

$$(2 - z)zz + xx + yy = (xx + yy)^{\frac{1}{2}n} F : \frac{y}{x}.$$

THEOREM

§29 *Auf dieselbe Weise, wenn für die zu schneidenden Flächen allgemeiner*

$$az^\lambda = xx + yy + zz$$

war, dann wird die Gleichung für die schneidenden Flächen diese sein:

$$\left(2 + \frac{\lambda - 2}{\lambda} n\right) zz + xx + yy = (xx + yy)^{\frac{2-\lambda}{2\lambda} n} F : \frac{y}{x}.$$

Der Beweis ist durch das Vorhergehende offenkundig, woher es überflüssig wäre, sie hier auszuführen.

PROBLEM 10

§30 *Wenn für die zu schneidenden Flächen* $az^\lambda = \frac{yy+xx}{yy-xx}$ *war, die Gleichung für die schneidenden Flächen zu finden.*

LÖSUNG

Hier wird für die Gleichung $dz = pdx + qdy$

$$p = \frac{4xyyz}{\lambda(y^4 - x^4)} \quad \text{und} \quad q = -\frac{4xxyz}{\lambda(y^4 - x^4)}.$$

Denn

$$\lambda az^{\lambda-1} dz = \frac{4xy(ydx - ydy)}{(yy - xx)^2},$$

also

$$\lambda az^\lambda dz = \frac{4xyz(ydx - xdy)}{(yy - xx)^2}.$$

Aber

$$az^\lambda = \frac{yy + xx}{yy - xx} \quad \text{und daher} \quad dz = \frac{4xyz(ydx - xdy)}{\lambda(y^4 - x^4)}.$$

Nun, damit der Gleichung $1 + Pp + Qq = 0$ Genüge geleistet wird, nehme man

$$P = -\frac{\lambda(yy+xx)y + \lambda Sx}{4xyz} \quad \text{und} \quad Q = -\frac{\lambda(yy+xx)x + \lambda Sy}{4xyz},$$

woher die Gleichung $dz = Pdx + Qdy$

$$4xyzdz + \lambda(yy+xx)(ydx+xdy) + \lambda S(xdx+ydy) = 0$$

wird, welche durch xy geteilt und integriert

$$2zz + \lambda(yy+xx)\ln(xy) = 2\lambda\int(ydy+xdx)\ln(xy) - \lambda\int S(xdx+ydy)$$

sein wird. Man setze $S = 2\ln(xy) - T$ und jene Gleichung wird

$$2zz + \lambda(yy+xx)\ln(xy) = \lambda\int T(xdx+ydy) = \lambda F : (xx+yy)$$

werden, welche Gleichung für die schneidenden Flächen der Gleichung für die zu schneidenden Flächen zukommen wird:

$$az^{\lambda} = \frac{yy+xx}{yy-xx}.$$

PROBLEM 11

§31 *Wenn für die zu schneidenden Flächen die Größe az einer homogenen Funktion von n Dimensionen von x und y gleich war, die Gleichung für die schneidenden Flächen zu finden.*

LÖSUNG

Nach Setzen von $y = tx$ wird jene homogene Funktion diese Form annehmen $x^n\Theta$, wo Θ eine gegebene Funktion von t ist, und so wird $az = x^n\Theta$ sein, und daher $\ln a + \ln z = n\ln x + \ln\Theta$, woher

$$\frac{dz}{z} = \frac{ndx}{x} + \frac{d\Theta}{\Theta} = \frac{ndx}{x} + \frac{\Theta'}{\Theta}dt$$

wird, mit $d\Theta = \Theta' dt$. Nun sei $\frac{\Theta'}{\Theta} = \Pi$, sodass auch Π eine gegebene Funktion von t ist, und weil

$$t = \frac{y}{x} \quad \text{und daher} \quad dt = \frac{xdy - ydx}{xx}$$

ist, wird

$$\frac{dz}{z} = \frac{ndx}{x} + \frac{\Pi(xdy - ydx)}{xx}$$

sein, woher wegen $dz = pdx + qdy$

$$p = \frac{nz}{x} - \frac{\Pi yz}{xx} \quad \text{und} \quad q = \frac{\Pi xz}{xx}$$

wird. Um also der kanonischen Gleichung $1 + Pp + Qq = 0$ Genüge zu leisten, nach welcher

$$\frac{xx}{z} + P(nx - \Pi y) + \Pi x Q = 0$$

werden muss, setze man die Buchstaben

$$P = \frac{S\Pi x}{\Pi z} \quad \text{und} \quad Q = -\frac{x}{\Pi z} + \frac{S(\Pi y - nx)}{\Pi z},$$

mit welchen Werten jener Gleichung Genüge geleistet wird.

