ÜBER DIE BEWEGUNG EINES EINZELNEN PUNKTES*

Carl Gustav Jacob Jacobi

Umso größere Schwierigkeiten im Allgemeinen die Integration von dynamischen Differentialgleichungen bereitet, mit umso größerer Sorgfalt müssen wir die Probleme in der Mechanik untersuchen, in welchen es gelingt, die Integration auf Quadraturen zu reduzieren. Es ist nämlich zu betrachten, ob auf demselben Weg auch in anderen umfassenderen Problemen die Differentialgleichungen entweder auf Quadraturen oder, wenn sich dies nicht leisten lässt, auf eine gewiss geringere Ordnung reduziert werden können. Ich glaube daher, dass es nicht unpassend sein wird, wenn ich an dieser Stelle mehrere Beispiele von solcher Art, die mit Quadraturen abgehandelt werden, vorstelle, die, wenn sie nicht neu sind, gewiss in mechanischen Abhandlungen entweder nicht ganz oder nicht im höchst möglichen Grad an Allgemeinheit dargeboten werden. All diese Beispiele betreffen nur den einfachsten Fall, denjenigen der Bewegung eines einzelnen Punktes.

§. 1

ÜBER EINE GEWISSE VERALLGEMEINERUNG DES PRINZIPS DER LEBENDIGEN KRÄFTE

Es seien x, y, z die orthogonalen Koordinaten eines Punktes, welcher auf einer Kurve oder gekrümmten Fläche bewegt werden muss; es seien X, Y, Z die den Koordinatenachsen parallelen den Punkt angreifenden Kräfte, s sei der

*Originaltitel: "De Motu Puncti singularis", zuerst publiziert in *Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 24 (1842): pp. 5–27. Nachdruck in: G.G.J. Jacobi's gesammelte Werke – Band 4, pp. 263 – 288, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

Bogen der Kurve, auf welcher der Punkt bewegt wird, v die Geschwindigkeit des Punktes und seine Masse = 1. Sofern $Xdx + Ydy + Zdz$ ein vollständiges Differential ist, ist bekannt, dass man das Integral

$$(1) \quad \frac{1}{2}vv = \int [Xdx + Ydy + Zdz] + \text{Konst.}$$

hat. Dies wird als das Prinzip *der Erhaltung* der lebendigen Kräfte bezeichnet, weil nach Vorgabe von Lage und Geschwindigkeit des Punktes selbiger zu einer beliebigen anderen bestimmten Lage mit derselben Geschwindigkeit gelangen wird, *wie auch immer* die Kurve oder Fläche aussehen mag, auf welcher er beim Übergang von der einen zur anderen Lage bewegt werden muss. Es bleibt nämlich in Gleichung (1) keine Spur der Linie oder Oberfläche zurück. Die Erhaltung leistet in der Theorie der Maschinen große Dienste, aber beim Integrieren von dynamischen Differentialgleichungen pflegen wir jenes Prinzip deswegen so hoch zu schätzen, weil es uns ein Integral liefert. Sofern man nämlich allein das gefundene Integral sucht, ist es nicht vonnöten, dass der Ausdruck $Xdx + Ydy + Zdz$ *per se* ein vollständiges Differential ist, sondern dieselbe Gleichung (1) gilt, wenn jener Ausdruck ein vollständiges Differential wird, nachdem die Gleichungen, welche zwischen den Koordinaten x, y, z gelten, herangezogen worden sind. Wenn also der Punkt auf einer gegebenen Kurve bewegt wird und demnach seine drei Koordinaten durch eine Größe ausgedrückt werden können, wird der Ausdruck $Xdx + Ydy + Zdz$ *immer* ein vollständiges Differential sein, solange nur X, Y, Z Funktionen allein von x, y, z sind. Wenn wir die drei Koordinaten mit einer bestimmten Größe q ausdrücken, wird

$$\begin{aligned} Xdx + Ydy + Zdz &= Qdq, \\ ds = vdt &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = Vdq, \end{aligned}$$

während Q und V Funktionen allein von q sind. Daher findet man aus (1) die Beziehung zwischen der Lage des Punktes auf der gegebenen Kurve und der Zeit mit der Formel

$$(2) \quad t + \beta = \int \frac{Vdq}{\sqrt{2 \int Qdq + \alpha}},$$

während α und β beliebige Konstanten bezeichnen. So entspringt die folgende elementare Proposition, welche in den mechanischen Traktaten zu fehlen scheint.

PROPOSITION I

“Ein Punkt, welcher auf einer gegebenen Kurve bewegt werden muss, werde von Kräften angegriffen, welche beliebige Funktionen einzig der Koordinaten des Punktes sind, dann wird die Bewegung des Punktes allein mit Quadraturen bestimmt.”

Ich bemerke, wenn τ die Tangentialkraft bezeichnet, von welcher der Punkt angegriffen wird, dass

$$Qdq = Xdx + Ydy + Zdz = \tau ds$$

wird. Weil sich aber alle Normalkräfte der Kurve aufheben, lässt sich annehmen, dass allein τ wirkt; daher wird nach Definitionen aus der Mechanik τdt das Inkrement der Geschwindigkeit v im Zeitintervall dt oder eben $\tau du = dv$ sein. Daher, weil $vdt = ds$ ist, folgt $\tau ds = vdv$ und daraus

$$\frac{1}{2}vv = \int \tau ds = \int Qdq.$$

Dies ist ein geometrischer Nachweis von Formel (1). Nachdem v gefunden worden ist, ermittelt man den Wert der Zeit mithilfe der Formel $t = \int \frac{ds}{v}$.

Im allgemeineren Fall, welchen wir zuvor behandelt haben, ist die Geschwindigkeit oder die lebendige Kraft im Allgemeinen nicht erhalten, das heißt, sie wird eine andere für eine Kurve, auf welcher der Übergang des Punktes von der Anfangs- zur Endposition geschehen muss. Aber zum Erfolg der Integration trägt diese Erhaltung nicht bei. Um mit Formel (1) die Geschwindigkeit bestimmen zu können, ist die Lage des Punktes auf der gegebenen Kurve nicht notwendig, weil jene Erhaltung verlangt, dass die angreifenden Kräfte zu festen Punkten hin wirken oder eine parallele Ausrichtung und konstante Intensität haben.

Wir wollen nun festlegen, dass nicht der Weg des Punktes selbst gegeben ist, sondern nur die Fläche, auf welcher er gezwungen ist bewegt zu werden. Es sei $f(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Oberfläche; dem Ausdruck $Xdx + Ydy + Zdz$ lässt sich der verschwindende Ausdruck $\mu \left[\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right]$ hinzuaddieren, während μ einen beliebigen Faktor bezeichnet. Damit aber der Ausdruck

$$\left(X + \mu \frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(Y + \mu \frac{\partial f}{\partial y}\right) dy + \left(Z + \mu \frac{\partial f}{\partial z}\right) dz$$

ein vollständiges Differential wird, hat man diese drei notwendigen Bedingungen:

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \mu}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch Multiplizieren mit $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ und Addieren:

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \right) + \frac{\partial f}{\partial z} \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) = 0.$$

Daraus fließt diese Proposition:

PROPOSITION II

“Ein Punkt, welcher auf einer Oberfläche bewegt werden muss, deren Gleichung $f(x, y, z) = 0$ ist, werde entlang der Richtungen der Koordinatenachsen von den Kräften X, Y, Z angegriffen, welche Funktionen einzig der Koordinaten des Punktes seien; sofern die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \right) + \frac{\partial f}{\partial z} \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) = 0$$

Geltung hat, wird man das Integral

$$\frac{1}{2}vv = \int (Xdx + Ydy + Zdz) + \text{Konst.}$$

erhalten, wo der Ausdruck hinter dem Integralzeichen $\int$ allein vermöge der Gleichung der Fläche integrierbar wird.”

Dass die Bedingungsgleichung (3) nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist, damit $Xdx + Ydy + Zdz$ vermöge der Gleichung der Fläche ein vollständiges Differential wird, kann auf diese Weise bewiesen werden.

