Kapitel X Konstruktion gewisser Differentialgleichungen, die die Trennung der Unbestimmten nicht zulassen *

Leonhard Euler

Konstruktionen, die die Geometer, um gewissen Größen zu bestimmen, gebrauchen, sind von zwei Arten; zu der einen derer können alle geometrischen Konstruktionen, planeare sowie solide und lineare gezählt werden, auf dei andere hingegen bezihen sich die Konstruktionen, die entweder durch Quadraturen von Kurven oder Rektifikationen erledigt werden. Jene verwenden wir in der allgemeinen Geometrie, um Wurzeln irgendwelcher algebraischer Gleichungen auszudrücken, dass erreicht man, wie bekannt ist, durch Schnitte von entweder Geraden oder krummen Linien, je nachdem wie es die entsprechende Gleichung erfordert. Die Konstruktionen der zweiten Art, welche sich transzendent nennen lassen, dienen dazu, um Differentialgleichungen aufzulösen, die nicht in algebraische verwandelt werden können. Gleichungen aber, ob algebraische oder transzendente, in denen zwei unbestimmte Größen enthalten sind, erfordern Konstruktionen von dieser Art, dass, nachdem die eine Unbekannte nach Belieben angenommen wurde, die andere bestimmt wird; beim Erreichen ddavon wird für algebraische Gleichungen, als Resultat, vorraisgeschickt, dass nachdem eine Größe z gegeben wurde, irgendeine