Nun wird für die schneidenden Flächen die Gleichung $dz = Pdx + Qdy$

$$\Pi z dz = S\Pi x dx + Sdy(\Pi y - nx) - xdy$$

werden. Daher eliminiere man die Variable $x = \frac{y}{x}$ und wegen $dx = \frac{tdy - ydt}{tt}$ wird jene Gleichung, durch Π geteilt, diese Form haben:

$$zdz = Sydy\left(\frac{1+tt}{tt}\right) - \frac{ydy}{\Pi t}(nS+1) - \frac{Syydt}{t^3}$$

haben. Nun werde $S = R + T$, wo R eine unbestimmte Funktion sei, T aber so bestimmt ist, dass die Integration gelingt. Auf diese Weise wird

$$zdz = R\left(ydy\frac{1+tt}{tt} - \frac{nydy}{\Pi t} - \frac{yydt}{t^3}\right) + Tydy\left(\frac{1+tt}{tt} - \frac{n}{\Pi t}\right) - \frac{yyTdt}{t^3} - \frac{ydy}{\Pi t}$$

sein, das Integral welcher Gleichung auf die folgende Weise gefunden wird: Wir wollen mit der mit R multiplizierten Funktion beginnen, welche, nach Trennen der Variablen y und t, auf diese Form zurückgeführt wird

$$R'\left(\frac{dy}{y} - \frac{\Pi dt}{\Pi t(1+tt) - ntt}\right).$$

Man setze

$$\frac{\Pi dt}{\Pi t(1+tt)-ntt}=\frac{dv}{v},$$

so dass v eine bekannte Funktion von t ist, und jene Seite wird

$$R'\left(\frac{dy}{y}-\frac{dv}{v}\right)$$

sein, deren Integral wird $F:\frac{y}{v}$ wird. Um aber die andere Seite unserer Gleichung integrierbar zu machen, setze man

$$\frac{1+tt}{tt}-\frac{n}{\Pi t}=M \quad \text{und} \quad \frac{1}{\Pi t}=N,$$

und dieser Anteil wird

$$ydy(MT-N)-\frac{yyTdt}{t^3}$$

sein, dessen Integral wir festlegen wollen $\frac{1}{2}yy(MT-N)$ zu sein, sodass

$$d.(MT-N)=-\frac{2Tdt}{t^3}$$

ist. Es ist aber

$$d.(MT-N)=MdT+TdM-dN,$$

woher man

$$dT+\frac{TdM}{M}+\frac{2Tdt}{Mt^3}=\frac{dN}{M}$$

berechnet. Weil wir aber

$$\frac{\Pi dt}{\Pi t(1+tt)-ntt}=\frac{dt}{\left(\frac{1+tt}{tt}-\frac{n}{\Pi t}\right)t^3}=\frac{dt}{Mt^3}=\frac{dv}{v}$$

gesetzt haben, werden wir

$$dT+T\left(\frac{dM}{M}+\frac{2dv}{v}\right)=\frac{dN}{M}$$

haben, welche Gleichung, multipliziert mit Mvv, integrierbar gemacht wird; denn ihr ihr Integral wird $MvvT=\int vvdN$, woher

$$T = \frac{\int vvdN}{Mvv}$$

wird. Nach Sammeln dieser Werte wird also die Gleichung für die schneidenden Flächen

$$zz = 2F : \frac{y}{v} + yy(MT - N)$$

sein. Es ist aber

$$MT - N = \frac{\int vvdN - vvN}{vv} = -\frac{2\int Nvdv}{vv},$$

sodass

$$zz = 2F : \frac{y}{v} - \frac{2\int Nvdv}{vv}yy$$

ist.

Korollar

§32 Wenn der Formel $x^n\Theta$ der Formel az^λ gleich war, wird die Lösung nicht schwieriger, und für diesen viel allgemeineren Fall wird man für die schneidenden Flächen diese Gleichung haben:

$$\frac{zz}{2\lambda} = F : \frac{y}{v} - \frac{\int Nvdv}{vv}yy.$$

Ja sogar, wenn anstelle von z irgendeine Funktion z gesetzt worden ist, welche Z ist, sodass wir für die zu schneidenden Flächen diese Gleichung haben: $Z = x^n\Theta$, dann wird für die schneidenden Flächen diese Gleichung hervorgehen:

$$\int \frac{Zdz}{Z'} = F : \frac{y}{v} - \frac{\int Nvdv}{vv}yy,$$

wie sich durch eine der vorherigen ähnliche Rechnung sehen lässt.

Problem 12

§33 *Wenn für die zu schneidenden Flächen $a + z$ eine homogene Funktion von einer Dimension von x und y war, die Gleichung für die schneidenden Flächen zu finden.*

Lösung

Nach Setzen von $y = tx$ sei $a + z = \Theta x$, während Θ irgendeine Funktion von t ist. Daher wird also $dz = \Theta dx + xd\Theta$ sein, oder nach Setzen von $d\Theta = \Theta' dt = \Theta' d.\frac{y}{x}$, wird

$$dz = \Theta dx + \frac{\Theta'(xdy - ydx)}{x}$$

sein, woher man

$$p = \Theta - \Theta' t \quad \text{und} \quad q = \Theta'$$

berechnet, sodass die Gleichung, welche wir die kanonische genannt haben, $1 + Pp + Qq = 0$

$$1 + P(\Theta - \Theta' t) + Q\Theta' = 0$$

ist. Weil nun dieser Gleichung Genüge geleistet wird, setze man

$$P = S\Theta' \quad \text{und} \quad Q = -\frac{1}{\Theta'} + S(\Theta' t - \Theta),$$

und für die schneidenden Flächen wird diese Gleichung sein:

$$dz = -\frac{dy}{\Theta'} + S(\Theta' dx + (\Theta' t - \Theta)dy).$$

Nun eliminiere man die Variable x mithilfe der Gleichung

$$dx = \frac{tdy - ydt}{tt},$$

und es wird

$$dz = -\frac{dy}{\Theta'} + \frac{S}{tt}(\Theta' tdy(1 + tt) - \Theta' ydt - \Theta ttdy)$$

werden, welche Gleichung, nachdem der Kürze wegen $\Theta'(1 + tt) - \Theta t = A\Theta'$ gesetzt worden ist,

$$dz = -\frac{dy}{\Theta'} + \frac{S\Theta'}{tt}(Atdy - ydt) = -\frac{dy}{\Theta'} + S'(Atdy - ydt)$$

sein wird. Es werde nun $S' = R + T$, unsere Gleichung wird

$$dz = R(Atdy - ydt) + T(Atdy - ydt) - \frac{dy}{\Theta'}$$

sein, oder, nach Setzen von $\frac{dt}{At} = \frac{dv}{v}$, wird sie diese gefälligere Form annehmen:

$$dz = R\left(\frac{dy}{y} - \frac{dv}{v}\right) + T(Atdy - ydt) - \frac{dy}{\Theta'},$$

woher man durch Integrieren für die schneidenden Flächen

$$z = F : \frac{y}{v} + \int dy(AtT - N) - \int Tydt$$

berechnet, wobei $N = \frac{1}{\Theta'}$ ist.

PROBLEM 13

§34 *Wenn für die zu schneidenden Flächen $a + z = x^n\Theta$ war, wobei Θ irgendeine Funktion von $t = \frac{y}{x}$ ist, die Gleichung für die schneidenden Flächen zu finden.*

LÖSUNG

Wenn für die zu schneidenden Flächen $a + z = x^n\Theta$ war, während θ irgendeine Funktion von $t = \frac{y}{x}$ war, die Gleichung für die schneidenden Flächen zu finden.

LÖSUNG

Hier wird also durch Differenzieren $dz = nx^{n-1}\Theta dx + x^n d\Theta$ sein, oder, nach Setzen von $d\Theta = \Theta' dt = \Theta' d.\frac{y}{x}$, werden wir

$$dz = nx^{n-1}\Theta dx + x^{n-1}\Theta'(dy - tdx)$$

haben, woher man

$$p = x^{n-1}(n\Theta - t\Theta') \quad \text{und} \quad q = x^{n-1}\Theta'$$

berechnet. Man setze $\frac{\Theta}{\Theta'} = \Pi$ und weil

$$\frac{1}{\Theta'} + Px^{n-1}(n\Pi - t) + x^{n-1}Q = 0$$

sein muss, werden dieser Gleichung die folgenden Werte für P und Q genügen:

$$P = \frac{S}{x^{n-1}\Theta'} \quad \text{und} \quad Q = -\frac{S(n\Pi - t) + 1}{x^{n-1}\Theta'},$$

woher für die schneidenden Flächen diese Gleichung hervorgeht:

$$dz = \frac{S(dx - (n\Pi - t)dy) - dy}{x^{n-1}\Theta'},$$

oder wegen $y = tx$ wird

$$dz = \frac{S(dx + (t - n\Pi)(tdx + xdt)) - dy}{x^{n-1}\Theta'},$$

oder

$$dz = \frac{S(dx(1 + t(t - n\Pi)) + xdt(t - n\Pi)) - dy}{x^{n-1}\Theta'}$$

sein. Wenn nun $S = R + T$ gesetzt wird, dann aber der Kürze wegen

$$\frac{dt(t - n\Pi)}{1 + t(t - n\Pi)} = \frac{dv}{v}$$

festgelegt wird, werden wir das Integral $z = F : vx + V$ haben, während das Differential des zweiten Glieds

$$dV = \frac{dx}{x^{n-1}}\left(\frac{T(1 + t(t - n\Pi)}{\Theta'} - \frac{t}{\Theta'}\right) + \frac{dt}{x^{n-2}}\left(\frac{T(t - n\Pi)}{\Theta'} - \frac{1}{\Theta'}\right)$$

wird. Man setze

$$\frac{1 + t(t - n\Pi)}{\Theta'} = M \quad \text{und} \quad \frac{t}{\Theta'} = N,$$

es wird

$$dV = \frac{dx}{x^{n-1}}(TM - N)[+ \cdots]$$

sein, wenn deren Integral

$$V = \frac{x^{2-n}}{2-n}(TM - N)$$

gesetzt wird, ist es notwendig, dass

$$\frac{dt}{x^{n-2}}\left(\frac{T(t-n\Pi)}{\Theta'}-\frac{1}{\Theta'}\right)=\frac{x^{2-n}}{2-n}d.(TM-N)$$

oder

$$d.(TM-N)=(2-n)\left(\frac{T(t-n\Pi)dt}{\Theta'}-\frac{dt}{\Theta'}\right)$$

wird. Es ist aber

$$dt\frac{t-n\Pi}{\Theta'}=\frac{M(t-n\Pi)dt}{1+t(t-n\Pi)}=M\frac{dv}{v},$$

nach Einsetzen wovon

$$MdT+TdM-dN=(2-n)\left(MT\frac{dv}{v}-\frac{dt}{\Theta'}\right)$$

sein wird, welche Gleichung mit v^{n-2} multipliziert und integriert

$$TMv^{n-2}=\int v^{n-2}dN+(n-2)\int\frac{v^{n-2}dt}{\Theta'}$$

liefert.