Wir wollen eine Form der dynamischen Gleichungen verwenden, welche derjenigen ähnlich ist, welche der illustre Herr HAMILTON vorgelegt hat. Zu diesem Ziel sei die Lage des Punktes auf der gegebenen Oberfläche von den zwei Größen q_1 und q_2 bestimmt und, nachdem x, y, z durch q_1, q_2 ausgedrückt worden sind, sei

$$Xdx + Ydy + Zdz = Q_1dq_1 + Q_2dq_2.$$

Nachdem anschließend $\frac{1}{2}vv = T$ mit den Größen q_1 und q_2 und deren Differentialquotienten q'_1 und q'_2 ausgedrückt worden ist, werde

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q'_1}, \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial q'_2}.$$

Schließlich werden, nachdem T mit den vier Größen q_1, q_2, p_1, p_2 ausgedrückt worden ist und die partiellen Ableitungen von T nach diesen Größen gebildet worden sind, die Differentialgleichungen, von welchen die Bewegung des Punktes bestimmt wird, diese sein:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_1}, & \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_1} + Q_1, \\ \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_2}, & \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_2} + Q_2. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (4) folgt

$$\frac{1}{2}d.vv = dT = \frac{\partial T}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial T}{\partial p_1}dp_1 + \frac{\partial T}{\partial p_2}dp_2 = Q_1dq_1 + Q_2dq_2.$$

Damit die rechte Seite dieser Gleichung integrierbar ist, ist notwendig und hinreichend, dass

$$\frac{\partial Q_1}{\partial q_2} = \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}$$

wird. Weil

$$Q_1 = X \frac{\partial x}{\partial q_1} + Y \frac{\partial y}{\partial q_1} + Z \frac{\partial z}{\partial q_1}, \quad Q_2 = X \frac{\partial x}{\partial q_2} + Y \frac{\partial y}{\partial q_2} + Z \frac{\partial z}{\partial q_2}$$

ist, wird die vorherige Bedingungsgleichung nach leichten Reduktionen in diese verwandelt:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \left(\frac{\partial y}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_2} - \frac{\partial z}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_2} \right) \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right) \\ + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_2} - \frac{\partial x}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_2} \right) \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \right) \\ + \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_2} - \frac{\partial y}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_2} \right) \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right). \end{array} \right.$$

Durch Differenzieren der Gleichung $f = 0$ wird

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_1},$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_2};$$

daher wird

$$\left(\frac{\partial y}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_2} - \frac{\partial z}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_2} \right) : \left(\frac{\partial z}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_2} - \frac{\partial x}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_2} \right) : \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_2} - \frac{\partial y}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_2} \right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Nach Einsetzen von diesen in (5) geht die oben vorgelegte Bedingungsgleichung (3) hervor. Wenn diese Geltung hat, wird demnach $\frac{\partial Q_1}{\partial q_2} = \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}$ und daher wird $Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2$ integrierbar, weshalb aus der oben angegebenen Gleichung

$$\frac{1}{2} d.vv = Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2$$

durch Integration eine Gleichung erhalten wird, mit welcher die Geschwindigkeit des Punktes mit den Größen q_1 und q_2 ausgedrückt wird:

$$(6) \quad T = \frac{1}{2}vv = \int (Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2) + \text{Konst.}$$

Dies stimmt mit der vorherigen Proposition überein.

Damit das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kräfte auch ohne Hinzuziehen der Gleichung für die Fläche Geltung hat, muss $Xdx + Ydy + Zdz$ integrierbar sein, was diese *drei* Gleichungen verlangt:

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0.$$

Aber wir sehen, dass, um das Integral (6) zu finden, die *eine* Gleichung (3) hinreicht.

§. 2

NEUE FORMELN FÜR DIE BEWEGUNG EINES PUNKTES AUF EINER GEGEBENEN OBERFLÄCHE

Die den HAMILTON'schen ähnlichen dynamischen Differentialformeln, welche ich in den vorherigen Abschnitten angegeben habe, können wie folgt bewiesen werden. Indem man mithilfe der Gleichung für die Fläche die Koordinaten x, y, z mit den zwei Variablen q_1 und q_2 ausdrückt, wird

$$(1) \quad \begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} q'_2, \\ y' = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} q'_2, \\ z' = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} q'_2. \end{cases}$$

Nachdem mithilfe dieser Formeln x', y', z' und $T = \frac{1}{2}(x'x' + y'y' + z'z')$ mit q_1, q_2, q'_1, q'_2 ausgedrückt worden sind, werde ich die partiellen Ableitungen jener Größen, also nach q_1, q_2, q'_1, q'_2 , in Klammern schreiben, sodass

$$(2) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial x'}{\partial q'_1}\right) = \frac{\partial x}{\partial q_1}, & \left(\frac{\partial x'}{\partial q'_2}\right) = \frac{\partial x}{\partial q_2}, \\ \left(\frac{\partial y'}{\partial q'_1}\right) = \frac{\partial y}{\partial q_1}, & \left(\frac{\partial y'}{\partial q'_2}\right) = \frac{\partial y}{\partial q_2}, \\ \left(\frac{\partial z'}{\partial q'_1}\right) = \frac{\partial z}{\partial q_1}, & \left(\frac{\partial z'}{\partial q'_2}\right) = \frac{\partial z}{\partial q_2} \end{cases}$$

wird. Daher

$$(3) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right) = p_1 = x' \frac{\partial x}{\partial q_1} + y' \frac{\partial y}{\partial q_1} + z' \frac{\partial z}{\partial q_1}, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial q'_2}\right) = p_2 = x' \frac{\partial x}{\partial q_2} + y' \frac{\partial y}{\partial q_2} + z' \frac{\partial z}{\partial q_2}. \end{cases}$$

Weiter wird aus (1)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x'}{\partial q_1}\right) &= \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_1} q'_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2} q'_2 = \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_1}, \\ \left(\frac{\partial x'}{\partial q_2}\right) &= \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2} q'_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_2 \partial q_2} q'_2 = \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_2}, \end{aligned}$$

weshalb, während ähnliche Formeln für y und z gelten,

$$(4) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right) = x' \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_1} + y' \frac{d}{dt} \frac{\partial y}{\partial q_1} + z' \frac{d}{dt} \frac{\partial z}{\partial q_1}, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial q_2}\right) = x' \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_2} + y' \frac{d}{dt} \frac{\partial y}{\partial q_2} + z' \frac{d}{dt} \frac{\partial z}{\partial q_2} \end{cases}$$

sein wird, oder aus (3):

$$(5) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial T}{\partial q_1} \right) = \frac{dp_1}{dt} - \frac{\partial x}{\partial q_1} \cdot \frac{dx'}{dt} - \frac{\partial y}{\partial q_1} \cdot \frac{dy'}{dt} - \frac{\partial z}{\partial q_1} \cdot \frac{dz'}{dt}, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial q_2} \right) = \frac{dp_2}{dt} - \frac{\partial x}{\partial q_2} \cdot \frac{dx'}{dt} - \frac{\partial y}{\partial q_2} \cdot \frac{dy'}{dt} - \frac{\partial z}{\partial q_2} \cdot \frac{dz'}{dt}. \end{cases}$$

T wird eine homogene Funktion zweiter Ordnung von q'_1 und q'_2 , woher gemäß einer bekannten Proposition

$$q'_1 \left(\frac{\partial T}{\partial q'_1} \right) + q'_2 \left(\frac{\partial T}{\partial q'_2} \right) = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 = 2T$$

und daher $T = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 - T$ ist. Nach Variieren dieser Formel und Verwerfen der sich gegenseitig aufhebenden Terme erhält man

$$dT = q'_1 dp_1 + q'_2 dp_2 - \left(\frac{\partial T}{\partial q_1} \right) dq_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial q_2} \right) dq_2.$$

Nachdem also T mit den vier Größen q_1, q_2, p_1, p_2 ausgedrückt worden ist, wird, wenn wir in den partiellen Ableitungen nach q_1, q_2, p_1, p_2 die Klammern weglassen

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial p_1} = q'_1 = \frac{dq_1}{dt}, & \frac{\partial T}{\partial p_2} = q'_2 = \frac{dq_2}{dt}, \\ \frac{\partial T}{\partial q_1} = - \left(\frac{\partial T}{\partial q_1} \right), & \frac{\partial T}{\partial q_2} = - \left(\frac{\partial T}{\partial q_2} \right). \end{cases}$$

Aus diesen Formeln folgt unter Hinzunahme von (5):

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_1}, & \frac{dp_1}{dt} = - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial x}{\partial q_1} \cdot \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \cdot \frac{dy'}{dt} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \cdot \frac{dz'}{dt}, \\ \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_2}, & \frac{dp_2}{dt} = - \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{\partial x}{\partial q_2} \cdot \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial y}{\partial q_2} \cdot \frac{dy'}{dt} + \frac{\partial z}{\partial q_2} \cdot \frac{dz'}{dt}. \end{cases}$$

