Kleine Beobachtungen zur Theorie von Gleichungen[*]

Carl Gustav Jacob Jacobi

I.

Die Auflösung algebraischer Gleichungen verlangt, dass nach Vorgabe der Anzahl der Elemente die einzelnen durch symmetrische Funktionen derer mithilfe der Extraktion von Wurzeln dargeboten werden. Es ist bekannt, dass dies für Gleichungen des zweiten, dritten, vierten Grades tatsächlich gelingt. Weil die Natur jener symmetrischen Funktionen in den elementaren Lehrbüchern gewiss nicht besprochen zu werden pflegt, möchte ich sie hier kurz darlegen.

Auflösung von Gleichungen zweiten Grades

Nach Vorlage der beiden Elemente a, b hat man die einzelnen Lösungen vermöge der Formel

$$\frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}.$$

[*]Originaltitel: "Observatiunculae ad Theoriam Aequationum Pertinentes", zuerst publiziert in: *Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 13* (1834): pp. 340–352, Nachdruck in: C.G.J. Jacobi's Gesammelte Werke, Band 3, pp. 269 – 284, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

Auflösung der Gleichungen dritten Grades

Nach Vorlage der drei Elemente a, b, c wollen wir

$$a+b+c=u, \quad a+\alpha b+\alpha^2 c=u', \quad a+\alpha^2 b+\alpha c=u''$$

setzen, während α, α^2 die imaginären kubischen Einheitswurzeln bezeichnen. Nach Festlegung dessen werden die einzelnen Elemente mithilfe von u, u', u'' durch die Formeln

$$a=\frac{u+u'+u''}{3}, \quad b=\frac{u+\alpha^2 u'+\alpha u''}{3}, \quad c=\frac{u+\alpha u'+\alpha^2 u''}{3}$$

dargeboten. Wir wollen weiter

$$u'=\sqrt[3]{v+\sqrt{w}}, \quad u''=\sqrt[3]{v-\sqrt{w}}$$

setzen; es wird

$$\begin{aligned}
v &= \frac{u'^2+u''^2}{2}=\frac{(u'+u'')(u'+\alpha u'')(u'+\alpha^2 u'')}{2},\\
\sqrt{w} &= \frac{u'^2-u''^2}{2}=\frac{(u'-u'')(u'-\alpha u'')(u'-\alpha^2 u'')}{2}.
\end{aligned}$$

sein. Nachdem aber die oben eingeführten Werte von u', u'' eingesetzt worden sind, weil

$$1+\alpha+\alpha^2=0$$

gilt, hat man

$$u'+u''=2a-b-c, \quad u'+\alpha u''=\alpha^2(2c-a-b), \quad u'+\alpha^2 u''=\alpha(2b-c-a),$$

und daher

$$v=\frac{(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)}{2}.$$

Weiter wird:

$$\begin{aligned}
u'-u'' &= (\alpha-\alpha^2)(b-c),\\
u'-\alpha u'' &= (1-\alpha)(a-b),\\
u'-\alpha^2 u'' &= (1-\alpha^2)(a-c),
\end{aligned}$$

und daher, weil

$$1-\alpha=\alpha^2(\alpha-\alpha^2),\quad 1-\alpha^2=-\alpha(\alpha-\alpha^2),\quad \alpha-\alpha^2=\sqrt{-3}$$

ist, wird

$$\sqrt{w}=\frac{3\sqrt{-3}}{2}(a-b)(a-c)(b-c).$$

Nach Einsetzen dieser Werte geht hervor:

$$\begin{aligned}
a=\frac{a+b+c}{3}&+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)+3\sqrt{-3[(a-b)(a-c)(b-c)]^2}}{2}}\\
&+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)-3\sqrt{-3[(a-b)(a-c)(b-c)]^2}}{2}}\\
b=\frac{a+b+c}{3}&+\frac{-1+\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\frac{(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)+3\sqrt{-3[(a-b)(a-c)(b-c)]^2}}{2}}\\
&+\frac{-1-\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\frac{(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)-3\sqrt{-3[(a-b)(a-c)(b-c)]^2}}{2}}\\
c=\frac{a+b+c}{3}&+\frac{-1-\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\frac{(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)+3\sqrt{-3[(a-b)(a-c)(b-c)]^2}}{2}}\\
&+\frac{-1+\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\frac{(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)-3\sqrt{-3[(a-b)(a-c)(b-c)]^2}}{2}};
\end{aligned}$$

dies sind die gesuchten Ausdrücke.

