ÜBER DIE INTEGRATION DER DIFFERENTIALGLEICHUNG

$$(A + A'x + A''y)(xdy - ydx) - (B + B'x + B''y)dy + (C + C'x + C''y)dx = 0^*$$

Carl Gustav Jacob Jacobi

Wenn auch die Schriften EULERS von zu voller Blüte gebrachten Funden überquellen, sind diejenigen für nicht geringer zu halten, welche er selbst unvollendet und für andere zu vervollkommen zurückgelassen hat. Sie geben uns gleichsam umfassendes Material an die Hand, an welchem wir unsere Kräfte erproben können. So habe ich mich neulich der Differentialgleichung

$$ydx(c + nx) - dy(y + a + bx + nxx) = 0$$

angenommen, welche jener in *Inst. Calc. Int. Vol. I. Sect. II. Cap. I., §. 433* behandelt hat. Ohne Zweifel wird ein erfahrener Analytiker die Integration dieser Gleichung ermitteln, wenn auch nicht ohne Mühe. EULER hat aber bewiesen, dass sie mit dieser Substitution

$$u = \frac{y(c + nx)}{y + a + bx + nxx}$$

separiert wird; sie wird nämlich:

*Originaltitel: "De Integratione Aequationis Differentialis $(A + A'x + A''y)(xdy - ydx) - (B + B'x + B''y)dy + (C + C'x + C''y)dx = 0$ ", zuerst publiziert in *Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 24* (1842): pp. 1-4. Nachdruck in: G.G.J. Jacobi's gesammelte Werke - Band 4, pp. 257 - 262, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

$$\frac{du}{u[na + cc - bc + (b - 2c)u + uu]} = \frac{dx}{(c + nx)(a + bx + nxx)}.$$

Man bedarf nur noch Quadraturen, welche mit entsprechenden Methoden auch schnell ausgeführt werden, und daraus wird eine endliche Gleichung zwischen x und u und daher auch eine zwischen x und y hervorgehen.

Weil die EULER'sche Differentialgleichung auch auf diese Weise dargestellt werden kann:

$$nx[xdy - ydx] + (y + a + bx)dy - cydx = 0,$$

habe ich mir die allgemeinere vorgelegt, in welcher die drei Ausdrücke $x dy - y dx$, dy , dx mit beliebigen linearen Funktionen von x und y multipliziert sind,

$$(A + A'x + A''y)(x dy - y dx) - (B + B'x + B''y)dy + (C + C'x + C''y)dx = 0.$$

Deren Integration, mit einer von der EULER'schen in ihrer ganzen Natur völlig verschiedenen Methode ermittelt, möchte ich im Folgenden sowohl wegen der bemerkenswerten Form der gefundenen endlichen Gleichung in x und y , welche insbesondere von der Lösung einer kubischen Gleichung abhängt, als auch wegen des Nutzens der Methode vorstellen, welche sich vielleicht bei anderen Begebenheiten gebrauchen lassen wird.

Wir wollen

$$p = \frac{\alpha' + \beta'x + \gamma'y}{\alpha + \beta x + \gamma y}, \quad q = \frac{\alpha'' + \beta''x + \gamma''y}{\alpha + \beta x + \gamma y}$$

setzen und der Kürze wegen sei

$$\begin{aligned} a &= \beta' \gamma'' - \beta'' \gamma', & a' &= \beta'' \gamma - \beta \gamma'', & a'' &= \beta \gamma' - \beta' \gamma, \\ b &= \gamma' \alpha'' - \gamma'' \alpha', & b' &= \gamma'' \alpha - \gamma \alpha'', & b'' &= \gamma \alpha' - \gamma' \alpha, \\ c &= \alpha' \beta'' - \alpha'' \beta', & c' &= \alpha'' \beta - \alpha \beta'', & c'' &= \alpha \beta' - \alpha' \beta. \end{aligned}$$

Nach Festlegen dessen findet man durch Differenzieren:

$$\begin{aligned} nndp &= + (c'' - a''y)dx - (b'' - a'x)dy, \\ nndq &= - (c' - a'y)dx + (b' - a'x)dy, \end{aligned}$$

wo

$$n = \alpha + \beta x + \gamma y$$

gesetzt worden ist. Wenn wir die vorherigen Gleichungen in dieser Form darbieten:

$$nndp = +a''(xdy - ydx) - b''dy + c''dx,$$

$$nndq = -a'(xdy - ydx) + b'dy + c'dx,$$

ist es ersichtlich, dass eine gewisse Differentialgleichung zwischen p und q

$$Pdp + Qdq = 0$$

in diese transformiert wird:

$$(a''P - a'Q)(xdy - ydx) - (b''P - b'Q)dy + (c''P - c'Q)dx = 0.$$

Wenn wir die vorherige Gleichung, multipliziert mit n , mit der vorgelegten Differentialgleichung vergleichen, finden wir unter Hinzunahme der Größe λ

$$n(a''P - a'Q) + \lambda = A + A'x + A''y,$$

$$n(b''P - b'Q) + \lambda x = B + B'x + B''y,$$

$$n(c''P - c'Q) + \lambda y = C + C'x + C''y.$$

Ich bemerke nun, dass nach Setzen von

$$\varepsilon = \alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') + \beta(\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha') + \gamma(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')$$