Die Differentialgleichungen, welche für die Bewegung eines Punktes auf einer gegebenen Oberfläche, deren Gleichung $f = 0$ ist, angegeben werden, sind die folgenden:

$$(8) \quad \frac{dx'}{dt} = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{dy'}{dt} = Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{dz'}{dt} = Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z},$$

während X, Y, Z den Punkt angreifende und den Koordinatenachsen x, y, z parallele Kräfte sind. Durch Einsetzen der in q_1 und q_2 dargebotenen Ausdrücke von x, y, z , wird, weil f identisch verschwinden muss, durch Differenzieren nach q_1 und q_2

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_1} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_2} &= 0, \end{aligned}$$

sein, woher, wenn man der Kürze wegen

$$\begin{aligned} X \frac{\partial x}{\partial q_1} + Y \frac{\partial y}{\partial q_1} + Z \frac{\partial z}{\partial q_1} &= Q_1, \\ X \frac{\partial x}{\partial q_2} + Y \frac{\partial y}{\partial q_2} + Z \frac{\partial z}{\partial q_2} &= Q_2 \end{aligned}$$

setzt, aus den Gleichungen (8) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial q_1} \cdot \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \cdot \frac{dy'}{dt} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \cdot \frac{dz'}{dt} &= Q_1, \\ \frac{\partial x}{\partial q_2} \cdot \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial y}{\partial q_2} \cdot \frac{dy'}{dt} + \frac{\partial z}{\partial q_2} \cdot \frac{dz'}{dt} &= Q_2. \end{aligned}$$

Nach Einsetzen dieser Formeln in den Gleichungen (7) geht

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial p_1}, & \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial T}{\partial q_1} + Q_1, \\ \frac{dq_2}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial p_2}, & \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial T}{\partial q_2} + Q_2 \end{aligned}$$

hervor. Dies sind die oben angegebenen neuen Formeln.

§. 3

BESTIMMUNG DER BEWEGUNG EINES ORBITS EINES PUNKTES AUF
EINER GEGEBENEN OBERFLÄCHE, WENN SIE AUF EINE
DIFFERENTIALGLEICHUNG ERSTER ORDNUNG IN ZWEI VARIABLEN
ZURÜCKGEFÜHRT WORDEN IST, WIRD IHRE INTEGRATION ALLEIN MIT
QUADRATUREN ERLEDIGT

Die Bewegung eines Punktes auf einer gegebenen Oberfläche, wenn freilich die Ausdrücke für die angreifenden Kräfte nicht die Zeit selbst explizit involvieren, hängen nach dem zuvor Erläuterten von der Integration von drei Differentialgleichungen erster Ordnung in den vier Variablen q_1, q_2, p_1, p_2 ab:

$$(1) \quad dq_1 : dq_2 : dp_1 : dp_2 = \frac{\partial T}{\partial p_1} : \frac{\partial T}{\partial p_2} : \left[-\frac{\partial T}{\partial q_1} + Q_1 \right] : \left[-\frac{\partial T}{\partial q_2} + Q_2 \right].$$

Nach Ausführung dieser Integration wird eine einzige Quadratur die Beziehung zwischen der Lage des Punktes und der Zeit geben. Denn nach jener Integration können q_2, p_1, p_2 und daher auch die Größe $\frac{\partial T}{\partial p_1}$ durch q_1 ausgedrückt werden; nach Einsetzen dieses Ausdrucks wird

$$t = \int \frac{dq_1}{\frac{\partial T}{\partial p_1}}.$$

Aber sofern die den Punkt entlang der Richtungen der Koordinatenachsen angreifenden Kräfte X, Y, Z Funktionen nur der Koordinaten sind, in welchem Fall auch Q_1 und Q_2 Funktionen allein von q_1 und q_2 sein werden, findet man nicht nur den Ausdruck für die Zeit über eine Quadratur allein, sondern von den zwei Integralen der Gleichungen (1) wird das letzte gemäß einer allgemeinen Regel allein durch Quadraturen bekannt sein. Denn ich habe in einer anderen Abhandlung die folgende allgemeine Proposition bewiesen, welche als neues Prinzip in der Mechanik angesehen werden kann:

“Es sei die Bewegung eines beliebigen Bedingungen unterworfenen Systems von Massenpunkten vorgelegt, und die Kräfte, welche die Punkte gemäß der Richtungen der Koordinatenachsen angreifen, seien Funktionen der Koordinaten allein: Wenn die Bestimmung der Bahnen der Massenpunkte auf die Integration einer einzigen Differentialgleichung in zwei Variablen zurückgeführt worden ist, kann nach einer allgemeinen Regel ein Multiplikator

gefunden werden, welcher sie allein mit Quadraturen integrierbar macht."

An dieser Stelle werde ich die allgemeine Proposition auf die Bewegung eines einzelnen Punktes auf einer Oberfläche anwenden und werde die Regel, den Multiplikator zu finden, für jenen einfachen Fall gesondert nachweisen.

PROPOSITION

"Nach Vorlage von drei Differentialgleichungen erster Ordnung in den vier Größen q_1, q_2, p_1, p_2 :

$$dq_1 : dq_2 : dp_1 : dp_2 = \frac{\partial T}{\partial p_1} : \frac{\partial T}{\partial p_2} : \left[-\frac{\partial T}{\partial q_1} + Q_1 \right] : \left[-\frac{\partial T}{\partial q_2} + Q_2 \right],$$

in welchen Q_1 und Q_2 Funktionen allein von q_1 und q_2 seien, seien zwei Integrale, welche mit den beliebigen Konstanten α und β behaftet sind, gefunden worden und mit deren Hilfe biete man $p_1, p_2, \frac{\partial T}{\partial p_1}, \frac{\partial T}{\partial p_2}$ vermöge der Größen q_1, q_2 und der beliebigen Konstanten α und β dar; danach bleibt durch Integration eine Differentialgleichung erster Ordnung in den zwei Größen q_1 und q_2 zurück:

$$\frac{\partial T}{\partial p_2} dq_1 - \frac{\partial T}{\partial p_1} dq_2 = 0,$$

von welcher die Bahn des Punktes auf der Oberfläche bestimmt wird; die linke Seite dieser Gleichung behaupte ich mit dem Faktor

$$\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial \beta} - \frac{\partial p_1}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial \alpha}$$

multipliziert ein vollständiges Differential oder allein mit Quadraturen integrierbar zu werden."

BEWEIS

Die partiellen Ableitungen der Funktionen, welche auf zweifache Weise, sowohl durch q_1, q_2, α, β und durch q_1, q_2, p_1, p_2 , dargeboten werden, werde ich nach den ersten Variablen genommen ohne Klammern, nach den anderen Variablen genommen mit Klammern anzeigen. Wenn nach Festlegen dessen der Kürze wegen der n Faktor

$$\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial \beta} - \frac{\partial p_2}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial \beta} = n$$

genannt wird, ist das Vorgelegte bewiesen, sobald die Gleichung

$$\left(\frac{\partial \cdot n \frac{\partial T}{\partial p_1}}{\partial q_1} \right) + \left(\frac{\partial \cdot n \frac{\partial T}{\partial p_2}}{\partial q_2} \right) = 0$$

bewiesen sein wird. Es wird

$$dp_1 = \frac{\partial p_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial p_1}{\partial q_2} dq_2, \quad dp_2 = \frac{\partial p_2}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial q_2} dq_2.$$

Daher wird, indem man die Ausdrücke von p_1 und p_2 vermöge q_1, q_2 und den beliebigen Konstanten α und β dargeboten in den vorgelegten Differentialgleichungen einsetzt:

$$(2) \quad \begin{cases} -\frac{\partial T}{\partial q_1} + Q_1 = \frac{\partial p_1}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial T}{\partial p_1} + \frac{\partial p_1}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial T}{\partial p_2}, \\ -\frac{\partial T}{\partial q_2} + Q_2 = \frac{\partial p_2}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial T}{\partial p_1} + \frac{\partial p_2}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial T}{\partial p_2}. \end{cases}$$

Es wird aber nach der üblichen Notationsweise sein:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial q_1} \right) &= \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial T}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial q_1} + \frac{\partial T}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial q_1}, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial q_2} \right) &= \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{\partial T}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial q_2} + \frac{\partial T}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial q_2}, \end{aligned}$$