Von den Kubikwurzeln

$$u'=\sqrt[3]{v+\sqrt{w}},\quad u''=\sqrt[3]{v-\sqrt{w}}$$

wird die eine durch die andere mithilfe der Formel

$$u'u''=\sqrt[3]{vv-w}=aa+bb+cc-ab-ac-bc=\frac{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2}{2}$$

$$=\sqrt[3]{\left(\frac{(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)}{2}\right)^2+\frac{27}{4}[(a-b)(a-c)(b-c)]^2}$$

dargeboten.

Auflösung von Gleichungen vierten Grades

Nach Vorlage der vier Elemente a, b, c, d wollen wir festlegen:

$$a+b+c+d=u,\quad a+b-c-d=u',$$
$$a-b+c-d=u'',\quad a-b-c+d=u''',$$

woher

$$a=\frac{u+u'+u''+u'''}{4},\quad b=\frac{u+u'-u''-u'''}{4},$$
$$c=\frac{u-u'+u''-u'''}{4},\quad d=\frac{u-u'-u''+u'''}{4}$$

wird. Wir wollen in den Formeln, welche wir zur Auflösung von Gleichungen dritten Grades vorgestellt haben, anstelle von a, b, c die Größen $u'u'$, $u''u''$, $u'''u'''$ setzen, woraus

$$2v=(2u'u'-u''u''-u'''u''')(2u''u''-u'''u'''-u'u')(2u'''u'''-u'u'-u''u''),$$
$$2\sqrt{w}=3\sqrt{-3(u'u'-u''u'')(u'u'-u'''u''')(u''u''-u'''u''')}$$

wird. Man hat aber:

$$u'u'-u''u''=(u'+u'')(u'-u'')=4(a-d)(b-c),$$
$$u'u'-u'''u'''=(u'+u''')(u'-u''')=4(a-c)(b-d),$$
$$u''u''-u'''u'''=(u''+u''')(u''-u''')=4(a-b)(c-d);$$

weiter wird:

$$2u'u'-u''u''-u'''u'''=8(ab+cd)-4(ac+bd)-4(ab+bc),$$
$$2u''u''-u'''u'''-u'u'=8(ac+bd)-4(ad+bc)-4(ab+cd),$$
$$2u'''u'''-u'u'-u''u''=8(ad+bc)-4(ab+cd)-4(ac+bd).$$

Wir wollen darüber hinaus festlegen:

$$s=u'u'+u''u''+u'''u'''.$$

Nach Sammeln all dessen und Hinzunahme der vorher angegebenen Formeln zur Auflösung der Gleichungen dritten Grades findet man, wieder für

$$\alpha = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad \alpha^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

gesetzt:

$$\begin{aligned}
4a = u + \sqrt{\frac{s+\sqrt[3]{v+\sqrt{w}}+\sqrt[3]{v-\sqrt{w}}}{3}} &+ \sqrt{\frac{s+\alpha\sqrt[3]{v+\sqrt{w}}+\alpha^2\sqrt[3]{v-\sqrt{w}}}{3}} \\
&+ \sqrt{\frac{s+\alpha^2\sqrt[3]{v+\sqrt{w}}+\alpha\sqrt[3]{v-\sqrt{w}}}{3}} \\
4b = u + \sqrt{\frac{s+\sqrt[3]{v+\sqrt{w}}+\sqrt[3]{v-\sqrt{w}}}{3}} &- \sqrt{\frac{s+\alpha\sqrt[3]{v+\sqrt{w}}+\alpha^2\sqrt[3]{v-\sqrt{w}}}{3}} \\
&- \sqrt{\frac{s+\alpha^2\sqrt[3]{v+\sqrt{w}}+\alpha\sqrt[3]{v-\sqrt{w}}}{3}} \\
4c = u - \sqrt{\frac{s+\sqrt[3]{v+\sqrt{w}}+\sqrt[3]{v-\sqrt{w}}}{3}} &+ \sqrt{\frac{s+\alpha\sqrt[3]{v+\sqrt{w}}+\alpha^2\sqrt[3]{v-\sqrt{w}}}{3}} \\
&- \sqrt{\frac{s+\alpha^2\sqrt[3]{v+\sqrt{w}}+\alpha\sqrt[3]{v-\sqrt{w}}}{3}} \\
4d = u - \sqrt{\frac{s+\sqrt[3]{v+\sqrt{w}}+\sqrt[3]{v-\sqrt{w}}}{3}} &- \sqrt{\frac{s+\alpha\sqrt[3]{v+\sqrt{w}}+\alpha^2\sqrt[3]{v-\sqrt{w}}}{3}} \\
&+ \sqrt{\frac{s+\alpha^2\sqrt[3]{v+\sqrt{w}}+\alpha\sqrt[3]{v-\sqrt{w}}}{3}},
\end{aligned}$$

wo man hat:

$$
\begin{aligned}
u &= a+b+c+d, \\
s &= (a+b-c-d)^2 + (a-b+c-d)^2 + (a-b-c+d)^2 \\
&= (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2, \\
v &= 32[2(ab+cd) - (ac+bd) - (ad+bc)] \\
&\quad \times [2(ac+bd) - (ad+bc) - (ab+cd)] \\
&\quad \times [2(ad+bc) - (ac+bd) - (ab+cd)], \\
w &= -3[96(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)]^2
\end{aligned}
$$

Weil diese Ausdrücke alle symmetrische Funktionen von a, b, c, d sind, ist dem Gefragten Genüge geleistet.

Ich bemerke weiter, dass man in den vorhergehenden Formeln hat:

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{v+\sqrt{w}} \cdot \sqrt[3]{v-\sqrt{w}} = \sqrt[3]{vv-w} & \\
&= u'^4 + u''^4 + u'''^4 - u'^2u''^2 - u'^2u'''^2 - u''^2u'''^2 \\
&= 8[(a-b)^2(c-d)^2 + (a-c)^2(b-d)^2 + (a-d)^2(b-c)^2];
\end{aligned}
$$

weiter

$$
\sqrt{s+\sqrt[3]{v+\sqrt{w}}+\sqrt[3]{v-\sqrt{w}}} \cdot \sqrt{s+\alpha\sqrt[3]{v+\sqrt{w}}+\alpha^2\sqrt[3]{v-\sqrt{w}}} \cdot \sqrt{s+\alpha^2\sqrt[3]{v+\sqrt{w}}+\alpha\sqrt[3]{v-\sqrt{w}}}
$$

$$
= \sqrt{s^3+2v-3s\sqrt[3]{vv-w}} = u'u''u''' = (a+b-c-d)(a+c-b-d)(a+d-b-c).
$$

Weil diese Ausdrücke in Bezug auf die Elemente a, b, c, d symmetrisch sind, sehen wir, dass von zwei Kubikwurzeln die eine durch die andere gegeben ist, aus den drei Quadratwurzeln, welche wir mit u', u'', u''' bezeichnet haben, eine durch die anderen beiden bestimmt wird. Mithilfe dieser Beobachtung geschieht es, dass durch eine so große Mehrdeutigkeit der Wurzeln nicht mehr als vier verschiedene Größen dargestellt werden.

