

ÜBER DIE LOGARITHMEN VON NEGATIVEN UND IMAGINÄREN ZAHLEN*

Leonhard Euler

§1 In den Schriften der Herren Leibniz und Jean Bernoulli findet man eine große Kontroverse über die Logarithmen von negativen und imaginären Zahlen, eine Kontroverse, welche von beiden Seiten vehement geführt worden ist; obwohl sich diese zwei großen Herren in dieser Angelegenheit nicht einig gewesen waren, kamen sie bei anderen Punkten bezüglich der Analysis zu einer völligen Übereinkunft. Dieser Dissens scheint umso bemerkenswerter, weil er über einen Gegenstands des Teils der Mathematik geführt wird, welcher als reine Mathematik bezeichnet wird, und von welchem man für gewöhnlich meint, dass er frei von jedweder Anfechtbarkeit ist, zumal er auf höchst strengen Beweisen gegründet ist. Denn man weiß, dass andere Fragen, bezüglich welcher Mathematiker sich nicht einig sind, sich auf den angewandten Teil der Mathematik beziehen, wo die verschiedenen Arten, Gegenstände zu betrachten und sie auf mathematische Betrachtungen zurückzuführen, Gelegenheiten für wirkliche Kontroversen bieten können; und oft wird gar damit geprahlt, dass sie ganz aus der Analysis oder der reinen Mathematik verbannt sind.

§2 Denn der Nimbus der Unfehlbarkeit, welchen sich diese Wissenschaft zu eigen gemacht hat, würde großen Schaden nehmen, wenn Fragen existierten, bei denen nicht nur die Meinungen geteilt sind, sondern es auch unmöglich wäre, die Wahrheit mit einem verständlichen Beweis zu finden, welcher all

*Originaltitel: "Sur les logarithmes des nombres negatifs et imaginaires", zuerst publiziert in: *Opera Postuma, Band 1* (1862, geschrieben 1747): pp. 269 – 281, Nachdruck in: *Opera Omnia: Serie 1, Band 19*, pp. 417 – 438, Eneström Nummer E807, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

diesen Streitigkeiten ein Ende setzt. Da es keinen Zweifel daran gibt, dass eine solche Zusammenführung zwischen den verschiedenen Ansichten der Herrn Leibniz und Bernoulli nicht existiert, werde ich die von beiden untersuchen, indem ich die Argumente, welcher jeder so zur Bekräftigung der eigenen wie zur Widerlegung der gegnerischen Position anführt, vorstellen, und ich hoffe, dabei diese Materie richtig aufzuarbeiten und ins rechte Licht zu rücken, sodass überhaupt kein Zweifel mehr bestehen kann, dass sowohl die eine wie die andere Partei verpflichtet sein wird, die Validität meines Urteils, welches ich fälle werde, anzuerkennen, welches auch zugleich die Streitigkeiten, welche noch bezüglich dieses Gegenstand entstehen könnten, ein Ende setzen wird.

§3 Den ersten Anlass zu dieser Kontroverse mit Herrn Bernoulli hat Herr Leibniz gegeben, als er in Epistel CXC die Meinung forcierte, dass die Begründung für 1 bis -1 , oder -1 bis $+1$ unzulässig wird, weil der Logarithmus oder die Basis für diesen Grund nicht vorhanden ist, wo er verständlicherweise annimmt, dass die Logarithmen von negativen Zahlen imaginär oder unmöglich sind. Daraufhin erklärte Herr Bernoulli, in Epistel CXCI, dass er nicht derselben Meinung ist, und dass er gar glaubt, die Logarithmen negativer Zahlen seien nicht nur reell, sondern auch den Logarithmen der entsprechenden positiven Zahlen gleich. Er sagt also, dass $\log(+x) = \log(-x)$, was er über die Gleichheit ihrer Differentiale beweisen will, zumal

$$d \log x = \frac{dx}{x} \quad \text{und ebenso} \quad d \log(-x) = \frac{-dx}{-x} = \frac{dx}{x}.$$

Auf dieses Argument erwiderte Herr Leibniz, dass die allgemeine Regel für das Differenzieren von Logarithmen, nach welcher man das Differential der Zahl durch die Zahl selbst teilt, nur für positive Zahlen Geltung hat, und als logische Konsequenz diese Differentiation $d \log x = \frac{dx}{x}$ nur rechtens ist, wenn x eine positive Größe bedeutet. Ich gestehe allerdings, dass diese Antwort das Fundament der ganzen Analysis erschüttern würde, welches hauptsächlich in der Allgemeinheit von Regel und Operationen besteht, welche für wahr gehalten werden, von welcher Natur auch immer man die Größen annimmt, auf welche man sie anwendet.

§4 Aber auch wenn die Regel für das Differenzieren von Logarithmen allgemein wahr ist, sodass $d \log x = \frac{dx}{x}$ ist, ob nun x eine positive oder negative Größe ist, beweist das Argument von Bernoulli nicht das, was er beweisen will.

Ich sage, dass daraus, dass die Differentiale der Größen $\log(x)$ und $\log(-x)$ gleich sind, in keiner Weise folgt, dass die Größen selbst einander gleich sind; zumal ja bekannt ist, dass zwei Größen, welche sich um eine konstante Größen unterscheiden, dasselbe Differential haben. So sind die Differentiale von $x + 1$ und $x - 1$ beide $= dx$, ohne dass man eine Gleichheit zwischen den Größen $x + 1$ und $x - 1$ ableiten kann. Unabhängig davon hätte Herr Bernoulli mit demselben Argument auch zeigen können, dass $\log(2x) = \log(x)$ ist, da ja

$$d \log(2x) = \frac{2dx}{2x} = \frac{dx}{x} = d \log(x)$$

und im Allgemeinen würde daraus folgen, dass $\log(nx) = \log(x)$ ist, während n irgendeine Zahl bedeutet. Deshalb kann man aus der Gleichheit zwischen den Differentialen von $\log(x)$ und $\log(-x)$ nichts anderes schließen, als dass die zwei Logarithmen sich um eine Konstante Größe unterscheiden. Und tatsächlich ist $\log(-x)$ wegen $-x = x \cdot (-1)$ nichts anderes als $\log x + \log(-1)$. Es ist wahr, dass Herr Bernoulli behauptet, dass $\log(-1) = \log(1)$ ist, in welchem Fall zweifelsohne $\log(-x) = \log(+x)$ wäre, aber das ist gerade das, was Herr Leibniz abstreitet und was Herr Bernoulli durch dieses Argument zeigen will, sodass diesbezüglich nichts entschieden ist.