Daher findet man aus (2):

$$(3) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial T}{\partial q_1} \right) = Q_1 - \left[\frac{\partial p_1}{\partial q_2} - \frac{\partial p_2}{\partial q_1} \right] \frac{\partial T}{\partial p_2}, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial q_2} \right) = Q_2 + \left[\frac{\partial p_1}{\partial q_2} - \frac{\partial p_2}{\partial q_1} \right] \frac{\partial T}{\partial p_1}, \end{cases}$$

Weiter wird

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial T}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial T}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial \alpha},$$

also

$$\frac{\partial p_2}{\partial q_1} \left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right) - \frac{\partial p_2}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial T}{\partial p_1} + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial T}{\partial p_2} - \frac{\partial p_2}{\partial \alpha} Q_1.$$

Mit der vollkommen selben Methode oder auch allein durch Vertauschung der Indizes 1 und 2 erhält man:

$$\frac{\partial p_1}{\partial q_2} \left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right) - \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial T}{\partial q_2}\right) = \frac{\partial p_2}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial T}{\partial p_2} + \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial T}{\partial p_1} - \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} Q_2.$$

Durch Abziehen der einen Formel von der anderen erlangen wir

$$\frac{\partial p_2}{\partial q_1} \left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right) - \frac{\partial p_2}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right) - \frac{\partial p_1}{\partial q_2} \left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial T}{\partial q_2}\right) = \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} Q_2 - \frac{\partial p_2}{\partial \alpha} Q_1.$$

Mit derselben Methode findet man

$$\frac{\partial p_2}{\partial q_1} \left(\frac{\partial T}{\partial \beta}\right) - \frac{\partial p_2}{\partial \beta} \left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right) - \frac{\partial p_1}{\partial q_2} \left(\frac{\partial T}{\partial \beta}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial \beta} \left(\frac{\partial T}{\partial q_2}\right) = \frac{\partial p_1}{\partial \beta} Q_2 - \frac{\partial p_2}{\partial \beta} Q_1.$$

Wir nehmen an, dass die angreifenden Kräfte X, Y, Z Funktionen einzig von x, y, z sind, woher die Größen Q_1 und Q_2 allein von q_1 und q_2 beeinflusst werden und daher sowohl von p_1 und p_2 als auch von den beliebigen Konstanten α und β frei sind. Indem man die erste der zwei vorherigen Differentialgleichungen nach β , die zweite nach α differenziert und dann subtrahiert, verschwindet demnach die rechte mit Q_1 und Q_2 multiplizierte Seite völlig. Aber die linke Seite wird nach Verwerfen der sich aufhebenden Terme:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 p_2}{\partial \beta \partial q_1} \left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right) - \frac{\partial p_2}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \beta \partial q_1}\right) - \frac{\partial^2 p_1}{\partial \beta \partial q_2} \left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \beta \partial q_2}\right) \\ & - \frac{\partial^2 p_2}{\partial \alpha \partial q_1} \left(\frac{\partial T}{\partial \beta}\right) + \frac{\partial p_2}{\partial \beta} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \alpha \partial q_1}\right) + \frac{\partial^2 p_1}{\partial \alpha \partial q_2} \left(\frac{\partial T}{\partial \beta}\right) - \frac{\partial p_1}{\partial \beta} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \alpha \partial q_2}\right) \\ & = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich wie folgt darstellen:

$$(4) \quad \left(\frac{\partial \left[\frac{\partial p_2}{\partial \beta} \left(\frac{\partial T}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial p_2}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial T}{\partial \beta} \right) \right]}{\partial q_1} \right) - \left(\frac{\partial \left[\frac{\partial p_1}{\partial \beta} \left(\frac{\partial T}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial T}{\partial \beta} \right) \right]}{\partial q_2} \right) = 0.$$

Aber aus den Gleichungen

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial T}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial T}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial \alpha}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \beta} \right) = \frac{\partial T}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial \beta} + \frac{\partial T}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial \beta},$$

folgt durch Einsetzen des oben für n festgelegten Wertes:

$$\frac{\partial p_2}{\partial \beta} \left(\frac{\partial T}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial p_2}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial T}{\partial \beta} \right) = n \frac{\partial T}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial \beta} \left(\frac{\partial T}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial T}{\partial \beta} \right) = -n \frac{\partial T}{\partial p_1}.$$

Nach Einsetzen von diesen nimmt Gleichung (2) diese Form an:

$$\left(\frac{\partial \cdot n \frac{\partial T}{\partial p_1}}{\partial q_1} \right) + \left(\frac{\partial \cdot n \frac{\partial T}{\partial p_2}}{\partial q_2} \right) = 0,$$

welche Formel zu beweisen war.

Im Vorausgehenden ist streng bewiesen worden, dass die vorgestellte Proposition freilich richtig ist, aber es eröffnet sich keine echte Quelle, aus welcher die Proposition selbst geschöpft worden ist. Selbige fließt natürlich aus der neuen Theorie von Multiplikatoren angewandt auf ein System von simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen, welche ich in einer anderen Abhandlung erkläre.

§. 4

DIE BEWEGUNG EINES PUNKTES AUF EINER ROTATIONSKURVE UNTER GÜLTIGKEIT DES PRINZIPS DER FLÄCHENERHALTUNG WIRD AUF EINE ANDERE ZURÜCKGEFÜHRT, WELCHE ÜBER DER MERIDIANEN KURVE STATTFINDEN MUSS, UND DARAUS WIRD SIE ALLEIN MIT QUADRATUREN BESTIMMT

Wir haben gesehen, dass die Bewegung eines Punktes auf einer gegebenen Oberfläche, wenn zwei Integrale der dynamischen Differentialgleichungen

bekannt sind, allein mit Quadraturen bestimmt wird. Sofern aber das mechanische Prinzip gilt, welches als Prinzip der Flächenerhaltung bezeichnet wird, trägt es sich zu, dass nun durch ein einziges von diesem Prinzip an die Hand gegebenes Integral das Problem allein auf Quadraturen zurückgeführt wird. Es geschieht nämlich, dass die vorgelegte Bewegung auf eine andere auf einer meridianen Kurve zurückgeführt werden kann; weil daher die Bewegung auf der gegebenen Kurve mit Quadraturen durchgeführt wird, so wie wir in §. 1 gesehen haben, wird auch die vorgelegte Bewegung mit Quadraturen bestimmt werden können. Damit aber das Prinzip der Flächenerhaltung gilt, muss die Fläche, auf welcher der Punkt bewegt wird, eine durch Rotation erzeugte sein, weiter muss die angreifende Kraft in der meridianen Ebene ausgerichtet sein und allein von der Lage des Punktes auf dem Meridian abhängen und nicht vom Winkel, welche die meridiane Ebene mit der durch die Achse definierten festen Ebene bildet. Dass aber die angreifende Kraft weder von der Zeit noch von der Geschwindigkeit abhängt, nehme ich in dieser Abhandlung, wenn nichts Gegenteiliges gesagt wird, stillschweigend an. Wenn also x eine Gerade ist, welche der Achse parallel vom bewegten Punkt aus senkrecht zur fixen Ebene hin gezogen wird, y hingegen eine Gerade, welche vom bewegten Punkt aus senkrecht zur Achse gezeichnet wird, wird sich die angreifende Kraft in zwei andere, welche zu x und y parallel sind, zerlegen lassen, deren Intensitäten zugleich Funktionen einzig von x und y sein müssen. Nun werde ich die Rechnung vorführen.

Es seien x, v, ζ die orthogonalen Koordinaten des Punktes und es sei x die Koordinatenachse, um welche herum die Rotation der Kurve geschehe. Man teile die angreifende Kraft in zwei andere auf, die eine X parallel zur Achse, die andere Y normal zur Achse; weiter sei $\sqrt{vv + \zeta\zeta} = y$ und

$$(1) \quad f(x, y) = f(x, \sqrt{vv + \zeta\zeta}) = 0$$

die Gleichung für den Meridian. Weil wir die angreifende Kraft annehmen in der meridianen Ebene selbst ausgerichtet zu sein, kann Y in zwei Kräfte $\frac{Yv}{y}$, $\frac{Y\zeta}{y}$ zerlegt werden, welche zu v und ζ parallel sind. Nach Festlegen dessen hat man gemäß bekannter Vorschriften, einen Multiplikator λ einzuführen, die folgenden dynamischen Differentialgleichungen, welche zu integrieren sind:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \\ \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{Yv}{y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial v} = \left(Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{v}{y}, \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{Y\zeta}{y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \zeta} = \left(Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\zeta}{y}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (2) folgt $v \frac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta \frac{d^2v}{dt^2} = 0$, woher durch Integrieren

$$(3) \quad v \frac{d\zeta}{dt} - \zeta \frac{dv}{dt} = \alpha$$

wird, während α eine beliebige Konstante bezeichnet. Das ist das vom Prinzip der Flächenerhaltung an die Hand gegebene Integral, angewandt auf die Ebene der Koordinaten v und ζ .