II. Allgemeine Betrachtungen

Wenn wir genauer untersuchen, wie im vorher Präsentierten die Ausdrücke zusammengesetzt sind, mit denen die vier Elemente dargestellt werden, sehen wir, dass zuerst aus einer symmetrischen Funktion eine Quadratwurzel gezogen wird, nach Addieren einer anderen symmetrischen Funktion eine kubische zu welcher eine kubische Wurzel gezogen wird; dieser und einer dritten symmetrischen Funktion wird eine andere ähnliche kubische Wurzel hinzuaddiert, wonach wieder eine Quadratwurzel gezogen wird und nachdem drei Quadratwurzeln sowie eine neue symmetrische Funktion in gleicher Weise gebildet worden sind, werden alle vier Elemente dargeboten. Die Extraktionen der Wurzeln können nur angegeben werden, wenn die Größen unter den Wurzelzeichen durch Koeffizienten einer Gleichung vierten Grades ausgedrückt werden, deren Elemente jene Wurzeln sind; wenn nun die Größen unter den Wurzeln durch die Elemente selbst, wie wir es getan haben, dargeboten werden, sehen wir, dass diese Extraktionen alle durchgeführt werden können und mit ihnen verschiedene asymmetrische Funktionen der Elemente bestimmt werden, bis man schließlich zu den einzelnen Elementen selbst gelangt.

Wir sehen, dass bei diesen Fragen der Anfang beim Finden der asymmetrischen Funktion zu machen ist, von welcher eine gewisse Potenz symmetrisch wird. Denn ansonsten lässt sich nicht allein durch die Extraktion von Wurzeln von asymmetrischen zu symmetrischen Funktionen gelangen. Es ist aber keine andere Funktion von solcher Art gegeben als dem aus den Differenzen der Elemente gebildeten Produkt, welches nach Vertauschen der Elemente zwei entgegengesetzte Werte annehmen kann und dessen Quadrat eine symmetrische Funktion ist. Dieses Quadrat muss also in allen Lösungen, welche zuvor angegeben worden sind, unter dem letzten Wurzelzeichen gefunden werden und wird dort tatsächlich auch gefunden, und daher kann also das letzte Radikal nichts anderes sein als ein Quadrat. Dasselbe ist auch aus der folgenden Betrachtung ersichtlich.

Wir wollen nämlich festlegen, dass die Koeffizienten der Gleichung eine Funktion einer anderen Größe t sind, und wollen die Wurzel x nennen; die Gleichung lässt sich auf diese Weise vorstellen:

$$F(x,t) = 0.$$

Daher finden wir das nach t genommene Differential der Wurzel unter Verwendung der Lagrange'schen Notation als

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{F'(t)}{F'(x)}.$$

Daraus folgt, wenn die vorgelegte Gleichung zwei einander gleiche Wurzeln hat und wir diese für x auswählen, dass $\frac{dx}{dt}$ unendlich wird. Denn für jenen Wert verschwindet der Nenner $F'(x)$. Wenn also x durch t mithilfe von Wurzeln dargeboten werden kann, muss der Ausdruck so beschaffen sein, dass durch Differentiation ein Nenner entsteht, der verschwindet, sofern zwei Wurzeln einander gleich werden, was also nicht anders passieren kann, als dass ein Quadrat in jenen Ausdrücken unter dem Wurzelzeichen gefunden wird jedoch nicht in den anderen durch Addition hinzugefügten Größen, oder unter dem letzten Wurzelzeichen, sowie wir es auch in den algebraischen Auflösungen der Gleichungen zweiten, dritten, vierten Grades beobachtet haben.

Vielerorts ist schon bemerkt worden, wenn eine allgemeine algebraische Auflösung einer Gleichung n–ten Grades gegeben ist, unter deren Wurzeln gewisse Relationen nicht auftreten, dass der Ausdruck der Wurzel notwendig so viele Wurzelzeichen beinhaltet wie er die algebraischen Lösungen der Gleichung der niederen Grade enthalten kann. Daher ist schnell klar, dass die Anzahl der Dimensionen, zu welchen der Ausdruck unter dem letzten Wurzelzeichen ansteigt, nicht kleiner sein kann als die kleinste Zahl, die von allen Zahlen $2, 3, 4, \cdots, n$ geteilt wird. Das heißt, für $n = 2, 3, 4$ sind das respektive 4, 6, 12. Und dieselbe ist in jenen Fällen die Anzahl der Dimensionen jenes quadratischen Produkts, welches aus den Differenzen der Wurzeln zusammengesetzt ist und unter dem letzten Wurzelzeichen gefunden wird. Aber für $n = 5$ wird jene kleinste Zahl, welche durch 2, 3, 4, 5 geteilt wird, $= 60$, während die Anzahl der Dimensionen jenes Quadrats nur bis hin zu 20 oder allgemein bis hin zur Zahl $n(n-1)$ ansteigt. Und auch für die höheren Werte von n fehlt jene Überstimmung völlig.