Scholion

§35 In gänzlich gleicher Weise kann ein noch allgemeineres Problem behandelt werden, in welchem für die zu schneidenden Flächen $a+Z=x^n\Theta$ gesetzt wird, während Z irgendeine Funktion von z ist; denn für die zu schneidenden Flächen werden wir diese Gleichung haben:

$$\int\frac{dz}{Z'}=F:xv-(xv)^{2-n}\int\frac{v^{n-3}dv}{\Theta'(t-n\Pi)},$$

mit

$$t=\frac{y}{x},\quad \Pi=\frac{\Theta}{\Theta'}\quad\text{und}\quad\frac{dv}{v}=\frac{dt(t-n\Pi)}{1+t(t-n\Pi)}.$$

PROBLEM 14

§36 *Wenn für die zu schneidenden Flächen die Gleichung*

$$axy + bxz + cyz = 0$$

gegeben ist, die Gleichung für die schneidenden Flächen zu finden.

LÖSUNG

Weil daraus durch Differenzieren die folgende Gleichung hervorgeht:

$$axdy + aydx + bxdz + bzdx + cydz + czdy = 0,$$

wird für die Gleichung $pdx + qdy + rdz = 0$

$$p = ay + bz, \quad q = ax + cz, \quad r = bx + cy$$

sein. Daher, wenn für die schneidenden die Gleichung $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ gesetzt wird, muss $Pp + Qq + Rr = 0$ werden, welcher auf unendlich viele Weisen Genüge geleistet werden kann, während einer der Buchstaben P, Q, R als verschwindend angenommen werden kann. Diese einfacheren Fälle sind:

$$\begin{array}{l|l|l} P = ax + cz & P = bx + cy & P = 0 \\ Q = -ay - bz & Q = 0 & Q = bx + cy \\ R = 0 & R = -ay - bz & R = -ax - cz \end{array}$$

Aber für P, Q, R werden die angenommenen Werte solche sein müssen, dass die Gleichung

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

möglich wird, das heißt, dass wird:

$$\left(\frac{PdQ - QdP}{dz}\right) + \left(\frac{QdR - RdQ}{dx}\right) + \left(\frac{RdP - PdR}{dy}\right) = 0,$$

für welches Ziel für diese drei Buchstaben P, Q, R alle möglichen Werte zukommen müssen, welche aus den drei grundlegenden berechnet werden. Wir wollen also den ersten Fall mit s, den zweiten mit t, den mit u multiplizieren und das Produkt zu einer Summe sammeln, wonach diese Werte entspringen:

$$P = (as+bt)x + cty + csz,$$
$$Q = bux + (cu-as)y - bsz,$$
$$R = -aux - aty - (bt+cu)z.$$

Daher müssen nun für die Buchstaben s, t, u solche Werte ausfindig gemacht werden, dass dem Kriterium für die Möglichkeit Genüge geleistet wird. Daher leiten wir aber die folgenden Werte her:

$$\left(\frac{PdQ-QdP}{dz}\right) = -bs(as+bt+cu)x \; - cs(cu-as+bt)y,$$
$$\left(\frac{QdR-RdQ}{dx}\right) = -au(cu-as+bt)y \; + bu(bt+cu+as)z,$$
$$\left(\frac{RdP-PdR}{dy}\right) = at(as+bt+cu)x \quad - ct(bt-cu-as)z,$$

in welchen die einzelnen Koeffizienten jeweils zu Null gemacht werden müssen, woher die folgenden Gleichungen abgeleitet werden:

$$cu(bs+at) + ab(ss-tt) \; + st(bb-aa) = 0,$$
$$bt(au-cs) + ac(ss-uu) + us(aa-cc) = 0,$$
$$as(ct+bu) + bc(uu-tt) \; + tu(bb-cc) = 0,$$

aus welchen, nach Eliminieren der Quadrate ss, tt, uu, was durch Multiplizieren der ersten mit c, der zweiten mit $-b$, der dritten mit $-a$ geschieht, eine neue entspringt: Denn die Summe gibt:

$$bsu(cc-aa) + atu(cc-bb) + cst(bb-aa) = 0.$$

Wenn aber die Quadrate aa, bb, cc eliminiert werden, geht die identische Gleichung $0 = 0$ hervor; daher ist zu schließen, dass eine jener drei Gleichungen in den zwei anderen bereits enthalten ist, sodass es ausreicht nur zweien genügt zu haben.

Im Allgemeinen lässt sich aber diese Frage nicht beantworten. Aber nach Finden solcher Werte für P, Q, R bereitet die Integration der Gleichung

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

keine weitere Mühe. Ja, weil einer der Buchstaben s, t, u unbestimmt bleibt, können sogar unendlich viele Integrale dargeboten werden, welche aber alle partikulär sind. Aber aus zwei Integralen von dieser Art wird eine allgemeine Gleichung für die schneidenden Flächen gebildet werden, während das eine irgendeiner Funktion des anderen gleich gesetzt wird.