§5 In demselben Abschnitt, welchen ich untersucht habe, gibt Herr Bernoulli noch ein weiteres Argument, welches sich aber nur vom vorherigen in seiner Art der Vortstellung unterscheidet, wenn er behauptet, dass die logarithmische Kurve auf den zwei Seiten von ihrer Asymptote zwei gleiche und ähnliche Teile hat, sodass jeder Abszisse oder dem Logarithmus zwei gleiche Ordinaten oder gleiche Zahlen zukommen, von denen die eine positiv, die andere negativ ist. Denn, die Gleichung der Kurve $ydx = ady$ betrachtend, wo x die Abszisse bezüglich der Asymptote der Logarithmuskurve, y die Ordinate und ihre Subtangente bezeichnet, scheint zu folgen, dass, wenn der gleichen Abszisse x der Wert $y = u$ entspricht, auch $y = -u$ sein wird, weil, wenn $+udx = +adu$ ist, auch $-udx = -adu$ gelten wird. Aber diese Begründung ist dieselbe wie zuvor, und es folgt gleichermaßen daraus, dass der Abszisse $= x$ auch die Ordinate $y = 2u$ und allgemein $y = nu$ zukommt, sodass die Kurve nicht nur zwei Ordinaten der $y = u$ und $y = -u$ hat, welche der Ordinaten der Abszisse $= x$ zukommen, sondern unendlich viele Ordinaten hat; diese Folgerung ist indes weit davon entfernt akzeptiert zu werden. Daraus sieht man ein, dass dieses Argument nicht beweisen kann, dass die Logarithmuskurve zwei parallele Zweige hat.

§6 Aber man wird mir womöglich entgegenhalten, dass dies dennoch das sicherste Mittel zur Beurteilung der Form einer gekrümmten Linie und die Anzahl ihrer Zweige durch ihre Gleichung bestimmt ist, und dass dies das Prinzip ist, nach welchem die Geometer die Formen von allen algebraischen Kurven bestimmen. Darauf antworte ich, dass die Methode nur Geltung hat, wenn die Kurve algebraisch ist, oder zumindest in endlichen Termen gegeben ist, und dass eine Differentialgleichung entsprechend nie darunter fällt. Denn man sagt, dass eine Differentialgleichung immer unbestimmt ist, wegen der beliebigen konstanten Größen, welche sie einschließt und welche man in der Integration einführen muss, sodass solche Gleichungen stets unendlich viele Kurven auf einmal in sich umfasst. Man hat dafür lediglich die Differentialgleichung $2ydy = adx$ für die Parabel anzusehen, und man wird erkennen, dass sie nicht nur diese endliche Gleichung $y^2 = ax$ enthält, sondern auch diese $y^2 = ax + ab$, welchen Wert auch immer man der Größe b gibt. Als logische Konsequenz, wenn man die Differentialgleichung $2ydy = adx$ betrachtet, muss man schließen, dass derselben Abszisse $= x$ nicht nur die Ordinate $y = \sqrt{ax}$ zukommt, sondern auch $y = \sqrt{ax \pm a^2}$, und im Allgemeinen $y = \sqrt{ax \pm ab}$. Diese Betrachtung ist ausreichend, um zu sehen, dass man nicht einmal kaum rechtens über die Form einer Kurve urteilen kann, indem man allein ihre Differentialgleichung betrachtet.

§7 Sowohl Herr Bernoulli als auch andere Mathematiker, welche dieselbe Ansicht noch teilen, versuchen weiter über andere Argumente zu beweisen, dass die Asymptote der Logarithmuskurve zugleich auch ihr Durchmesser ist. Diese Argumente sind auf die Konstruktion dieser Kurve gestützt, oder aber auf Analogien. Man bedient sich etwa der Analogie, indem anstelle der Gleichung für den Logarithmus $dx = \frac{dy}{y}$ diese allgemeinere $dx = \frac{dy}{y^n}$ betrachtet, deren Integral $x = C - \frac{1}{(n-1)y^{n-1}}$ ist: Man stellt nun fest, dass jedes Mal, wenn n eine ungerade Zahl ist, die Kurve ohne Zweifel einen Durchmesser hat, oder eben zwei gleiche und ähnliche Zweige. Das erkennt man, so heißt es, sofern man $n = 1$ nimmt, und weil 1 ungerade Zahl ist, muss der Logarithmus dieselbe Eigenschaft haben. Das ist, meiner Meinung nach, das stärkste Argument, welches bisher vorgebracht worden ist, um zu beweisen, dass der Logarithmus einen Durchmesser hat; ich werde nichtsdestoweniger zeigen, dass man diese Folgerung, welche man daraus ziehen will, nicht hinreichend sicher ist.

§8 Wannimmer es in der Analysis um Fälle von Integrierbarkeit oder in der Geometrie über gewisse Eigenschaften von Kurven geht, findet man selten hinreichend allgemeine Propositionen; indes sind nahezu immer ein oder mehrere Fälle auszunehmen, sodass man die Formeln entsprechend nicht allgemein anwenden kann. Man kann freilich berechtigt sagen, dass die Formel x^n allgemein integrierbar ist, vorausgesetzt, dass man den Fall $n = -1$ ausnimmt. Und das ist genauso bei vielen anderen allgemeinen Formeln, von denen man beinahe nie sagen kann, dass sie in allen Fällen ohne Ausnahme integrierbar sind. Wenn man also sagt, dass die Gleichung $dx = \frac{dy}{y^n}$ immer eine algebraische Kurve darstellt, welche rationale Zahl auch immer man für n einsetzt, würde die Proposition nur einige einzige Ausnahme erfahren, nämlich die des Falles $n = 1$. Weil sich dieser also dermaßen von all den anderen unterscheidet, wer garantiert, dass es nicht falsch ist, eine Ausnahme von der erwähnten Regel bezüglich des Durchmessers zu machen, welchen man der Kurve zuschreiben will, die in der Gleichung $dx = \frac{dy}{y}$ erfasst wird? Denn in all den anderen Fällen, wo n eine ungerade Zahl ist, erkennen wir mitsamt Evidenz die Notwendigkeit eines Durchmessers, weil in diesen Fällen die Gleichung integrierbar ist, aber im Fall $n = 1$ verflüchtigt sich diese Evidenz wegen der Unmöglichkeit der Integration. Als logische Konsequenz ist man zumindest gezwungen zuzugestehen, dass diese Folgerung, die man über diesen Gegenstand ziehen will, nicht vollkommen schlüssig ist.