Wir wollen nun die identische Gleichung

$$\frac{d^2 \sqrt{vv + \zeta\zeta}}{dt^2} = \frac{v \frac{d^2v}{dt^2} + \zeta \frac{d^2\zeta}{dt^2}}{\sqrt{vv + \zeta\zeta}} + \frac{\left(v \frac{d\zeta}{dt} - \zeta \frac{dv}{dt} \right)^2}{\sqrt{(vv + \zeta\zeta)^3}}$$

heranziehen. Aus dieser Gleichung findet man, indem man (2) und (3) einsetzt,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\alpha\alpha}{y^3}.$$

Weil wir annehmen, dass die angreifende Kraft von der Lage des Punktes in der meridianen Ebene allein und nicht vom Winkel abhängt, welchen die Ebene des Meridians mit der durch die Achse der Oberfläche definierten Ebene bildet, werden X und Y Funktionen lediglich von x und y sein. Daher gehen die Gleichungen (2) auf diese in den den Größen x und y zurück, zwischen welchen überdies die Gleichung $f(x, y) = 0$ Geltung hat:

$$(4) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y + \frac{\alpha\alpha}{y^3} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Aber diese Gleichungen selbst sind die dynamischen Differentialgleichungen für die Bewegung eines Punktes auf einer Kurve, deren Gleichung $f(x, y) = 0$

ist, wenn freilich die angreifenden Kräfte, die zu den Koordinaten x und y parallel sind, X und $Y + \frac{\alpha\alpha}{y^3}$ sind. Daher hat man diese Proposition:

PROPOSITION I

“Ein Punkt, welcher auf einer gegebenen Rotationsfläche bewegt werden muss, werde von einer auf die Ebene des Meridians gerichteten und einzig von der Lage des Punktes auf diesem Meridian abhängenden Kraft angegriffen: Dann kann die vorgelegte Bewegung auf die Bewegung eines Punktes auf der meridianen Kurve zurückgeführt werden, während zur angreifenden Kraft eine andere hinzutritt, welche senkrecht zur Achse und dem Kubus des Abstands des Punktes von der Achse umgekehrt proportional ist.”

Aus (4) folgt

$$\frac{dx}{dt}d \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}d \cdot \frac{dy}{dt} = Xdx + \left(Y + \frac{\alpha\alpha}{y^3}\right) dy;$$

wenn wir also mithilfe der Gleichung für den Meridian x , X , Y über y ausdrücken und mit w die Geschwindigkeit des Punktes auf dem Meridian bezeichnen, hat man durch Integration:

$$\frac{1}{2}ww = \int \left[X \frac{dx}{dy} + Y \right] dy - \frac{\alpha\alpha}{2yy};$$

während σ das Kurvenelement des Meridians bezeichnet, wird also

$$(5) \quad \int \frac{d\sigma}{w} = \int \frac{\left[\left(\frac{dx}{dy} \right) + 1 \right]^{\frac{1}{2}} dy}{\left\{ 2 \int \left[X \frac{dx}{dy} + Y \right] dy - \frac{\alpha\alpha}{yy} \right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Indem man $v = y \cos \psi$, $\zeta = y \sin \psi$ setzt, wird $vd\zeta - \zeta dv = yyd\psi$, woher aus (3)

$$d\psi = \frac{\alpha dt}{yy} = \frac{\alpha d\sigma}{yyw}$$

folgt, was diesen Ausdruck des Winkels ψ an die Hand gibt

$$(6) \quad \psi = \alpha \int \frac{\left[\left(\frac{dx}{dy} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} dy}{yy \left[2 \int \left(X \frac{dx}{dy} + Y \right) dy - \frac{\alpha \alpha}{yy} \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Wir sehen, dass die vorgelegte Bewegung aus der Bewegung des Punktes auf dem Meridian und der Rotationsbewegung der meridianen Ebene um die Achse der Fläche herum zusammengesetzt ist. Nach Vorgabe der Gleichung für den Meridian über y allein (den Abstand des Punktes von der Achse) wird die Koordinate x bestimmt und daher die Lage des Punktes auf dem Meridian; dann erhält man einzig mit Quadraturen sowohl den Winkel ψ , welchen die Ebene des Meridians mit der festen Ebene festlegt, welche durch die Achse der Oberfläche gebildet wird, als auch die Zeit t . Wenn die Anfangsgeschwindigkeit in der meridianen Ebene ausgerichtet ist, wird $\alpha = 0$, $\psi = 0$, und daher ist dann überhaupt keine Drehbewegung in der meridianen Ebene vorhanden oder, was dasselbe ist, der Punkt wird immer auf demselben Meridian bewegt.

Die vorherigen Formeln lassen sich sogar gebrauchen, wenn die Fläche in einer eigenen gleichmäßigen Bewegung um die Achse rotiert wird. Zur angreifenden Kraft tritt natürlich in diesem Fall die zur Achse normale Zentrifugalkraft hinzu, woher zu Y die Größe $c \cdot y$ hinzuzuaddieren ist, während c eine Konstante bedeutet, und daher ist in den Ausdrücken von t und ψ unter dem Quadratwurzelzeichen der Term $\frac{1}{2}cyy$ hinzuzufügen.

Wenn ein Festkörper, auf dessen Oberfläche der Punkt bewegt wird, eine homogene konstante Masse hat, welche mit einer anziehenden beziehungsweise NEWTON'schen oder irgendeiner anderen Kraft ausgestattet ist, wird die Kraft, von welcher der Punkt angegriffen wird, offenkundig in der meridianen Ebene ausgerichtet sein, und ihre Ausrichtung in jener Ebene und die Intensität wird allein von der Lage des Punktes auf dem Meridian anhängen. Dasselbe passiert, wenn der Festkörper nicht homogen ist, sondern verschiedene Punkte derselben meridianen Ebene sich einer beliebigen Dichte erfreuen, aber alle meridianen Ebenen auf dieselbe Weise beschaffen sind, sodass, während y den Abstand des Massenelements von der Achse, x den Abstand von der zur Achse senkrechten festen Ebene bezeichnet, die Dichte des Elements eine Funktion einzig von x und y ist. Aus diesem Grund bezieht sich dieser Fall

auf die vorher betrachtete Bewegung oder man hat diese Proposition:

PROPOSITION II

“Wenn der Punkt auf der Oberfläche eines durch Rotation gebildeten Festkörpers bewegt werden muss, dessen Masse mit einer gewissen anziehenden Kraft ausgestattet und in allen meridianen Ebenen nach demselben Gesetz für die Dichte verteilt ist, wird die Bewegung des Punktes allein mit Quadraturen bestimmt, und das ob nun der Festkörper ruht oder in gleichmäßiger Bewegung um die Achse herum rotiert wird.”

Ich füge die Formeln für den Fall bei, in welchem der Meridian eine Ellipse, die Masse homogen und das Gesetz der Anziehung NEWTON'sch ist.