KOROLLAR

§37 Im Fall, in welchem die drei Buchstaben a, b, c einander gleich sind, kann die Lösung ziemlich bequem angegeben werden. Denn jene drei Gleichungen gehen in die folgenden über:

$$\begin{aligned} u(s+t)+ss-tt &= (s+t)(u+s-t)=0, \\ t(u-s)+ss-uu &= (u-s)(t-s-u)=0, \\ s(t+u)+uu-tt &= (t+u)(s+u-t)=0, \end{aligned}$$

all welchen Genüge geleistet wird, indem man $t=s+u$ nimmt. In diesem Fall werden wir also haben:

$$\begin{aligned} P &= (2s+u)x+(s+u)y+sz, \\ Q &= ux+(u-s)y-sz, \\ R &= -ux-(s+u)y-(s+2u)z. \end{aligned}$$

Aber dann, wenn man der Kürze wegen festlegt

$$2s+u=3f, \quad u-s=3g, \quad -(s+2u)=3h,$$

findet man, dass das Integral der Gleichung $Pdx+Qdy+Rdz=0$

$$(x+y+z)(fx+gy+hz)^2=C$$

oder auch

$$(x+y+z)((2s+u)x+(u-s)y-s(s+2u)z)^2=\Delta$$

sein wird. Daher, wenn man $u=0$ nimmt, werden wir diese Gleichung haben:

$$\Delta=(x+y+z)(2x-y-z)^2.$$

Aber nach Nehmen von $u = s$ wird

$$\Delta = (x + y + z)(x - z)^2$$

sein. Nun liefert jener Wert, einer Funktion von diesem gleich gesetzt, eine sehr allgemeine Gleichung für die schneidende Flächen.

SCHOLION

§38 Wie aber das letzte Integral ausfindig gemacht werden muss, wollen wir hier zeigen. Man betrachte die Variable z als Konstante und integriere die Gleichung $Pdx + Qdy = 0$, um welche homogen zu machen, man

$$x = X + \frac{uz}{s} \quad \text{und} \quad y = Y - \frac{(s + u)z}{s}$$

setze; denn dann geht

$$(2s + u)XdX + (s + u)YdX + uXdY + (u - s)YdY = 0$$

hervor. Wenn also hier anstelle von dX und dY entsprechend X und Y geschrieben wird, wird der die Integration erzeugende Nenner gebildet werden, welcher

$$(2s + u)XX + (s + 2u)YX + (u - s)YY$$

sein wird, welcher in diese Faktoren aufgelöst wird

$$(X + Y)((2s + u)X - (s - u)Y)^2);$$

und nach der üblichen Auflösung findet man das Integral der Gleichung, nämlich

$$C = (X + Y)((2s + u)X - (s - u)Y)^2;$$

dann aber findet man $X + Y = x + y + z$, und daraus resultiert schließlich diese endliche Gleichung für die schneidenden Flächen:

$$(2s + u)X + (u - s)Y = (2s + u)x - (s - u)y - (s + 2u)z.$$

Problem 15

§39 *Wenn für die zu schneidenden Flächen die Gleichung*

$$A = \frac{zz + axx + byy}{z^n}$$

gegeben ist, die Gleichung für die schneidenden Flächen zu finden.

Lösung

Weil durch Differenzieren diese Gleichung hervorgeht

$$2axzdx + 2byzdy + (2-n)zzdz - n(axx+byy)dz = 0,$$

und nach Setzen von $2 - n = 2cn$, sodass

$$c = \frac{2-n}{2n}$$

ist, werden wir

$$p = 2axz, \quad q = 2byz, \quad r = n(2czz - axx - byy)$$

haben. Nun setze man für die schneidenden Flächen die Gleichung $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, und es muss $Pp + Qq + Rr = 0$ werden, welcher Gleichung mit den folgenden für P, Q, R angenommenen Werten Genüge geleistet wird

$$P = \frac{x}{2z} - \frac{cz}{ax} + Sby, \quad Q = \frac{y}{2z} - Sax, \quad R = \frac{1}{n},$$

nach Einsetzen welcher Werte in der Gleichung $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ die mit dem Buchstaben S behafteten Terme sofort $Sbydx - Saxdy = 0$ geben, woher

$$\frac{bdx}{x} = \frac{ady}{y}$$

wird, oder daher $b \ln x = a \ln y$ oder

$$\frac{x^b}{y^a} = \text{Konst.}$$

Aber allgemein werden wir diese Differentialgleichung haben:

$$\frac{xdx}{2z} + \frac{ydy}{2z} - \frac{czdx}{ax} + \frac{dz}{n} + S(bydx - axdy) = 0$$

oder diese:

$$xdx + ydy + T(bydx - axdy) = \frac{2czzdx}{ax} - \frac{2zdz}{n}$$

mit $T = 2Sz$, welche Größe so bestimmt werden muss, dass die Gleichung integrierbar gemacht werden muss. Für dieses Ziel ist zu sehen, welch eine Funktion von x und y für T angenommen werden muss, dass die Integration gelingt. Man teile die Gleichung durch x^m, und nach Setzen von