§9 Man wird vielleicht bezweifeln, dass das Urteil über die Eigenschaft des Durchmessers denselben Ausnahmen unterliegt, welche man bei Integration beachten muss. Aber ich werde sehr klar zeigen, dass, genauso wie bei den algebraischen Kurven, man oft gewisse Ausnahmen in Bezug auf die Eigenschaft des Durchmessers zugestehen muss. Dafür betrachte man eines Beispiels wegen diese allgemeine Gleichung

$$y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3(b+x)}$$

und man wird nicht zögern zu schließen, dass die Kurve einen Durchmesser hat, weil, indem man sie rational macht, man zu einer Gleichung vom 8-ten Grad gelangt, wo alle Exponenten der Potenzen gerade sind. Allerdings, wie gewiss auch immer diese Folgerung scheint, muss man den Fall $b = 0$ ausschließen. Denn dann, wenn man die Gleichung $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3x}$ von der Irrationalität befreit, wird man genau

$$y^2 - 2y\sqrt{ax} + ax = \sqrt{a^3x} \quad \text{oder} \quad y^2 + ax = (2y + a)\sqrt{ax}$$

haben, und daher durch nochmaliges Quadrieren:

$$y^4 + 2axy^2 + a^2x^2 = 4axy^2 + 4a^2xy + a^3x \quad \text{oder} \quad y^4 - 2axy^2 - 4a^2xy + a^2x^2 - a^3x = 0,$$

welche, wegen des Termes $4a^2xy$, keinen Durchmesser hat. Weil man also bei den algebraischen Kurven manchmal gezwungen ist Ausnahmen zuzulassen, wie kann man dann sicher sein, dass das vorgetragene Argument unangreifbar beweist, dass der Logarithmus einen Durchmesser hat.

§10 Dieselbe Ungewissheit findet sich bei den anderen Argumenten, welche man aus der Konstruktion der logarithmischen Kurve über die Quadratur der Hyperbel ableitet. Denn selbst wenn man diese Konstruktion so abwandeln würde, dass notwendig zwei Zweige der Logarithmuskurve resultieren, hätte man wieder ziemlich gute Gründe zu bezweifeln, dass diese zwei Zweige notwendigerweise zusammengehören und nur eine durchgehende Linie bilden. Um das zu demonstrieren, könnte ich viele Beispiele von Konstruktionen vorstellen, durch welche man zwei verschiedene Kurven erhält, welche nicht über das Band der Stetigkeit miteinander verbunden sind. Denn weil man immer zwei Kurven, wie verschieden auch immer sie sind, in einer einzigen Gleichung erfassen kann, indem man ihre Gleichungen miteinander multipliziert, hat man sich lediglich eine solche Konstruktion vorzustellen, welche dieser zusammengesetzten Gleichung zukommt, und sie wird die zwei vorgelegten Kurven an die Hand geben, als ob sie nur eine einzige Kurve bilden würden. Nach Beschreiben der zwei Parabeln $v^2 = ax$ und $u^4 = a^3x$ über derselben Achse, sei etwa eine neue Kurve mit Ordinate y konstruiert, welche gleich der Summe der Ordinaten $u + v$ der zwei vorgelegten Parabeln ist; da ja diese Ordinaten so positiv wie negativ sein können, wird man für jede Abszisse x vier Ordinaten, nämlich $v + u$, $-u - v$, $v - u$, $-v + u$, finden, und die konstruierte Kurve wird einen Durchmesser haben. Nichtsdestoweniger zeigt uns die Gleichung

$$y = v + u = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3x},$$

dass die Kurve keinen Durchmesser hat, wie ich schon im vorhergehenden Abschnitt bemerkt habe.

§11 Außerdem, da es Konstruktionen gibt, von welchen man zwei verschiedene Kurven ableiten kann, so gibt es auch fehlerbehaftete Konstruktionen, welche nur einen Anteil der Kurve geben. Es sei nämlich etwa ein Kreis mit Durchmesser = a beschrieben, über welchem man die Abszisse = x nehme, die Ordinate y wird = $\sqrt{ax - x^2}$ sein; man verlängere dann jede Ordinate, bis diese Strecke $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^4}$ gleich ist, und diese neue Ordinate, welche $z = \sqrt{ax}$ genannt sei, wird eine Parabel anzeigen. Aber diese Beschreibung einer Parabel erstreckt sich nicht über den Kreis hinaus, obwohl die Parabel sich eigentlich bis ins Unendliche erstreckt. Dieser Umstand zeigt abermals, dass man nicht immer sicher über die wahre Form einer Kurve und all ihre Anteile, aus welchen sie besteht, urteilt, vermöge welcher Konstruktion auch immer man sie angeben kann.

§12 Daher hat dieselbe Methode, über alle Anteile zu urteilen, welche zu derselben Kurve gehören, lediglich ihre Geltung bei algebraischen Kurven. Denn nachdem die Gleichung, welche die Natur der Kurve ausdrückt, von jeder Irrationalität befreit worden ist, betrachte man, ob die rationale Gleichung, welche resultiert, in Hinblick darauf, ob sie rationale Faktoren enthält oder nicht. Im ersten Fall urteilt man, dass die Kurve aus so vielen Faktoren zusammengesetzt ist wie es Faktoren gibt. Aber wenn die Kurve nicht in rationale Faktoren auflösbar ist, so schließt man, dass alle Punkte, welche mir dieser Gleichung beschrieben werden, zu derselben Kurve gehören. Aus diesem Grund, wenn es sich um transzendenten Kurven handelt, weil die Gleichung selbst nicht algebraisch ist, weiß man nicht, wie man dieselbe Frage formulieren soll, ob sie rationale Faktoren hat oder nicht, und daher findet das Urteil über die etwaigen Anteil, welche zur selben Kurve gehören, hier nicht weiter einen Platz, wenn diese Anteile nicht unmittelbar miteinander verbunden sind. Und dementsprechend ist man nicht mehr in der Lage zu entscheiden, ob die Logarithmuskurve zwei gleiche Zweige hat, die beide zu einem einzigen zusammenlaufen, oder nicht. Zumindest muss man zugestehen, dass diese Entscheidung, was sich zuträgt, nicht unbedingt etwas mit dem Gegenstand der Untersuchung zu tun hat, ob nun die Logarithmuskurve von negativen Zahlen reell oder imaginär sind.