DIE BEWEGUNG EINES PUNKTES AUF EINEM HOMOGENEN ELLIPTISCHEN SPHÄROIDEN, WELCHER MIT NEWTON'SCHEN ATTRAKTIVER KRAFT AUSGESTATTET IST

Die Gleichung des Meridians sei

$$\frac{xx}{bb} + \frac{yy}{aa} = 1;$$

es ist bekannt, dass

$$X = f \cdot x, \quad Y = g \cdot y$$

wird, während f und g durch die Anziehungen bf , ag , welche im Pol und im Äquator auftreten, bestimmte konstante Größen sind. Daraus findet man

$$\int [Xdx + Ydy] = \frac{1}{2}[fxx + gyy] + \text{Konst.} = \frac{1}{2}hyy + \beta,$$

wobei $h = \frac{aag-bbf}{aa}$ gesetzt wurde und β eine beliebige Konstante bezeichnet. Weiter wird durch Setzen von

$$\frac{aa - bb}{aa} = ee$$

das Element der Ellipse

$$\sqrt{dx dx + dy dy} = \frac{\sqrt{aa - eeyy}}{\sqrt{aa - yy}} dy.$$

Daher erlangen wir aus den Formeln (5) und (6), während τ und γ neue beliebige Konstanten bezeichnen:

$$t + \tau = \int \frac{\sqrt{aa - eeydy}}{\sqrt{hyy + 2\beta - \frac{\alpha\alpha}{yy}} \sqrt{aa - yy}}$$

$$\psi + \gamma = \alpha \int \frac{\sqrt{aa - eeydy}}{yy \sqrt{aa - yy} \sqrt{hyy + 2\beta - \frac{\alpha\alpha}{yy}}}$$

oder nach Setzen von $yy = u$:

$$t + \tau = \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{aa - eeu} du}{\sqrt{(aa - u)(hu^2 + 2\beta u - \alpha\alpha)}}$$

$$\psi + \gamma = \frac{1}{2} \alpha \int \frac{\sqrt{aa - eeu} du}{u \sqrt{(aa - u)(hu^2 + 2\beta u - \alpha\alpha)'}}$$

welche elliptische Integrale sind. Wenn sich der Festkörper einer gleichmäßigen Drehbewegung um seine Achse erfreut, erfahren die vorherigen Formeln keine Veränderung, außer dass die gegebene konstante Größe h einen anderen Wert annimmt.

Man hat ein anderes Beispiel, wenn die Schwerkraft allein auf den Punkt wirkt und zugleich senkrecht zur Achse der Oberfläche ist. In diesem Fall fließt aus dem Vorhergehenden diese Proposition:

PROPOSITION III

“Wenn ein schwerer Punkt auf einer um die vertikale Achse erzeugten Drehfläche bewegt werden muss, wird die Bewegung allein mit Quadraturen bestimmt.”

Für die Bewegung wird $Y = 0$, $X = g$, während g die Schwerkraft bezeichnet, woher man aus den Formeln (5) und (6), während β , γ , τ beliebige Konstanten bezeichnen, erhält:

$$(7) \quad t + \tau = \int \frac{d\sigma}{\sqrt{2gx + \beta - \frac{\alpha\alpha}{yy}}}, \quad \psi + \gamma = \alpha \int \frac{d\sigma}{yy \sqrt{2gx + \beta - \frac{\alpha\alpha}{yy}}},$$

wenn in welchen Formeln mithilfe der Gleichung der meridianen Kurve y über x ausgedrückt gegeben wird, ist $d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$ einzusetzen.

ÜBER DIE KONISCHEN SCHWINGUNGEN EINES EINFACHEN PENDELS

Auf die vorher beschriebene Bewegung erstreckt sich die Schwingung des einfachen Pendels auf einer Kugel oder die, welche unpassenderweise konisch genannt wird.

Es sei nämlich l die Länge des Pendels, ψ der Winkel, welchen die vertikal durch das Pendel gezeichnete Ebene mit der festen vertikalen Ebene bildet, es wird dann gelten:

$$y = \sqrt{ll - xx}, \quad d\sigma = \frac{-ldx}{\sqrt{ll - xx}},$$

woher die Formeln (7) diese werden:

$$(8) \quad \begin{cases} t + \tau = -l \int \frac{dx}{\sqrt{(2gx + \beta)(ll - xx) - \alpha\alpha}} \\ \psi + \gamma = -\alpha l \int \frac{dx}{(ll - xx) \sqrt{(2gx + \beta)(ll - xx) - \alpha\alpha}}. \end{cases}$$

Das stimmt mit den bekannten Formeln überein. Man sehe aber, welche große Allgemeinheit sich vorgelegten Formeln (5) und (6) erfreuen, aus welchen die vorherigen (8) abgeleitet worden sind, weil durch jene Formeln sowohl t als auch ψ allein mit Quadraturen erhalten werden, auch wenn man für die Sphäre irgendeine andere Rotationsfläche einsetzt, für die Schwerkraft aber eine in der meridianen Ebene ausgerichtete Kraft, welche *auf beliebige Weise* von den Koordinaten x und y abhängt.

§. 5

ÜBER DIE BEWEGUNG EINES PUNKTES ZU EINEM FESTEN ZENTRUM ANGEZOGEN NACH EINEM GESETZ ALLGEMEINER ALS DAS NEWTON'SCHE

Es ist bekannt, dass die Bewegung eines zum einem festen Zentrum hin angezogenen Punktes auf Quadraturen zurückgeführt werden kann, wenn die Anziehung eine beliebige Funktion des Abstands ist. Das ist nicht verwunderlich, weil in diesem Fall immer noch das Prinzip der Flächenerhaltung und das der Erhaltung der lebendigen Kräfte gelten. Ich habe neulich ein anders Anziehungsgesetz betrachtet, welches auch allgemeiner ist als das NEWTON'sche, für das jedoch das Prinzip der Flächenerhaltung immer noch Bestand hat, weil ja die Anziehung zu einem festen Zentrum hin ausgerichtet ist, das andere Prinzip der lebendigen Kräfte hingegen nicht gilt, und nichtsdestoweniger wird die Bewegung allein mit Quadraturen bestimmt. Und deswegen muss es auch der Fall sein, dass die Differentialgleichungen für die Bewegung eines gegebenen Planeten um die Sonne integriert werden können und das ohne Hilfe des Prinzips der lebendigen Kräfte. Weil diese Integration wegen ihrer außergewöhnlichen Schlichtheit und der Abwesenheit jeder Quadratwurzel bemerkenswert erscheint, möchte ich sie kurz erläutern, bevor ich zu einer allgemeineren Bewegung voranschreite.

DIE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN FÜR DIE BEWEGUNG EINES GEGEBENEN PLANETEN UM DIE SONNE WERDEN MIT EINER NEUEN METHODE INTEGRIERT

Es seien die Differentialgleichungen vorgelegt, welche man für die Bewegung eines Planeten um die Sonne hat:

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx'}{dt} = -\frac{k^2x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy'}{dt} = -\frac{k^2y}{r^3},$$

in welchen k^2 die Intensität der Anziehung pro Dichteeinheit und $\sqrt{xx + yy}$ der Abstand des Planeten von der Sonne ist. Aus (1) wird:

$$x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

woher durch Integrieren

$$(2) \quad x \frac{dy}{dx} - y \frac{dx}{dt} = rr \frac{d\varphi}{dt} = \alpha$$

wird, wo $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ und α eine beliebige Konstante ist. Indem man die Gleichungen (1) durch (2) teilt, folgt:

$$\frac{dx'}{d\varphi} = -\frac{k^2}{\alpha} \cos \varphi, \quad \frac{dy'}{d\varphi} = -\frac{k^2}{\alpha} \sin \varphi,$$

woraus man durch Integrieren mit den beliebigen Konstanten β und γ erhält:

$$(3) \quad x' = \frac{dx}{dt} = -\frac{k^2}{\alpha} \sin \varphi + \beta, \quad \gamma' = \frac{dy}{dt} = \frac{k^2}{\alpha} \cos \varphi + \gamma,$$

oder, indem man wieder durch (2) teilt,

$$(4) \quad dx = \frac{rr}{\alpha} \left[-\frac{k^2}{\alpha} \cos \varphi + \beta \right] d\varphi, \quad dy = \frac{rr}{\alpha} \left[\frac{k^2}{\alpha} \sin \varphi + \gamma \right] d\varphi.$$

Aus diesen Formeln leitet man

$$xdy - ydx = rrd\varphi = \frac{r^3}{\alpha} \left[\frac{k^2}{\alpha} + \gamma \cos \varphi - \beta \sin \varphi \right] d\varphi$$

ab, also auch

$$(5) \quad r = \frac{\alpha\alpha}{k^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\alpha\gamma}{k^2} \cos \varphi - \frac{\alpha\beta}{k^2} \sin \varphi},$$

was die Gleichung für einen Kegelschnitt in Polarkoordinaten ist, deren Ursprung im Brennpunkt liegt. Nachdem r über φ ausgedrückt worden ist, findet man aus (2) die Zeit über die mit bekannten Methoden integrierbare Formel:

$$(6) \quad t + \tau = \frac{1}{\alpha} \int rrd\varphi,$$

wo τ eine neue beliebige Konstante ist.