$$\frac{2cn}{a} = m$$

wird die Differentialgleichung auf diese Weise ausgedrückt hervorgehen:

$$\frac{mzzdx}{nx^{m+1}} - \frac{2zdz}{nx^m} = \frac{xdx + ydy + T(bydx - axdy)}{x^m} = dV,$$

deren Integral

$$V = -\frac{zzx^{-m}}{n}$$

ist. Um aber die Größe V zu bestimmen, setze man $T = \frac{\lambda y}{x}$ und es wird

$$dV = \frac{dx}{x^{m-1}} + \frac{(1 - \lambda a)ydy}{x^m} + \frac{\lambda byydx}{x^{m+1}}$$

sein, woher nach Nehmen von

$$\lambda = \frac{m}{ma - 2b'}$$

sodass

$$1 - \lambda a = -\frac{2b}{ma - 2b}$$

ist, man

$$dV = \frac{dx}{x^{m-1}} - \frac{2bydy}{(ma - 2b)x^m} + \frac{mbyydx}{(ma - 2b)x^{m+1}}$$

berechnet, deren Integral

$$V = \frac{x^{2-m}}{2 - m} - \frac{byy}{(ma - 2b)x^m}$$

ist, sodass wir schließlich

$$\frac{zzx^{-m}}{n} + \frac{x^{2-m}}{2-m} - \frac{byy}{(ma-2b)x^m} = \text{Konst.}$$

haben, wenn welche Gleichung mit x^m multipliziert und anstelle der Konstante $F : \frac{x^b}{y^a}$ geschrieben wird, welche wir oben gefunden haben tatsächlich eine Konstante zu sein, so wird

$$\frac{zz}{n} + \frac{xx}{2-m} + \frac{byy}{2b-ma} = x^m F : \frac{x^b}{y^a}$$

sein.

PROBLEM 16

§40 *Wenn die zu schneidende Fläche alle Tangentialebenen eines geraden Kegels waren, alle sie normal schneidenden Flächen zu finden.*

LÖSUNG

Man stelle sich durch die Spitze des Kegels eine Ebene normal zur Achse vor gezeichnet vor, auf welche man die drei Koordinaten x, y, z beziehe, die Gleichung für all diese Ebenen wird

$$z = nx\cos\alpha + ny\sin\alpha$$

sein, wo α die Rolle des Parameters einnimmt, woher der Winkel α ziemlich umständlich definiert wird; deswegen ist nicht nötig dieses α, sondern eher z aus der Rechnung zu eliminieren, für welches Ziel auch die Veränderlichkeit von α in die Rechnung einzuführen ist. Durch Differenzieren wird also sein:

$$dz = ndx\cos\alpha + ndy\sin\alpha + nd\alpha(y\cos\alpha - x\sin\alpha);$$

wenn also für die schneidenden Flächen wie oben $dz = Pdx + Qdy$ gesetzt wird, muss

$$1 + nP\cos\alpha + nQ\sin\alpha = 0$$

werden. Man setze also

$$P = -\frac{1}{n}\cos\alpha - A\sin\alpha, \quad Q = -\frac{1}{n}\sin\alpha + A\cos\alpha,$$

während A irgendeine Funktion von α ist. Nach Einsetzen dieser Werte für P und Q geht nun diese Gleichung hervor:

$$dz = -\frac{dx\cos\alpha}{n} - \frac{dy\sin\alpha}{n} + A(dy\cos\alpha - dx\sin\alpha),$$

wenn welche von der ersten abgezogen wird, bleibt nach Setzen von $n + \frac{1}{n} = m$

$$0 = dx(m\cos\alpha + A\sin\alpha) + dy(m\sin\alpha - A\cos\alpha) + nd\alpha(y\cos\alpha - x\sin\alpha)$$

zurück, welche Gleichung wir festlegen wollen durch den Multiplikator M integrierbar zu werden und ihr Integral diese Form zu haben:

$$Mx(m\cos\alpha + A\sin\alpha) + My(m\sin\alpha - A\cos\alpha) = \Delta,$$

deren Differential, der gerade gefundenen Gleichung angeglichen, gibt:

$$\left\{\begin{array}{ll} Mxd\alpha(A\cos\alpha - m\sin\alpha) & + Myd\alpha(m\cos\alpha + A\sin\alpha) \\ +xdM(m\cos\alpha + A\sin\alpha) & + ydM(m\sin\alpha - A\cos\alpha) \\ +MxdA\sin\alpha & - MydA\cos\alpha \\ & - nMd\alpha(y\cos\alpha - x\sin\alpha) \end{array}\right\} = 0,$$

wo, wenn die mit x und y behafteten Terme einzeln zu Null gemacht werden, zwei Gleichungen hervorgehen werden, natürlich:

$$0 = \frac{dM}{M}(m\cos\alpha + A\sin\alpha) + d\alpha(A\cos\alpha - m\sin\alpha) + nd\alpha\sin\alpha + dA\sin\alpha,$$
$$0 = \frac{dM}{M}(m\sin\alpha - A\cos\alpha) + d\alpha(m\cos\alpha + A\sin\alpha) - nd\alpha\sin\alpha - dA\sin\alpha.$$