§13 Die Logarithmen basieren auf einer konstanten Zahl, welche man nach Belieben festlegt und deren Logarithmus man = 1 annimmt. Diese Zahl sei e , und sofern x den Logarithmus der Zahl y bedeutet, sodass $x = \log y$ gilt, so

wird man auch $y = e^x$ haben. Also ist der Logarithmus x einer vorgelegten Zahl $= y$ nichts anderes als der Exponent der Potenz von e , welche der Zahl y gleich ist. In den üblichen Tabellen nimmt man die beliebige Zahl $e = 10$ an, und dann wird x der Logarithmus der Zahl y sein, wenn $10^x = y$ ist, und in den Logarithmen, welche man hyperbolische nennt und deren Eigenschaften diese ist, wenn ω einen unendlich kleinen Bruch bedeutet, dass der Logarithmus der Zahl $1 + \omega$ gleich ω ist, wird die Zahl e , deren Logarithmus $= 1$ ist, gleich 2,718281828459 sein. Nun, welchen Wert auch immer man dieser Zahl e gibt, solange er > 1 ist, sieht man anhand der Formel, dass es für jede positive Zahl y möglich ist einen reellen Wert von x anzugeben, sodass e^x gleich y werden wird. Aber es ist auch ersichtlich, dass, wenn y eine negative Zahl ist, man keinen reellen Wert für x zu finden weiß, sodass die Potenz e^x negativ $= y$ wird.

§14 Es ist jedoch wahr, dass, wenn x ein Bruch mit geradem Nenner ist, die Potenz, bzw. die Wurzel e^x so positiv wie negativ genommen werden kann, sodass, wenn der Logarithmus der Zahl x etwa $= \frac{1}{2}$ ist, sowohl $= -\sqrt{e}$ als auch $= +\sqrt{e}$ sein kann. Aber diese Zweideutigkeit ergibt sich nicht in den Fällen, in denen x ein Bruch ist, dessen Nenner eine ungerade Zahl ist: Und wenn der Logarithmus x hier $= 2$ ist, wird es gewiss falsch sein, dass 2 der Logarithmus von $y = -ee$ war, weil $-ee$ keineswegs gleich $+ee$ ist. Und daher muss zumindest zugestanden werden, dass die Logarithmen von negativen Zahlen im Allgemeineren nicht reell sind. Aber was die Mehrdeutigkeit der Formel e^x in den Fällen, wo x ein Bruch mit geradem Nenner ist, betrifft, weiß ich nicht, ob man sie bei den Logarithmen zulassen kann. Denn mit Blick auf die Natur der Verwendung der Logarithmen, scheint es, dass es zu jedem Logarithmus nur eine einzige Zahl gibt.

§15 Wie dem auch sei, man wird aus ähnlichen Größen nie beweisen, dass der Logarithmus von -1 gleich dem von $+1$ ist, weil e^0 keinen anderen Wert haben kann als $+1$. Wenn irgendwer sagt, dass e^0 beispielsweise wie $e^{\frac{0}{2}}$ und demnach als $\sqrt{e^0}$ betrachtet werden kann, oder wer sagt, dass $\sqrt{+1}$ so $+1$ wie -1 wäre, könnte man mit derselben Begründung beweisen, dass x als $= x^{\frac{2}{2}}$ sogleich $+x$ wie $-x$ ist, und man würde außerdem sagen, dass $a + x$ dasselbe ist wie $a - x$; und man könnte weiterhin untermauern, ebenfalls mit demselben Argument, dass alle reellen Größen einander gleich sind. Aber wenn der Logarithmus von -1 nicht $= 0$ ist, wird er notwendig imaginär

sein; und weil ja $-y = -1 \cdot y$ ist, werden wir $\log(-y) = \log(-1) + \log y$ haben, sodass für reellen Logarithmus von y der Logarithmus von $-y$ ohne Ausnahme imaginär sein wird.

§16 Die Annahme, nach welcher alle Logarithmen nur einer Zahl y zukommen können, wird abermals bestätigt, wenn man die Auflösung der Formel e^x in diese Reihe betrachtet

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \text{etc.},$$

während e die Zahl bedeutet, deren hyperbolischer Logarithmus = 1 ist. Da diese Reihe in der Analysis als dem Ausdruck e^x völlig gleichwertig betrachtet wird, kann man nicht bezweifeln, dass ihr Wert bestimmt ist, da ja, sobald man x einen gewissen Wert zugeteilt hat, diese Reihe konvergiert, egal einen wie großen Wert man für x einsetzt. Und aus diesem Grund ist mit Recht zu bekräftigen, weil der Ausdruck e^x die Zahl bezeichnet, deren Logarithmus = x ist, dass er nie irgendeine Mehrdeutigkeit beinhaltet, und dass sein Wert immer eindeutig und positiv ist, welchen Bruch auch immer man für x einsetzt, sodass, obwohl x ein Bruch wie $\frac{1}{2}$ ist, der Ausdruck für e^x immer einen positiven Wert annehmen wird.

§17 Wenn jemand darauf bestehen wollte, dass die Formel e^x im Fall $x = \frac{1}{2}$ zwei Werte hätte, sodass eben $\frac{1}{2}$ der Logarithmus so von $-\sqrt{e}$ wie von $+\sqrt{e}$ wäre, würde folgen, dass die Logarithmen imaginärer Zahlen den reellen gleich sind. Denn nehmen wir $x = \frac{1}{3}$ an, und man weiß dann, dass die Formel die drei Werte

$$\sqrt[3]{e}, \quad \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{e}, \quad \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{e}$$

beinhaltet, von jeder von welchen der Logarithmus = $\frac{1}{3}$ ist. Nun wollen wir $x = \frac{1}{4}$ annehmen und die Werte von $y = e^{\frac{1}{4}}$ werden

$$\sqrt[4]{e}, \quad -\sqrt[4]{e}, \quad +\sqrt{-1} \cdot \sqrt[4]{e}, \quad -\sqrt{-1} \cdot \sqrt[4]{e}$$

sein. Dann werden wir

$$\log(+\sqrt{-1} \cdot \sqrt[4]{e}) = \log(-\sqrt{-1} \cdot \sqrt[4]{e}) = \frac{1}{4}$$

erhalten.

Aber es ist auch

$$\log(\sqrt[4]{e}) = \frac{1}{4} \log e = \frac{1}{4},$$

woher folgt, dass $\log(\sqrt{-1}) = 0$. Aber nachdem Herr Bernoulli diese schöne Entdeckung gemacht hatte, dass $\frac{\log(\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$ die Quadratur des Kreises bedeutet, weil ja $\sqrt{-1}$ ohne Zweifel imaginär ist, muss es $\log(\sqrt{-1})$ ebenso sein, und niemand wird weniger Recht haben als Herr Bernoulli selbst, fortan zu bekräftigen, dass $\log(\sqrt{-1}) = 0$ ist.

§18 Nachdem wir also gesehen haben, dass noch niemand mit zureichender Begründung bewiesen hat, dass die Logarithmen von negativen Zahlen reell sind, sondern vielmehr die gegenteilige Auffassung, nach welcher die Logarithmen negativer Zahlen imaginär sind, mit der Wahrheit konform ist, werde ich die Schwierigkeiten auflisten, welche bei der einen und der anderen Position auftreten, ob man nun sagt, dass die Logarithmen negativer Zahlen reell sind, oder ob man sie für imaginär hält. Diese Schwierigkeiten werden dermaßen groß erscheinen und solche Widersprüche implizieren, dass man kaum erfassen können wird, wie es möglich sein wird, sich aus diesen zu entziehen und die Theorie der Logarithmen von jedwedem Angriff zu schützen; indes hoffe ich, sie überwinden zu können.