DIE BEWEGUNG EINES ZU EINEM FESTEN ZENTRUM HIN
ANGEZOGENEN PUNKTES, WENN DIE INTENSITÄT DER ATTRAKTION
MIT EINER BELIEBIGEN HOMOGENEN FUNKTION (-2) -TER ORDNUNG
AUSGEDRÜCKT WIRD

Wenn wir die im Vorausgehenden verwendete Methode genau betrachten, sehen wir, dass ihr Erfolg lediglich davon abhängt, dass die anziehende Kraft eine homogene Funktion von (-2) -ter Ordnung ist. Dies ist der Fall, wenn die Intensität der anziehenden Kraft dem Quadrat des Abstands umgekehrt proportional ist, so wie die NEWTON'sche, darüber hinaus aber von Winkeln abhängt, welche der radiale Vektor mit beliebigen im Raum fixierten Geraden bildet. Und diese Bewegung muss in der Ebene geschehen, welche durch das feste Zentrum und die Richtung der Vertikalgeschwindigkeit gebildet wird, woher wir wiederum, weil die dritte Koordinate verschwindet, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ setzen wollen; die Anziehung selbst wird mit der Formel

$$\frac{\Phi}{r^2}$$

dargeboten, während Φ eine Funktion einzig von φ bezeichnet, welche für den natürlichen Fall einfach konstant ist. Die zu integrierenden Differentialgleichungen werden:

$$(1) \quad \frac{dx'}{dt} = -\Phi \cdot \frac{x}{r^3}, \quad \frac{dy'}{dt} = -\Phi \cdot \frac{y}{r^3}.$$

Mit dem Flächenprinzip hat man

$$(2) \quad rrd\varphi = \alpha dt,$$

während α eine beliebige Konstante bezeichnet; daher ergibt die Teilung von (1) durch (2):

$$\alpha dx' = -\Phi \cos \varphi d\varphi, \quad \alpha dy' = -\Phi \sin \varphi d\varphi.$$

Demnach folgt durch Integrieren und Bezeichnung neuer beliebiger Konstanten mit β und γ :

$$\alpha x' = - \int \Phi \cos \varphi d\varphi + \beta, \quad \alpha y' = - \int \Phi \sin \varphi d\varphi + \gamma,$$

oder auch (2):

$$\alpha^2 dx = -rrd\varphi \left[\int \Phi \cos \varphi d\varphi + \beta \right]$$

$$\alpha^2 dy = -rrd\varphi \left[\int \Phi \sin \varphi d\varphi + \gamma \right].$$

Daher, weil $xdy - ydx = rrd\varphi$ ist, folgt die Gleichung der Bahn in Polarkoordinaten:

$$r = \frac{\alpha^2}{\sin \varphi \int \Phi \cos \varphi d\varphi - \cos \varphi \int \Phi \sin \varphi d\varphi + \beta \sin \varphi - \gamma \cos \varphi}.$$

Weil mit dieser Formel r über φ ausgedrückt wird, hat man die Formel

$$t + \tau = \frac{1}{\alpha} \int rrd\varphi$$

für die Zeit, wobei τ eine beliebige Konstante bezeichnet.

§. 6

ÜBER DIE BEWEGUNG EINES PUNKTES AUF EINER GEGEBENEN KURVE UND IN EINEM WIDERSTEHENDEN MEDIUM

Oben ist bewiesen worden, dass die Bewegung des Punktes über einer gegebenen Kurve immer mit Quadraturen bestimmt wird, wenn freilich die den Punkt angreifenden Kräfte weder von der Zeit noch von der Geschwindigkeit unmittelbar abhängen, sondern Funktionen einzig der Koordinaten sind. Diese Proposition kann dahingehend verallgemeinert werden, *dass die Bewegung des Punktes über der gegebenen Kurve mit Quadraturen bestimmt wird, auch wenn den angreifenden Kräften, welche beliebige Funktionen der Koordinaten des Punktes sind, die Kraft eines widerstehenden Mediums hinzuaddiert wird, welche einer linearen Funktion des Quadrats der Geschwindigkeit gleich ist, oder gar mit der Exponentialformel $a + be^{cv}$ ausgedrückt wird, und das ob das Medium gleichförmig ist oder sich seine Dichte nach einem beliebigen Gesetz ändert.*

Es sei nämlich $\frac{1}{2}a(vv + b)$ der Widerstand des Mediums, während a und b Konstanten bezeichnen, und τ sei die Tangentialkraft, welche aus den übrigen angreifenden Kräften entspringt. Weil die gegebenen Kräfte alle normal zur Kurve wirken und nur die Tangentialkräfte übrig bleiben, wird

$$dv = \left[-\frac{1}{2}a(vv + b) + \tau \right] dt$$

oder

$$(1) \quad 2v dv + avv ds = (2\tau - ab) ds$$

sein. Daher erhält man durch Multiplizieren mit e^{as} und Integrieren:

$$(2) \quad e^{as} \cdot vv = 2 \int e^{as} \tau ds - be^{as} + \alpha,$$

während α eine beliebige Konstante bezeichnet. Weil die Kurve gegeben ist, über welcher der Punkt bewegt wird, und die angreifende Kraft eine Funktion einzig der Koordinaten des Punktes ist, wird man die Tangentialkraft τ über den Bogen s ausdrücken können, wonach die vorherige Formel nur eine Quadratur verlangt. Mit einer anderen Quadratur aus der Gleichung $dt = \frac{ds}{v}$ erlangt man die Beziehung zwischen Zeit und Bogen:

$$(3) \quad t + \tau = \int \frac{ds}{\sqrt{2e^{-as} \cdot \int e^{as} \tau ds + \alpha e^{-as} - b}},$$

während τ eine beliebige Konstante bedeutet.

Die Reduktion auf Quadraturen gelingt, auch wenn in der Formel, welche das Gesetz für den Widerstand ausdrückt, a und b keine Konstanten sind, sondern beliebige Funktionen der Koordinaten, so wie es unter anderem geschieht, wenn die Dichte des Medium variabel ist. Denn Gleichung (1) wird mit bekannten Regeln integriert, während a, b, τ beliebige Funktionen von s beschreiben.

Nun sei der Widerstand des Mediums über die Formel

$$a + be^{c v v}$$

gegeben; es wird

$$dv = [-a - be^{c v v} + \tau] dt$$

sein, und daher

$$v dv = [-a - be^{cv} + \tau] ds$$

oder

$$e^{-cv} [v dv + (a - \tau) ds] + b ds = 0.$$

Man setze

$$e^{-cv} = w,$$

aus der vorhergehenden Gleichung folgt

$$dw + 2c(\tau - a)w ds = 2cb ds.$$

Nach Setzen von

$$(4) \quad 2c \int (\tau - a) ds = S$$

folgt daraus

$$e^S w = 2c \int be^S ds$$

und daher

$$(5) \quad w = e^{-cv} = 2ce^{-S} \int be^S ds.$$

Weil v mit dieser Formel bestimmt wird, findet man t über die Formel

$$t = \int \frac{ds}{v}.$$

Weil die Kurve gegeben ist, auf welcher der Punkt bewegt werden muss, findet man S mit einer einzigen Quadratur. In den vorhergehenden Formeln muss c freilich eine Konstante sein, aber die Größen a und b können entweder Konstanten oder beliebige Funktionen der Koordinaten des Punktes sein.

DIE BEWEGUNG EINES PENDELS IN EINEM RESISTIERENDEN MEDIUM, WENN DIE WIDERSTEHENDE KRAFT PROPORTIONAL ZUM QUADRAT DER GESCHWINDIGKEIT PLUS EINER KONSTANTEN IST

Um ein Beispiel zu haben, wollen wir die Bewegung eines Pendels in einem widerstehenden Medium betrachten. Die Kurve, auf welcher der Punkt

bewegt werden muss, wird ein vertikaler Kreis sein, die angreifende Kraft die Schwerkraft; wir wollen weiter den Widerstand des Mediums $\frac{1}{2}a(vv + b)$ setzen, während a und b Konstanten sind. Es sei l die Länge des Pendels, φ der Winkel des Pendels mit der Vertikalen, g die Schwerkraft, es wird

$$ds = l d\varphi, \quad \tau = -g \sin \varphi = \frac{1}{2}g\sqrt{-1}[e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}}]$$

sein. Daher wird

$$\int e^{as} \tau ds = \frac{1}{2}gl\sqrt{-1} \int [e^{(al+\sqrt{-1})\varphi} - e^{(al-\sqrt{-1})\varphi}] d\varphi,$$

also auch

$$\begin{aligned} e^{-as} \int e^{as} \tau ds &= \frac{1}{2}gl\sqrt{-1} \left[\frac{e^{\varphi\sqrt{-1}}}{al + \sqrt{-1}} - \frac{e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{al - \sqrt{-1}} \right] \\ &= \frac{gl}{a^2l^2 + 1} [\cos \varphi - al \sin \varphi]. \end{aligned}$$

Nach Einsetzen all dessen in Formel (3) erhält man:

$$(6) \quad t + \tau = \int \frac{ld\varphi}{\sqrt{\frac{2gl}{a^2l^2 + 1} (\cos \varphi - al \sin \varphi) + \alpha e^{-\alpha l \varphi} - b}},$$

wo α und τ beliebige Konstanten sind. Dies ist eine bekannte Formel.