Wenn nun die erste dieser Gleichungen mit $\cos\alpha$, die andere mit $\sin\alpha$ multipliziert wird, wird deren Summe geben

$$m\frac{dM}{M} + Ad\alpha = 0,$$

woher man

$$\frac{dM}{M} = -\frac{Ad\alpha}{m}$$

berechnet. Aber wenn aus jenen zwei Gleichungen die Werte von $\frac{dM}{M}$ gesucht werden und entsprechend gleich gesetzt werden, wird diese gefällige Gleichung resultieren:

$$d\alpha(mm + AA - mn) - mdA = 0,$$

oder, wegen

$$m - n = \frac{1}{n} \quad \text{wird} \quad d\alpha\left(\frac{m}{n} + AA\right) = mdA$$

sein, woher man

$$d\alpha = \frac{mndA}{m + nAA}$$

berechnet, deren Integral

$$\alpha = \sqrt{mn} \cdot \arctan\frac{A\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$$

ist, und daher leitet man

$$A = \sqrt{\frac{m}{n}} \cdot \tan\frac{\alpha}{\sqrt{mn}}$$

ab, nach Einsetzen wovon

$$\frac{dM}{M} = -\frac{1}{\sqrt{mn}} d\alpha \tan\frac{\alpha}{\sqrt{mn}}$$

sein wird, und durch Integrieren geht

$$\ln M = \ln\cos\frac{\alpha}{\sqrt{mn}}$$

hervor, und in Zahlen:

$$M = \cos\frac{\alpha}{\sqrt{mn}}.$$

Nachdem also der Wert für den Multiplikator M in unsere Gleichung eingeführt worden ist, werden wir für die schneidenden Flächen haben:

$$\Delta = m\cos\frac{\alpha}{\sqrt{mn}}(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + \sqrt{\frac{m}{n}}\sin\frac{\alpha}{\sqrt{mn}}(x\sin\alpha - y\cos\alpha).$$

Auf diese Weise haben wir also eine endliche Gleichung zwischen x, y, α erhalten; wenn wir also mithilfe der Gleichung $z = nx\cos\alpha + ny\sin\alpha$ den Winkel α eliminieren wollten, ginge freilich eine Gleichung zwischen x, y, z hervor, aber die gefundene Gleichung genügt, um die Flächen zu konstruieren. Für jedweden Wert Δ, welcher der variable Parameter der schneidenden Flächen ist, findet man, nachdem nach Belieben die zwei α und x genommen worden ist, den Wert von y und außerdem der Wert von z, wenn welche Operation für alle Werte von α durchgeführt wird, werden unendlich viele Kurven gefunden werden, welche zusammengenommen die schneidenden Fläche bilden werden. Daher ist klar, dass alle unendlich vielen Werte von Δ schneidende Flächen an die Hand geben. welche dennoch nur eine einzige Gattung enthält, aber allgemeiner wird man es auf diese Weise finden. Weil alle zu schneidenden Flächen durch die Spitze des Kegels hindurchgehen, werden alle aus diesem Mittelpunkt heraus beschriebenen Kugeln all diese Flächen normal schneiden, weil deren Gleichung

$$xx + yy + zz = \text{Konst.}$$

ist, wird in der oben gefundenen Gleichung anstelle von Δ irgendeine Funktion von $xx + yy + zz$ geschrieben werden können, sodass die allgemeine Gleichung für die schneidenden Flächen ist:

$$F : (xx + yy + zz) = m\cos\frac{\alpha}{\sqrt{mn}}(x\cos\alpha + y\sin\alpha)$$
$$+\sqrt{\frac{m}{n}}\sin\frac{\alpha}{\sqrt{mn}}(x\sin\alpha - y\cos\alpha).$$

Problem 17

§41 *Nachdem für die zu schneidenden Flächen diese Gleichung $zz + 2xy = A$ vorgelegt worden ist, die Gleichung für die schneidenden Flächen zu finden.*

LÖSUNG

Weil hier durch Differenzieren $zdz + xdy + ydx = 0$ ist, wird $p = y$, $q = x$, $r = z$ sein, und es muss

$$yP + xQ + zR = 0$$

werden, welcher Gleichung auf die folgenden drei Arten Genüge geleistet werden kann:

$$\begin{aligned}
&\text{I.} \quad P = x, \quad Q = -y, \quad R = 0,\\
&\text{II.} \quad P = 0, \quad Q = z, \quad R = -x,\\
&\text{III.} \quad P = z, \quad Q = 0, \quad R = -y.
\end{aligned}$$

Der erste Fall gibt für die schneidenden Flächen die Gleichung $xdx - ydy = 0$, woher $xx - yy = C$ wird. Dann geht aber durch Kombinieren des mit Π multiplizierten zweiten Falles mit dem dritten $P = z$, $Q = \Pi z$, $R = -\Pi x - y$ hervor, woher diese Gleichung entspringt:

$$zdx + \Pi zdy - (\Pi x + y)dz = 0,$$

aus welcher

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx + \Pi dy}{\Pi x + y}$$

wird. Nun wird nach Nehmen von $\Pi = 1$ durch Integrieren $\ln z = \ln \alpha + \ln(x + y)$, woher

$$z = \alpha(x + y)$$

ist. Daher entsteht das folgende Problem von neuer Gestalt.