Bemerkung zur Gleichung sechsten Grades, auf welche Gleichungen fünften Grades reduziert werden können

Es seien die fünf Elemente x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 vorgelegt und wir wollen mit dem Symbol

$$(12345)$$

eine rationale Funktion bezeichnen, welche unverändert bleibt, wenn wir die Elemente x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 in derselben Reihenfolge, in welcher wir sie dargeboten haben, respektive mit diesen

$$x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5, \quad x_1.$$

vertauschen. Wir wollen weiter

$$(12345) - (13524) = y$$

setzen; vor einiger Zeit hat der illustre Herr Lagrange bewiesen, dass der Ausdruck y^2 durch Permutation der Elemente x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 nicht mehr als sechs verschiedene Werte annehmen kann, sodass, nach Vorlage einer Gleichung fünften Grades, deren Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sind, der Ausdruck y^2 eine Wurzel einer gegebenen Gleichung sechsten Grades ist. Wir wollen

$$\begin{aligned}
(12345) - (13524) &= y_1 \\
(12453) - (14325) &= y_2 \\
(12534) - (15423) &= y_3 \\
(15243) - (12354) &= y_4 \\
(14235) - (12543) &= y_5 \\
(13254) - (12435) &= y_6
\end{aligned}$$

setzen, y_1^2, y_2^2, y_2^3, y_4^2, y_5^2, y_6^2 werden die Wurzeln jener Gleichung sechsten Grades sein. Aber ich glaube, dass noch von niemandem bemerkt worden ist, dass auch y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 schon die Wurzeln einer gegebenen Gleichung sechsten Grades sind, obwohl ihre Koeffizienten nicht alle symmetrische Funktionen der Elemente x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sind und daher also nicht durch die Koeffizienten einer gegebenen Gleichung fünften Grades rational ausgedrückt werden können. Denn durch Untersuchung der Veränderungen, welche die Ausdrücke y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 durch Permutation der Elemente x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 erfahren, finden wir, dass alle zugleich entweder von einem in einen anderen oder in ihre jeweils Entgegengesetztes übergehen. Daher wird eine homogene symmetrische Funktion von y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, wenn sie von gerader Ordnung ist, auch in Bezug auf x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 symmetrisch sein; aber wenn sie von ungerader Ordnung ist, kann sie durch Permutation der

Elemente x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 keine andere Veränderung erfahren als dass sich das Vorzeichen ändert. Wir haben im Allgemeinen gefunden, dass sich dies so zuträgt, wenn wir zwei der Elemente x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 vertauschen. Leicht ist aber klar, eine Funktion der Elemente x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 von welcher Art, welche durch Permutation von zweien das Vorzeichen ändern und keine andere Veränderung erfahren soll, keine andere sein kann als das Produkt aus allen Differenzen der Produkte, multipliziert mit einer symmetrischen Funktion derer. Weil das Quadrat dieses Produkts eine symmetrische Funktion ist und daher als bekannt angesehen wird, sehen wir, dass symmetrische Funktionen von y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 alle auch als gegeben angesehen werden können. Natürlich können, wenn die Gleichung sechsten Grades, deren Wurzeln y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 sind,

$$y^6 - a_1 y^5 + a_2 y^4 - a_3 y^3 + a_4 y^2 - a_5 y + a_6 = 0$$

gesetzt wird, die Koeffizienten a_2, a_4, a_6 rational in den Koeffizienten einer gegebenen Gleichung fünften Grades dargeboten werden, die Koeffizienten a_1, a_3, a_5 werden rationale Ausdrücke einer Gleichungen fünften Grades sein, multipliziert mit der Quadratwurzel $\sqrt{\triangle}$, mit

$$\triangle = [(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)(x_3-x_4)(x_3-x_5)(x_4-x_5)]^2$$