§19 Wenn jemand wie Herr Bernoulli will, dass die Logarithmen negativer Zahlen dieselben sind wie die positiver Zahlen, oder, was dasselbe ist, dass $\log(-1) = 0$ ist, wird man auf die folgende Schwierigkeit stoßen: Entweder ist es allgemein wahr, dass $\log(a^x) = x \log(a)$ ist oder nicht. Wenn es wahr ist, wird man aus selbiger Gleichung auch

$$\log(-1)^x = x \log(-1) = 0$$

haben, womit man freilich leicht einverstanden sein wird, wenn x eine ganze Zahl ist. Aber wenn x ein Bruch ist, wird man auch $\log(\sqrt{-1}) = 0$ haben, und als logische Konsequenz wäre die Bernoulli'sche Reduktion von Kreisbogen auf Logarithmen falsch, was freilich absurd wäre, weil diese Entdeckung durch die sichersten Beweise der Analysis validiert ist. Aber wenn jemand abstreitet, dass $\log a^x = x \log(a)$ ist, stößt man die ganze Theorie von Logarithmen um.

Denn auch wenn man die Auflösung $\log(a^x) = x \log(a)$ nur für die Fälle zulassen wollte, in denen x eine ganze Zahl war, wird sie dennoch gänzlich unnütz sein, wenn x eine allgemeine oder unbekannte Zahl ist.

§20 Man sage nun wie Herr Leibniz, dass die Logarithmen von negativen Zahlen nicht reell sind, sondern imaginär: Und man wird merken, dass man schnell in dieselbe Verlegenheit geraten wird. Denn es sei $\log(-1) = p$, sodass p eine imaginäre Zahl ist, und man kann nicht abstreiten, dass $\log(-1)^n = np$ ist, solange n eine ganze Zahl ist. Es sei jetzt $n = 2$ und wir werden

$$\log(-1)^2 = \log(+1) = 2p$$

erhalten. Aber in der Lehre der Logarithmen ist es das erste Prinzip, dass $\log(+1) = 0$ ist; als logische Konsequenz hätte man dann $2p = 0$ und daher auch $p = 0$, was entgegen der Annahme ist. Man wird genauso zeigen, dass $\log(\sqrt{-1})$, $\log\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)$ und die Logarithmen höherer Wurzeln der Einheit alle $= 0$ sein werden, woraus dieselben Widersprüche hervorgehen wie sie in der vorhergehenden Annahme entstanden sind.

§21 Siehe also diese sehr offenkundigen Widersprüche, auf die man stößt, von welcher Seite auch immer man sich der Sache nähert: Ich bezweifelt nicht, dass ein Großteil der Mathematiker das erkannt hat, obwohl sie es nicht für angebracht hielten, ihre Zweifel bezüglich dieser Angelegenheit öffentlich kundzutun, da sie befürchteten, die Analysis zu unglaublich zu machen, wenn sie nicht in der Lage wären, die Theorie der Logarithmen zu retten. Das wäre ohne Zweifel ein unauslöschlicher Schmutzfleck in der Analysis, wenn die Lehre der Logarithmen so voller Widersprüche wäre, dass es unmöglich wäre, eine Vereinheitlichung derselben zu finden. Ich habe mich auch schon lange Zeit mit diesen Schwierigkeiten herumgeschlagen, und ich habe mir viele Gedanken darüber gemacht, wie ich sie auf irgendeine Weise überwinden könnte, ohne gezwungen zu sein, die Theorie der Logarithmen gänzlich aufzugeben. Ich stelle mir vor, dass, wie bezüglich der Menge eine Größe immer zwei Quadratwurzeln, drei Kubikwurzeln, vier biquadratische Wurzeln etc. hat, so eine Größe auch zwei verschiedene Hälften, drei Drittel, vier Viertel etc. haben könnte, von welchen nur je eines reell und die anderen imaginär wären. Für $\log(y) = x$ gesetzt stelle ich mir demnach vor, dass

$$\log(\sqrt{y}) = \frac{1}{2}x \quad \text{und} \quad \log(-\sqrt{y}) = \frac{1}{2}x'$$

und dass $\frac{1}{2}x$ und $\frac{1}{2}x'$ verschieden sein könnten, obwohl das Doppelte von beiden $= x$ ist. Auf dieselbe Weise wäre für die Kubikwurzeln von y

$$\log(\sqrt[3]{y}) = \frac{1}{3}x, \quad \log\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{y}\right) = \frac{1}{3}x' \quad \text{und}$$

$$\log\left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{y}\right) = \frac{1}{3}x'',$$

wo $\frac{1}{3}x$, $\frac{1}{3}x'$ und $\frac{1}{3}x''$ verschiedene Zahlen sind, die erste $\frac{1}{3}x$ reell und die zwei anderen $\frac{1}{3}x'$ und $\frac{1}{3}x''$ imaginär, sodass das Dreifache von jeder $= x$ ist. Diese Erklärung erschien mir zwar extrem paradox und unhaltbar, aber dennoch weniger absurd als die Widersprüche, welche ich gezwungen war in der Theorie von Logarithmen von negativen und imaginären Zahlen einzugestehen.

§22 Nachdem man die Bedeutung dieser ganzen Schwierigkeiten deutlich gemacht hat, welche sich in der Lehre der Logarithmen finden und sogar als offenkundige Widersprüche erscheinen, wird man schwer nachvollziehen können, dass es möglich ist, diese Widersprüche aufzulösen, ohne die Gewissheit der Analysis und der Regeln, auf welche sie gestützt ist, in irgendeiner Weise zu beeinträchtigen. Indes ist diese Wahrheit zu fest etabliert, als dass sie einem Widerspruch unterworfen sein könnte, und es sind lediglich die unrichtigen Arten und Weisen, wie wir sie betrachten, die uns täuschen können. Oft ist es dermaßen schwierig, diesen Mangel an Richtigkeit zu erkennen, welcher sich in unseren Ideen findet und uns so große Schwierigkeiten sehen lässt, dass es uns gänzlich unmöglich scheint, die Wahrheit zu erretten. Dies ist genau der Fall, in welchem wir uns bei den Logarithmen von negativen und imaginären Zahlen befinden; denn nachdem ich alle Schwierigkeiten, die ich gerade dargestellt habe, sorgfältig abgewogen habe, habe ich entdeckt, dass sie eben nur dadurch zustande kommen, dass wir annehmen, dass jede Zahl nur einen einzigen Logarithmus hat. Denn wenn diese Annahmen wahr wären, wäre es sehr gewiss, dass man kaum einen Weg finden könnte, sich dieser Verlegenheit zu entziehen, in welche uns dieser Gegenstand bringt. Aber sofern wir eingestehen, dass eine Zahl mehrere, ja sogar unendlich viele Logarithmen haben kann, dann verlieren alle erwähnten Schwierigkeiten ihre

Kraft und verschwinden ganz und gar, und man wird die vollkommensenste Harmonie zwischen all diesen Wahrheiten erkennen.