PROBLEM 18

§42 *Nach Vorlage dieser Differentialform*

$$\frac{dx + \Pi dy}{\Pi x + y},$$

Funktionen von x und y zu finden, welche anstelle von Π angenommen werden müssen, dass diese Formel möglich wird.

LÖSUNG

Zuerst ist aus dem vorherigen Problem klar, dass nach Setzen von

$$dv = \frac{dx + \Pi dy}{\Pi x + y}$$

$\Pi = 1$ genommen werden kann, dass $v = \ln(x+y)$ wird. *Zweitens* ist gleichermaßen klar, dass nach Nehmen von $\Pi = -1$ $v = -\ln(x+y)$ sein wird. *Drittens* wenn man

$$\Pi = -\frac{x}{y} \quad \text{genommen wird, wird} \quad v = \int \frac{ydx - xdy}{yy - xx} = \frac{1}{2}\ln\frac{y+x}{y-x}$$

werden. *Viertens* wird man

$$\Pi = \frac{\alpha x - \beta y}{\beta x - \alpha y}$$

nehmen können; dann wird man nämlich

$$v = \int \frac{\beta xdx - \beta ydy - \alpha ydx + \alpha xdy}{\alpha(xx - yy)} = \frac{1}{2}\ln\frac{x+y}{y-x} + \frac{\beta}{\alpha}\ln\sqrt{xx - yy}$$

haben. Um andere Fälle zu finden, wollen wir *fünftens* $x = p + q$ und $y = p - q$ setzen, dass

$$dv = \frac{(1+\Pi)dp + (1-\Pi)dq}{(1+\Pi)p - (1-\Pi)q}$$

wird. Man setze

$$\frac{1+\Pi}{1-\Pi} = \Theta,$$

es wird

$$dv = \frac{\Theta dp + dq}{\Theta p - q}$$

sein. Man nehme

$$\Theta = \frac{\alpha p^{m-1}}{\beta q^{n-1}},$$

und es wird

$$dv = \frac{\alpha p^{m-1}dp + \beta q^{n-1}dq}{\alpha p^m - \beta q^n} \quad \text{und} \quad mdv = \frac{m\alpha p^{m-1}dp + m\beta q^{n-1}dq}{\alpha p^m - \beta q^n}$$

werden, woher klar ist, dass $n = -m$ werden muss, dass wir

$$mv = \ln(\alpha p^m - \beta q^n)$$

haben. Also wird man nach Nehmen von

$$\Pi = \frac{\Theta - 1}{\Theta + 1},$$

das heißt

$$\Pi = \frac{\alpha(x+y)^{m-1} - \beta(x-y)^{n-1}}{\alpha(x+y)^{m-1} + \beta(x-y)^{n-1}},$$

das Integral

$$v = \frac{1}{m}\ln(\alpha(x+y)^m - \beta(x-y)^n)$$

erhalten. Wenn man *sechstens* $y = tx$ setzt, wird

$$dv = \frac{dx(1+\Pi t) + \Pi x dt}{x(\Pi + t)}.$$

Man setze $\frac{1+\Pi t}{1+t} = \Theta$, es wird $dv = \Theta\dfrac{dx}{x} + \dfrac{\Pi dt}{\Pi + t}$ sein, mit

$$\Pi = \frac{t\Theta - 1}{t - \Theta}.$$

Wenn also $\Theta = n$ gesetzt wird, dass

$$\Pi = \frac{tn-1}{t-n}, \quad \text{ist, wird} \quad dv = \frac{ndx}{x} + \frac{ntdt}{tt-1} - \frac{dt}{tt-1}$$

sein, und daher

$$v = n\ln x + \frac{1}{2}n\ln(tt-1) + \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t},$$

oder in x und y wird

$$v = n\ln\sqrt{yy-xx} + \frac{1}{2}\ln\frac{x+y}{x-y}$$

sein, welche Lösung mit der dritten vollkommen übereinstimmt. Schließlich wird allgemeiner nach Setzen von $\sqrt{yy-xx} = u$, wenn U irgendeine Funktion von u war, der Wert

$$\Pi = \frac{Uy-x}{y-Ux}$$

dem Gefragten Genüge leisten. Denn nach der Substitution geht die Formel

$$dv = \frac{dx+\Pi dy}{\Pi x+y}$$

in diese über:

$$dv = \frac{ydx-xdy}{yy-xx} + \frac{U(ydy-xdx)}{yy-xx}.$$

woher man

$$v = \frac{1}{2}\ln\frac{y+x}{y-x} + \int\frac{Udu}{u}$$

berechnet.

SCHOLION

§43 Hier kann man die Frage von allgemeiner Natur formulieren: Wenn p, q und P, Q gegebene homogene Funktionen von keiner Dimension der zwei Variablen x und y bezeichnet und diese Differentialformel vorgelegt war:

$$dv = \frac{pdx+\Pi qdy}{\Pi P+Q}x^{n-1},$$

in welche die unbestimmte Funktion Π eingeht, sie so zu bestimmen, dass die Integration gelingt. Aber diese höchst schwierige Untersuchung werde ich in einer anderen Dissertation in Angriff nehmen.