*Originaltitel: "Constructio aequationum quarundam differentialium, quae indeterminatarum separationem non admittunt", erstmals publiziert im Jahre 1733, Nachdruck in „Opera Omnia: Series 1, Volume 22 pp 15-18“, Eneström-Nummer E11, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Florian Brähler, im Rahmen des Euler Seminars im Sommersemester 2015 algebraische Funktion Z von ihr beschafft werden kann. Für Differential- oder transzendente Gleichungen aber wird darüber hinaus verlangt, dass, nach Festsetzen einer Größe z irgendeine transzendente Funktion $\int dZdz$ von ihr, in welcher Z irgendeine Funktion von z, ob eine algebraische oder eine transzendente, bezeichnet, erneut bestimmt werden und daher als gegeben betrachtet werden kann. Deswegen also wird, sooft die vorgelegte Gleichung so verwandelt werden kann, dass die eine unbestimmte, oder eine gewisse Funktion von ihr, gleich einer gewissenFunktion der anderen Unbestimmten sein muss, genauso oft die Konstruktion jener Gleichung leicht sein. Diese Transformation von Gleichungen aber pflegt Trennung der Unbestimmten genannt zu werden; daraus sieht man zugleich ein, woher immer, um transzendente Gleichungen zu konstruieren, eine Trennung dieser Art dringend verlangt wird. Bei algebraischen Gleichungen ist die Trennung freilich nicht notwendig, um die Konstuktion anzugeben. Wie auch immer nämlich in diesen die Unbestimmten vermischt sind, die ganze Aufgabe wird in gleicher Weise leicht erledigt. Aber, was Differentailgleichungen angeht, wird nicht einmal eine einzige angegeben werden können, die konstuiert, aber dennoch nicht separiert werden kann. Die gebräuchlichen Konstruktionen sind nämlich alle so beschaffen, dass aus ihnen selbst die Trennnung der Unbestimmten, auch wenn die eine oder andere sehr schwer zu finden war, von selbst folgt. Deswegen glaube ich nicht wenig geleistet zu haben, nachdem ich nämlich auf Konstruktionen gewisser Differentialgleichungen, die nicht zuließen, dass die Unbestimmten voneinander getrennt werden, gestoßen war und zugleich erkannt hatte, dass diese Konstruktion nicht mehr erfordert haben als ich zuvor bemerkt hatte, dass es pflegt verlangt zu werden. Die erste Gleichung, die auftauchte, war dieser Form $dy + \frac{y^2dx}{x} = \frac{xdx}{x^2-1}$ in welcher ich nicht nur die Unbestimmten nicht voneinander trennen konnte, sondern die Konstruktion selbst wird auch zeigen, dass eine Separation dieser Art nicht stattfinden kann. Wenn diese nämlich gelänge, wird klar sein, dass der Vergleich der Perimeter von verschiedenen Ellipsen aus ihr folgen wird, die dennoch, nicht einmal nachdem die Quadratur des Kreises erlaubt wurde, beschafft werden kann. Diese Gleichung aber konstruiere ich auf die folgende Weise. Es seien über derselben verbundenen Achse unendlich viele Ellipsen, die sich also allein in der transversen Achse unterscheiden. Aus diesen errichte man eine neue Kurve, in welche, wenn den transversen Achsen der Ellipsen gleiche Abszissen genommen werden, die Ordinaten gleich den Peripheriien derselben Ellipsen seien. Danach nenne man jene verbundene Achse konstant 1, die Abszisse dieser neuen Kurve, oder die transverse Achse jeder Ellipse, setze man $= r$, die Ordinate oder Perimeter derselben Ellipse $= q$. Man nehme nun $x = \sqrt{r^2 - 1}$ und es wird $y = \frac{(r^2-1)dq}{qrdr}$ sein, welche Konstruktion, weil man q aus dem gegebenen durch Rektifikation der Kurve hat, völlig legitim ist. Auf die gleiche Weise bin ich bald auf die Konstruktion dieser berühmten Gleichung geführt worden,die der berühmte Riccardi hervorgebracht hat und allen Geometern zum als zu Untersuchende übergeben hat. Darauf waren freilich viele Gedanken sichtbar geworden, die aber alle nichts anderes enthielten, außer dass sie partikuläre Fälle, oder anstelle von n einzusetzende Werte beschafft haben, in denen diese Gleichung eine Seperation und auch eine Interpretation zulässt. Niemand aber, so viel ich weiß, hat nicht einmal einen einzigen Fall angegeben, in dem die Konstruktion erledigt werden kann, außer jenen beschafften. Um also eine allgemeine, was auch immer n bezeichnet, Konstruktion zu vermeiden, die, wenn nicht mit Hilfe meiner Methode, kaum von irgendwem gefunden werden können wird, löse ich auf die folgende Art diese Gleichung auf. Diese Differentialgröße $n(n+4)dz(1-z^2)^{\frac{-n-4}{2n+4}} + 2dz(1-z^2)^{\frac{-n-4}{2n+4}} \left(c^{\frac{2z\sqrt{f}}{n}+2} + c^{-\frac{2z\sqrt{f}}{n+2}} \right)$, in welcher z eine Variable ist, f konstant und c die Zahl, deren hyperbolischer Logarithmus 1 ist, werde so integriert, dass die ganze für $z = 0$ gesetzt verschwindet. Dieses Integral, auch wenn es in der Tat nicht beschafft werden kann, wird dennoch durch Quadraturen konstuiert werden und daher als bekannt betrachtet werden können. In diesem Integral setze man darauf $z = 1$ und man wird eine Größe haben, die eine gewisse Funktion von f sein wird. Man schreibe weiter in dieser Funktion ax^{n+2} anstelle von f und die resultierende Größe, welche ganz aus x und Konstanten zusammengesetzt sein wird, nenne man P. Nachdem nun auf diese Weise P gefunden wurde, sage ich, dass $y = \frac{dP}{Pdx}$ sein wird, welches der wahre Wert von y in der vorgelegten Gleichung $ax^n dx = dy + y^2 dx$ ist. Es ist aber zu bemerken, dass diese Lösung keine Geltung hat, sooft n eine Zahl die innerhalb der Grenzen 0 und -2 ist, war. Aber diesem Umstand wird leicht Abhilfe verschafft, so dass diese Konstruktion nicht desto weniger für allgemein zu halten ist. Weil nämlich, wie aus dem bekannt ist, was der gefeierte Daniel Bernoulli über diese Gleichung veröffentlich hat, diese Gleichung, wenn sie im Fall $n = m$ separabel ist, auch im Fall $n = \frac{-m}{m+1}$ oder $n = -m - 4$ getrennt werden kann, ist klar, dass alle innerhalb den Grenzen 0 und -2 enthalten Fälle auf andere reduziert werden können, die innerhalb der Grenzen -2 und -4 erfasst werden, und deswegen werden sie weiter ausgeschlossen. Ich bemerke aber, dass jene Differentialformel $n(n+4)dz(1-z^2)^{\frac{-n-4}{2n+4}} + 2dz(1-z^2)^{\frac{-n-4}{2n+4}}\left(c^{\frac{2z\sqrt{f}}{n}+2} + c^{-\frac{2z\sqrt{f}}{n+2}}\right)$ entweder $\frac{-n+4}{2n+4}$ entweder 0 oder eine ganze positive Zahl ist, genauso oft in der Tat integriert werden kann. Dies aber passiert, sooft $n = \frac{-4k}{2k-1}$ war, während k irgendeine ganze postive Zahl bezeichnet. Weil darauf die Gleichung, wenn der Exponent von x $\frac{-n}{n+1}$ ist, auf diese $ax^n dx = dy + y^2 dx$ reduziert werden kann, wird jene Formel auch integrierbar sein, wenn $\frac{-4k}{2k+1}$ war. Und so gehen jene Fälle hervor, die schon von anderen gefunden wurden, in denen die Unbestimmten in der vorgelegten Gleichung voneinander getrennt werden können.