§23 Ich sage also, dass, obgleich die Zahl, deren Logarithmus = 1 angenommen wird, bestimmt wird, jede Zahl nichtsdestoweniger eine unendliche Menge an Logarithmen hat, all deren Werte mit einer Ausnahme imaginär sind, wenn die Zahl positiv ist; aber wenn sie negativ oder imaginär ist, werden all ihre Logarithmen gleichermaßen imaginär sein. Als logische Konsequenz dessen wird der Logarithmus der Einheit nicht nur = 0 sein, sondern wird auch noch unendlich viele imaginäre Größe bedeuten, von welchen jede ebenso den Platz des Logarithmus der Einheit, also von 0, einnimmt. Es seien also diese Logarithmen der Einheit

$$0, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \vartheta \text{ etc.}$$

und weil der Logarithmus der Quadratwurzel die Hälfte des Logarithmus der Potenz ist, $\sqrt{1}$ ist ja so +1 wie -1, werden die Logarithmen des ersten Wertes +1

$$0, \frac{1}{2}\beta, \frac{1}{2}\delta, \frac{1}{2}\zeta, \frac{1}{2}\vartheta \text{ etc.}$$

sein und die Logarithmen des anderen Wertes -1 werden sein:

$$\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\gamma, \frac{1}{2}\varepsilon, \frac{1}{2}\eta \text{ etc.}$$

welche von den vorhergehenden verschieden sind, obwohl deren Doppeltes die Logarithmen der Einheit geben. Ebenso, die Kubikwurzeln nehmend, wird gelten:

$$\log 1 = 0, \frac{1}{3}\gamma, \frac{1}{3}\zeta, \frac{1}{3}\vartheta, \text{ etc.}$$

$$\log \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{3}\alpha, \frac{1}{3}\delta, \frac{1}{3}\eta, \text{ etc.}$$

$$\log \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{3}\beta, \frac{1}{3}\varepsilon, \frac{1}{3}\vartheta, \text{ etc.}$$

und diese Betrachtung beseitigt schon einen großen Teil der Schwierigkeiten, welche uns zuvor in Verlegenheit gebracht haben.

§24 Um die unendliche Menge an Logarithmen nachzuweisen, welche jeder Zahl zukommen, braucht man sich nur die wunderbare Beziehung zuzusehen, welche zwischen den Logarithmen und den Kreisbögen besteht: Weil man weiß, dass sich die Kreisbögen über imaginäre Logarithmen ausdrücken können, und umgekehrt, die Logarithmen durch imaginäre Kreisbogen. Denn weil die Sinus oder Kosinus Zahlen zukommen wie die Bogen den Logarithmen, und weil sich derselbe Sinus auf unendlich viele Bogen bezieht, folgt daraus, dass sich dieselbe Zahl auf unendlich viele verschiedene Logarithmen beziehen muss. Wir kennen den Kreis besser als die Logarithmuskurve, und aus diesem Grund wird uns die Betrachtung des Kreises zu einem umfassenderen Verständnis der Logarithmen führen als die Logarithmuskurve selbst; außerdem können wir im Kreis alle Bögen bestimmen, welche demselben Sinus oder Kosinus entsprechen, und obwohl diese Bogen beim Übergang zu Logarithmen imaginär werden, unterlassen sie es nicht, indem sie uns von der unendlichen Menge der Logarithmen überzeugen, uns zur Erkenntnis dieses Ausdruck zu führen und die Art der Nicht-Realität aufzuzeigen, unter welche sie fallen; und dies ist alles, was man sich zum Verständnis einer imaginären Größe wünschen kann.

§25 Es sei φ ein beliebiger Bogen des Kreises, dessen Radius ich annehme = 1 zu sein. Es sei x der Sinus zu diesem Bogen, und y sein Kosinus, sodass $y = \sqrt{1 - x^2}$ ist; wenn man den Kreisumfang = 2π oder den Bogen von $180^\circ = \pi$ nennt, ist es klar, dass all diese Bogen, erfasst in diesem allgemeinen Ausdruck $\pm 2\pi n + \varphi$, nicht nur denselben Sinus = x haben, sondern auch denselben Kosinus = $y = \sqrt{1 - x^2}$, solange n eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Aber weil $d\varphi = \frac{dx}{y} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ist, setze man $x = z\sqrt{-1}$, dass $\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \log(\sqrt{1+z^2} + z) + C$ ist. Als logische Konsequenz werden wir

$$\varphi = \sqrt{-1} \cdot \log \left(\sqrt{1 - x^2} + \frac{x}{\sqrt{-1}} \right) + C$$

erhalten, wo es klar ist, dass diese Konstante = 0 ist, weil für $x = 0$ gesetzt der Bogen φ genauso verschwinden muss. Also werden wir mit

$$\varphi = \sqrt{-1} \log(\sqrt{1 - x^2} - x\sqrt{-1}) \quad \text{dann} \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log(\sqrt{1 - x^2} + x\sqrt{-1})$$

haben oder eben auch:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log(y + x\sqrt{-1}).$$

§26 Diese Gleichung, welche wir gerade gefunden haben und die die Beziehung zwischen dem Bogen φ und den Sinus und Kosinus ausdrückt, behält auch ihre Gültigkeit für alle anderen Bogen, welche denselben Sinus x und Kosinus y haben; als logische Konsequenz haben wir:

$$\varphi \pm 2n\pi = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log(y + x\sqrt{-1}) \quad \text{und daher} \quad \log(y + x\sqrt{-1}) = (\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1}.$$

Daraus ist es klar, dass ebenso die Zahl $y + x\sqrt{-1}$ einer unendlichen Menge Logarithmen zukommt, welche alle in dieser allgemeinen Formel $(\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1}$ enthalten sind, wo man anstelle von n eine beliebige ganze Zahl setzen kann. Weil x der Sinus und y der Kosinus des Bogens φ ist, setzen wir $x = \sin \varphi$ und $y = \cos \varphi$, und wir werden diese Gleichheit erhalten:

$$\log(\cos \varphi + \sin \varphi \cdot \sqrt{-1}) = (\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1}.$$

§27 Von dieser Gleichung werde ich die wesentlichen Fälle erforschen, welche hinreichend Aufschluss über diese Materie geben werden. Es sei also zuerst:

$$\varphi = 0, \quad \text{und es wird} \quad \cos \varphi = 1 \quad \text{und} \quad \sin \varphi = 0$$

sein; und die gefundene Gleichung wird uns geben:

$$\log 1 = \pm 2n\pi\sqrt{-1}.$$

Also, indem man für n nacheinander alle ganzen Zahlen einsetzt, werden die Logarithmen der Einheit sein:

$$\log 1 = 0, \quad \pm 2\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 4\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 6\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 8\pi\sqrt{-1} \quad \text{etc.},$$

woher wir sehen, dass, obwohl der Logarithmus von 1 ja = 0 ist, wie es allbekannt ist, es unendlich viele imaginäre Ausdrücke gibt, von welchen jeder einzelne, wie der Logarithmus der Einheit, 0, ist.