dann

$$\alpha a' + \beta b' + \gamma c' = 0,$$

$$\alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' = 0,$$

$$\alpha' a' + \beta' b' + \gamma' c' = \varepsilon,$$

$$\alpha' a'' + \beta' b'' + \gamma' c'' = 0,$$

$$\alpha'' a' + \beta'' b' + \gamma'' c' = 0,$$

$$\alpha'' a'' + \beta'' b'' + \gamma'' c'' = \varepsilon$$

wird. Daher findet man aus den vorhergehenden Gleichungen die drei folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \begin{cases} \lambda(\alpha + \beta x + \gamma y) \\ = A\alpha + B\beta + C\gamma + (A'\alpha + B'\beta + C'\gamma)x + (A''\alpha + B''\beta + C''\gamma)y, \end{cases} \\
 (2) \quad & \begin{cases} -\varepsilon n Q + \lambda(\alpha' + \beta'x + \gamma'y) \\ = A\alpha' + B\beta' + C\gamma' + (A'\alpha' + B'\beta' + C'\gamma')x + (A''\alpha' + B''\beta' + C''\gamma')y, \end{cases} \\
 (3) \quad & \begin{cases} \varepsilon n P + \lambda(\alpha'' + \beta''x + \gamma''y) \\ = A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'' + (A'\alpha'' + B'\beta'' + C'\gamma'')x + (A''\alpha'' + B''\beta'' + C''\gamma'')y, \end{cases}
 \end{aligned}$$

Damit diese Gleichungen bestehen, wollen wir

$$-\varepsilon Q = (\lambda' - \lambda) = p, \quad \varepsilon P = (\lambda'' - \lambda)q$$

setzen. Daher wird die Differentialgleichung zwischen p und q

$$(\lambda'' - \lambda)qdp - (\lambda' - \lambda)p dq = 0;$$

in den Gleichungen (1), (2), (3) werden aber die drei Ausdrücke auf der linken Seite respektive

$$\lambda(\alpha + \beta x + \gamma y), \quad \lambda'(\alpha' + \beta'x + \gamma'y), \quad \lambda''(\alpha'' + \beta''x + \gamma''y).$$

Daher, nachdem die einzelnen Terme miteinander verglichen worden sind, folgen aus den Gleichungen (1), (2), (3) diese drei Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \begin{cases} 0 = (A - \lambda)\alpha + B\beta + C\gamma, \\ 0 = A'\alpha + (B' - \lambda)\beta + C'\gamma, \\ 0 = A''\alpha + B''\beta + (C'' - \lambda)\gamma; \end{cases} \\
 (2) \quad & \begin{cases} 0 = (A - \lambda')\alpha' + B\beta' + C\gamma', \\ 0 = A'\alpha' + (B' - \lambda')\beta' + C'\gamma', \\ 0 = A''\alpha' + B''\beta' + (C'' - \lambda')\gamma'; \end{cases} \\
 (3) \quad & \begin{cases} 0 = (A - \lambda'')\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'', \\ 0 = A'\alpha'' + (B' - \lambda'')\beta'' + C'\gamma'', \\ 0 = A''\alpha'' + B''\beta'' + (C'' - \lambda'')\gamma''. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ist ersichtlich, dass $\lambda, \lambda', \lambda''$ die drei verschiedenen Wurzeln der kubischen Gleichung

$$(A - z)(B' - z)(C'' - z) - B''C'(A - z) - CA''(B' - z) - A'B'(C'' - z) + A'B''C + A''BC' = 0$$

werden. Nachdem mit der Auflösung dieser Gleichung die drei Größen $\lambda, \lambda', \lambda''$ bestimmt worden sind, geben je zwei der drei Gleichungen eines beliebigen Systems die Verhältnisse, welche zwischen den Größen α, β, γ , zwischen den Größen α', β', γ' und zwischen den Größen $\alpha'', \beta'', \gamma''$ bestehen müssen. Jedoch wird je eine der drei beliebig sein, weil nur deren Verhältnisse festgelegt werden; daher lassen sich eines Beispiels wegen $\alpha, \alpha', \alpha''$ nach Belieben annehmen. Nachdem die Konstanten α, β etc. auf besagte Weise bestimmt worden sind, wird die vorgelegte Differentialgleichung in diese umgewandelt:

$$(\lambda'' - \lambda)qdp - (\lambda' - \lambda)p dq = 0,$$

welche integriert

$$p^{\lambda'' - \lambda} \cdot q^{\lambda - \lambda'} = \text{Konstante}$$

oder auch

$$(\alpha + \beta x + \gamma y)^{\lambda' - \lambda''} (\alpha' + \beta' x + \gamma' y)^{\lambda'' - \lambda} (\alpha'' + \beta'' x + \gamma'' y)^{\lambda - \lambda'} = \text{Konstante}$$

gibt. Daraus findet man diese:

PROPOSITION

“Nach Vorlage der Differentialgleichung

$$(A + A'x + A''y)(xdy - ydx) - (B + B'x + B''y)dy + (C + C'x + C''y)dx = 0$$

löse man die kubische Gleichung

$$(A - z)(B' - z)(C'' - z) - B''C'(A - z) - CA''(B' - z) - A'B'(C'' - z)$$

$$+A'B''C + A''BC' = 0;$$

wenn deren drei verschiedene Wurzeln $\lambda, \lambda', \lambda''$ genannt werden und man der Kürze wegen

$$B'C'' - B''C' = D, \quad C'A'' - C''A' = D', \quad A'B'' - A''B' = D'', \\ B' + C'' = E$$

setzt, wird das vollständige Integral der vorgelegten Differentialgleichung

$$(D - E\lambda + \lambda\lambda + (D' + A'\lambda)x + (D'' + A''\lambda)y)^{\lambda''-\lambda'} \\ (D - E\lambda' + \lambda'\lambda' + (D' + A'\lambda')x + (D'' + A''\lambda')y)^{\lambda''-\lambda} \\ (D - E\lambda'' + \lambda''\lambda'' + (D' + A'\lambda'')x + (D'' + A''\lambda'')y)^{\lambda-\lambda'} \\ = \text{Konst.}$$

sein."

Königsberg, am Tage des 26. März, 1842