Wenn ein freier Punkt von keiner Kraft angegriffen wird außer der Tangentialkraft, wie es die Kraft des widerstehenden Mediums ist, geschieht die Bewegung entlang einer geraden Linie. Es sei $f(v)$ die Kraft des Widerstandes, es wird

$$dv = -f(v)dt \quad \text{und daher} \quad vdv = -f(v)ds$$

sein, woher, während α und β beliebige Konstanten bedeuten, folgt:

$$(7) \quad s = - \int \frac{v dv}{f(v)} + \alpha, \quad t = - \int \frac{dv}{f(v)} + \beta.$$

Wenn der Punkt, von keiner Kraft angegriffen außer dem Widerstand des Mediums, auf einer gegebenen Linie oder Fläche bewegt werden muss, werden dieselben Gleichungen (4) zwischen Bogen, Geschwindigkeit und Zeit

gelten. Im letztgenannten Fall geschieht die Bewegung auf der kürzesten Linie der Oberfläche, genauso als wenn der Punkt überhaupt keinen Kräften unterworfen wäre; natürlich ändert der Widerstand nur die Geschwindigkeit der Bewegung.

§. 7

ÜBER DIE BALLISTISCHE KURVE

Der unvergleichliche Geometer JOHANN BERNOULLI hat *in den Actis Lipsiensibus im Jahre 1719* die Bewegung eines schweren Punktes in einem gleichmäßig widerstehenden Medium auf Quadraturen zurückgeführt, sofern der Widerstand *einer beliebigen Potenz der Geschwindigkeit proportional* ist¹. Denn herausgefordert, die Bewegung für den Widerstand, welcher dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist, zu konstruieren, hat er sofort die allgemeinere Frage gelöst. Der illustre Herr LEGENDRE hat gelehrt, dass die Ballistik auf Quadraturen zurückgeführt wird, wenn der Widerstand dem Quadrat der Geschwindigkeit plus einer Konstanten gleich ist². Weil man weder diese noch jene Frage in mechanischen Abhandlungen findet, werde ich kurz die Ballistik untersuchen, wenn der Widerstand des Mediums einer beliebigen Potenz der Geschwindigkeit plus einer Konstanten proportional ist. Diese Annahme verallgemeinert jede der beiden Fragen.

Es sei der Widerstand $a + bv^n$, während a und b Konstanten sind, die dynamischen Gleichungen werden:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx'}{dt} = -(a + bv^n) \frac{x'}{v},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy'}{dt} = -(a + bv^n) \frac{y'}{v} - g.$$

Aus diesen folgt

$$(a + bv^n)(x'dy' - y'dx') = gvdx',$$

woher durch Setzen von $x' = v \cos \eta$, $y' = v \sin \eta$

¹Dieselbe Analysis, derer er sich bedient hat, findet man in den *Actis Lips. vom Jahr 1721*.

²LEGENDRE, *Dissertation sur la question de Balistique*, Berlin 1782, S. 59.

$$v(a + bv^n)d\eta = gdx' = g[\cos \eta dv - v \sin \eta d\eta]$$

oder

$$g \cdot \cos \eta \cdot v^{-(n+1)} dv - (a + g \sin \eta)v^{-n} d\eta = bd\eta$$

wird.

Wir wollen festlegen, dass die linke Seite der vorausgehenden Gleichung mit einem geeigneten Faktor multipliziert dem Differential $d.Mv^{-n}$ gleich wird, es wird

$$\frac{dM}{M} = \frac{n(a + g \sin \eta)d\eta}{g \cos \eta}$$

sein, woher

$$(1) \quad M = \cos^{-n} \eta \cdot \tan^{\frac{na}{g}} \left(45^\circ + \frac{1}{2}\eta \right)$$

ist, und der Multiplikator selbst wird

$$-\frac{nM}{g \cos \eta}.$$

Daher erlangen wir das Integral

$$(2) \quad Mv^{-n} = -\frac{n}{g} \int \frac{bMd\eta}{\cos \eta}.$$

Diese Formel gilt, wenn b irgendeine Funktion von η ist; sie würde auch gelten, wenn darüber hinaus a als eine Funktion von η angenommen wird, solange man in Ausdruck (1) den einen Faktor von M abwandelt.

Man setze

$$r = \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2}\eta \right),$$

woraus

$$\cos \eta = \frac{2r}{1+rr'}, \quad \sin \eta = \frac{rr-1}{1+rr'}, \quad \frac{d\eta}{\cos \eta} = \frac{dr}{r}$$

wird. Daher findet man durch Setzen von

$$\frac{a}{g} = c$$

dann

$$(3) \quad M = 2^{-n} r^{n(c-1)} (1 + rr)^n.$$

Demnach

$$(4) \quad 2^n M v^{-n} = -\frac{nb}{g} \int r^{n(c-1)} (1 + rr)^n \frac{dr}{r},$$

welche Formel endlich wird, wenn n eine positive ganze Zahl ist. Vor allen anderen wird der Ausdruck von v durch r einfach, wenn man

$$\frac{a}{g} = c = \frac{n+2}{n}$$

annimmt; denn dann wird aus der vorherigen Formel

$$r^2 (1 + rr)^n v^{-n} = \frac{-nb}{2g(n+1)} (1 + rr)^{n+1} + \alpha,$$

während α eine beliebige Konstante bedeutet.

Nachdem v durch r bestimmt worden ist, werden die allgemeinen Formeln Ausdrücke für x , y , t durch dieselbe Größe einzig mit Quadraturen geben. Während nämlich W den Widerstand bedeutet, hat man die Gleichungen

$$\frac{dx'}{dt} = -\frac{x'}{v} W, \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{y'}{v} W - g,$$

also

$$W(x' dy' - y' dx') = g v dx',$$

oder

$$(5) \quad v W d\eta = g dx'.$$

Aus diesen Formeln folgt

$$(6) \quad \begin{cases} dt = -\frac{v dx'}{x' W} = -\frac{v d\eta}{g \cos \eta} = -\frac{v dr}{gr}, \\ dx = x' dt = -\frac{v^2 d\eta}{g} = -\frac{2v v dr}{g(1+rr)}, \\ dy = y' dt = -\frac{v^2 \tan \eta d\eta}{g} = -\frac{v v (rr-1) dr}{gr(1+rr)}. \end{cases}$$

Indem man in diesen allgemeinen Formen den Ausdruck der Geschwindigkeit v durch η oder r einsetzt und integriert, gehen die Werte von t, x, y hervor. Wenn in den Formeln (3) und (4) dann $a = c = 0, n = 2$ gesetzt wird, erhält man die üblicherweise angegebenen Formeln.

Die Reduktion auf Quadraturen gelingt auch, wenn der Widerstand mit der Formel $a + b \log v$ ausgedrückt wird. Ich verfolge diese Annahme jedoch nicht weiter, weil sie sehr von der Natur abkommt und in den vorherigen Formeln erfasst wird, indem man für a und b zunächst $a - \frac{b}{n}$ und $\frac{b}{n}$ schreibt und dann $n = 0$ setzt.

Damit ältere Autoren Approximationen erhielten, haben sie nach NEWTONS Vorbild anstelle der Konstante b testweise Funktionen von η gesetzt, welche sich kaum verändern und für v, x, y, t leichte Quadraturen an die Hand geben. Verschiedene Beispiele dessen findet man in der Abhandlung des illustren Herrn LEGENDRE; aber die Methoden von Approximationen solcher Art scheinen allzu unsicher.

Königsberg, am Tage des 27. März, 1842