§28 Allein diese Überlegung bringt uns in diese Lage, alle Logarithmen von jeder positiven Zahl anzugeben, welche man vorlegen kann. Denn es sei a die vorgelegte Zahl und α sein hyperbolischer Logarithmus, welchem man mit den gewöhnlichen Methoden finden kann; und weil $\log a = \log 1 + \log a = \alpha + \log 1$ ist, werden alle Logarithmen der Zahl a sein:

$$\log a = \alpha, \quad \alpha \pm 2\pi\sqrt{-1}, \quad \alpha \pm 4\pi\sqrt{-1}, \quad \alpha \pm 6\pi\sqrt{-1}, \quad \alpha \pm 8\pi\sqrt{-1} \quad \text{etc.},$$

von welchen alle, außer dem ersten α , imaginär sind. Es ist zu bemerken, dass ich hier lediglich von hyperbolischen Logarithmen rede, zu welchen man ja durch Integration geführt worden ist; aber weil man weiß, dass die Logarithmen von verschiedenen Gattungen immer eine feste Beziehung zueinander haben, überträgt sich all dies, was ich gerade gesagt habe, und all dies, was ich speziell über hyperbolische Logarithmen gesagt habe, unmittelbar auf die gewöhnlichen Logarithmen, wo man $\log 10 = 1$ setzt, oder auch auf alle anderen Gattungen von Logarithmen.

§29 Es sei nun der Bogen φ von 180° oder es sei $\varphi = \pi$ vorgelegt, und wir werden $\sin \varphi = 0$ und $\cos \varphi = -1$ haben. Mit dieser Annahme wird die gefundene allgemeine Gleichung in diese Form übergehen:

$$\log(-1) = (\pi \pm 2\pi n)\sqrt{-1} = (1 \pm 2n)\pi\sqrt{-1},$$

woraus wir alle unendlich vielen Logarithmen der negativen Zahl -1 ableiten; denn wir werden erhalten:

$$\log(-1) = \pm\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 3\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 5\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 7\pi\sqrt{-1} \quad \text{etc.}$$

und daraus sehen wir sehr deutlich, dass all diese Logarithmen von -1 imaginär sind und alle verschieden von den Logarithmen von $+1$ sind. Es steht also nichts im Wege, dass die Logarithmen von $(-1)^2$, welche

$$\pm 2\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 6\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 10\pi\sqrt{-1} \quad \text{etc.}$$

sein werden, die erkennbar in den Logarithmen von $+1$ enthalten sind; dies reicht aus, um die scheinbaren Widersprüche aufzulösen, die ich oben erwähnt habe, obwohl nicht umgekehrt folgt, dass die Hälften der Logarithmen von $+1$ die Logarithmen -1 sind: Dies erlaubt auch die Natur der Größen selbst nicht, weil -1 nicht die alleinige Quadratwurzel von $+1$ ist.

§30 Man wird nun gleichermaßen leicht erkennen, dass alle Logarithmen von allen negativen Zahlen imaginär sind. Denn es sei $-a$ eine beliebige negative Zahl, und es sei α der Logarithmus der positiven Zahl $+a$, gefunden mit den gewöhnlichen Methoden, sodass $\log(+a) = \alpha$ ist, und weil $\log(-a) = \log(a) + \log(-1)$ ist, werden wir all diese Logarithmen der negativen Zahl $-a$ wie folgt ausgedrückt erhalten:

$$\log(-a) = \alpha \pm \pi\sqrt{-1}, \quad \alpha \pm 3\pi\sqrt{-1}, \quad \alpha \pm 5\pi\sqrt{-1}, \quad \alpha \pm 7\pi\sqrt{-1} \quad \text{etc.},$$

welche alle imaginär sind. Damit ist die Frage, diskutiert zwischen den Herren Leibniz und Bernoulli, darüber, ob die Logarithmen von negativen Zahlen reell oder imaginär sind, zugunsten des Ersteren entschieden, welcher ja meinte, dass sie imaginär sind, und all die Einwände, welche Herr Bernoulli gegen diese Meinung vorgebracht hatte, haben keinen Einfluss mehr auf diese Entscheidung.

§31 Ich gehe noch weiter und, nach Bestimmung der Logarithmen von positiven wie negativen Logarithmen, werde ich nun zu den imaginären Zahlen übergehen. Es sei zu diesem Zweck $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ und wir werden $\cos \varphi = 0$ und $\sin \varphi = 1$ erhalten, woraus wir schließen:

$$\log(\sqrt{-1}) = \left(\frac{1}{2}\pi \pm 2n\pi\right) \sqrt{-1} = \left(\pm 2n + \frac{1}{2}\right) \pi \sqrt{-1},$$

und daraus werden all die Logarithmen von $+\sqrt{-1}$ sein:

$$\log(+\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}; \quad -\frac{3}{2}\pi\sqrt{-1}, \quad +\frac{5}{2}\pi\sqrt{-1}, \quad -\frac{7}{2}\pi\sqrt{-1}, \quad \frac{9}{2}\pi\sqrt{-1}, \quad \text{etc.}$$

Aber wenn man $\varphi = -\frac{1}{2}\pi$ setzt, werden wir wegen $\cos \varphi = 0$ und $\sin \varphi = -1$ erhalten:

$$\log(-\sqrt{-1}) = \left(-\frac{1}{2}\pi \pm 2n\pi\right) \sqrt{-1},$$

und als logische Konsequenz

$$\log(-\sqrt{-1}) = -\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}, \quad +\frac{3}{2}\pi\sqrt{-1}, \quad -\frac{5}{2}\pi\sqrt{-1}, \quad +\frac{7}{2}\pi\sqrt{-1} \quad \text{etc.}$$

Daher ist es ersichtlich, sofern man die entsprechenden Logarithmen von $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ addiert, um die Logarithmen des Produktes derer = 1 haben, dass man dieselben Logarithmen erhält, welche wir für die von +1 gefunden haben. Und wenn man die Logarithmen von $-\sqrt{-1}$ von den Logarithmen von $+\sqrt{-1}$ subtrahiert, um den Logarithmus des Quotienten $\frac{-\sqrt{-1}}{-\sqrt{-1}} = -1$ zu haben, wird man die Logarithmen, die von -1 gefunden worden sind, erhalten.

§32 Es sei darüber hinaus

$$\varphi = \frac{1}{3}\pi, \quad \text{und es wird} \quad \cos \varphi = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

sein, woher wir erschließen werden:

$$\log \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} = \left(\frac{1}{3}\pi \pm 2n\pi \right) \sqrt{-1},$$

sodass die Logarithmen von $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ sein werden:

$$\begin{aligned} \log \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{3}\pi\sqrt{-1}, \quad -\frac{5}{3}\pi\sqrt{-1}, \quad -\frac{11}{3}\pi\sqrt{-1}, \quad -\frac{5}{3}\pi\sqrt{-1}, \quad , \quad \text{etc.} \\ +\frac{7}{3}\pi\sqrt{-1}, \quad +\frac{13}{3}\pi\sqrt{-1}, \quad +\frac{19}{3}\pi\sqrt{-1} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Es sei $\varphi = -\frac{1}{3}\pi$ und man wird $\cos \varphi = \frac{1}{2}$ und $\sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ erhalten, woher wir finden:

$$\log \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} = \left(-\frac{1}{3} \pm 2n \right) \pi \sqrt{-1},$$

und daher:

$$\begin{aligned} \log \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{3}\pi\sqrt{-1}, \quad +\frac{5}{3}\pi\sqrt{-1}, \quad +\frac{11}{3}\pi\sqrt{-1}, \quad +\frac{17}{3}\pi\sqrt{-1}, \quad , \quad \text{etc.} \\ -\frac{7}{3}\pi\sqrt{-1}, \quad -\frac{13}{3}\pi\sqrt{-1}, \quad -\frac{19}{3}\pi\sqrt{-1} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Es sei $\varphi = \frac{2}{3}\pi$, sodass $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$ und $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ist, und wir werden erhalten:

$$\log \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = \left(\frac{2}{3} \pm 2n \right) \pi \sqrt{-1} \quad \text{und}$$

dann auch

$$\begin{aligned} \log \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = & \frac{2}{3}\pi\sqrt{-1}, -\frac{4}{3}\pi\sqrt{-1}, -\frac{10}{3}\pi\sqrt{-1}, -\frac{16}{3}\pi\sqrt{-1}, \dots, \text{ etc.} \\ & +\frac{8}{3}\pi\sqrt{-1}, +\frac{14}{3}\pi\sqrt{-1}, +\frac{20}{3}\pi\sqrt{-1} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Zuletzt setze man $\varphi = -\frac{2}{3}\pi$, man wird $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$ und $\sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ haben, was dann gibt:

$$\log \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = \left(-\frac{2}{3} \pm 2n \right) \pi \sqrt{-1}$$

und

$$\begin{aligned} \log \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = & -\frac{2}{3}\pi\sqrt{-1}, +\frac{4}{3}\pi\sqrt{-1}, +\frac{10}{3}\pi\sqrt{-1}, +\frac{16}{3}\pi\sqrt{-1}, \dots, \text{ etc.} \\ & -\frac{8}{3}\pi\sqrt{-1}, -\frac{14}{3}\pi\sqrt{-1}, -\frac{20}{3}\pi\sqrt{-1} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Weil man weiß, dass

$$\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

die Kubikwurzeln von $+1$ sind, so führe man alle Proben in dieser Hinsicht durch, und man wird durchgehend eine wunderbare Übereinstimmung mit der Wahrheit feststellen.

§33 Um die Logarithmen von Potenzen zu erlangen, hat man der allgemeinen Regel zu folgen, nach welcher der Logarithmus der Wurzel mit dem Exponenten der Potenz multipliziert werden muss. Aber, weil die Wurzel eine

unendliche Menge an Logarithmen hat, kann man ebenso viele verschiedene Werte zusammenzählen wie der Exponent der Potenz Einheiten beinhaltet. So, während die Logarithmen von -1 als

$$\pm\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 3\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 5\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 7\pi\sqrt{-1} \quad \text{etc.}$$

gefunden werden, wird das Doppelte dieser Logarithmen nicht nur die Logarithmen des Quadrats $(-1)^2$ geben, sondern auch die Summen von zwei beliebigen, und mit diesem Mittel wird man alle diese Formeln erhalten

$$0, \quad \pm 2\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 4\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 6\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 8\pi\sqrt{-1} \quad \text{etc.},$$

welche alle Logarithmen von $+1$ sind. Genauso, während man je drei Logarithmen von

$$\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \quad \text{oder von} \quad \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

nimmt, wird man gleichermaßen alle Logarithmen von $+1$ erhalten, weil

$$\text{so} \quad \left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)^3 \quad \text{wie auch} \quad \left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right)^3$$

gleich der Einheit ist.

§34 Diese Möglichkeit die Logarithmen der Potenzen zu finden wird auch durch die allgemeine in § 26 entdeckte Formel bestätigt; denn es ist bewiesen worden, dass

$$(\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1})^\mu = \log(\cos \mu\varphi + \sin \mu\varphi \cdot \sqrt{-1}),$$

dann wird sein:

$$\log(\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1})^\mu = \log(\cos \mu\varphi + \sin \mu\varphi \sqrt{-1}).$$

Da diese Formel ähnlich zur ersten ist, hat man im Logarithmus lediglich $\mu\varphi$ anstelle von φ zu setzen, und weil es erlaubt ist $\varphi \pm 2m\pi$ anstatt φ zu setzen, werden wir auch erhalten:

$$\log(\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{\nu} (\mu\varphi + 2\mu m\pi \pm 2\nu n\pi) \sqrt{-1},$$

während die Buchstaben m und n irgendwelche ganze Zahlen bezeichnen. Als logische Konsequenz erhalten wir im Fall $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$

$$\log 1^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{\nu}(\pm 2\mu m \pm 2\nu n)\pi\sqrt{-1}$$

und $\log(-1)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{\nu}(\mu \pm 2\mu m \pm 2\nu n)\pi\sqrt{-1}.$

und unter Berücksichtigung dieser Umstände werden alle Schwierigkeiten, welche sich immer wieder bei diesem Gegenstand auftun können, gänzlich beseitigt, und die Lehre von Logarithmen wird fortan vor allen Angriffen geschützt sein.