Die einfachste Funktion, welche sich der Eigenschaften des oben mit dem Symbol (12345) angezeigten Ausdrucks erfreut, ist diese:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1,$$

für welche man diese Wurzeln einer Gleichung sechsten Grades hat:

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1 - x_1x_3 - x_3x_5 - x_5x_2 - x_2x_4 - x_4x_1\\
y_2 &= x_1x_2 + x_2x_4 + x_4x_5 + x_5x_3 + x_3x_1 - x_1x_4 - x_4x_3 - x_3x_2 - x_2x_3 - x_5x_1\\
y_3 &= x_1x_2 + x_2x_5 + x_5x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 - x_1x_5 - x_5x_4 - x_4x_2 - x_2x_3 - x_3x_1\\
y_4 &= x_1x_5 + x_5x_2 + x_2x_4 + x_4x_3 + x_3x_1 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_5 - x_5x_4 - x_4x_1\\
y_5 &= x_1x_4 + x_4x_2 + x_2x_3 + x_3x_5 + x_5x_1 - x_1x_2 - x_2x_5 - x_5x_4 - x_4x_3 - x_3x_1\\
y_6 &= x_1x_3 + x_3x_2 + x_2x_5 + x_5x_4 + x_4x_1 - x_1x_2 - x_2x_4 - x_4x_3 - x_3x_5 - x_5x_1.
\end{aligned}$$

Weil diese Ausdrücke in Bezug auf die Elemente x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 nur zur zweiten Dimension hin ansteigen, werden die Koeffizienten a_1, a_3, a_5 von zweiter, sechster, zehnter Dimension sein. Weil die Ausdrücke derer aus der zuvor gemachten Beobachtung das Produkt aus allen Differenzen der Elemente x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 als Faktor beinhalten, welcher zu zehn Dimensionen ansteigt, muss

$$a_1 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_5 = m\sqrt{\triangle}$$

werden, während m eine Zahl ist. Und nach der Rechnung findet man

$$a_5 = 32(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_1 - x_5)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_2 - x_5)(x_3 - x_4)(x_3 - x_5)(x_4 - x_5)$$

und daher $m = 32$. Daher nimmt die Gleichung sechsten Grades diese Form an:

$$y^6 + a_2y^4 + a_4y^2 + a_6 = 32\sqrt{\triangle} \cdot y.$$

Wenn diese Gleichung fünften Grades vorgelegt ist:

$$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0,$$

findet man leicht

$$a_2 = 8AC - 3B^2 - 20D.$$

Die Werte von a_4, a_6 bedürfen einer ein wenig umfangreicheren Rechnung. Den Wert von $\triangle$, ausgedrückt durch A, B, C, D, E, hat der illustre Herr Lagrange in der Theorie von Gleichungen angegeben, alles beschreiben aus den *Meditationibus Algebraicis* des hoch geehrten Herrn Waring.

III. Eine Spielerei zur algebraischen Auflösung von Gleichungen fünften Grades

Vor einiger Zeit, wie es sich begab, als ich mich als eifriger Junge mit dem Versuch der algebraischen Auflösung von Gleichungen fünften Grades abmühte, habe ich die allgemeine Gleichung

$$x^5 - 10q^2x = p$$

auf eine andere zehnten Grades zurückgeführt, deren algebraische Auflösung gelingt, nachdem lediglich die Vorzeichen der Koeffizienten geändert worden sind. Diese unnütze, jedoch kuriose Sache möchte ich hier kurz darstellen. Nach Setzen von

$$x = y + z,$$

weil

$$x^5 - 10y^2z^2 \cdot x = y^5 + z^5 + 5yz(y^3 + z^3)$$

ist, habe ich diese Gleichung mit der vorgelegten verglichen, woraus

$$yz = q, \quad y^5 + z^5 + 5yz(y^3 + z^3) = p,$$

und daher

$$y^{10} + 5qy^8 + 5q^4y^2 + q^5 = p \cdot y^5$$

ist. Nach Auflösung dieser Gleichung zehnten Grades ist auch die vorgelegte fünften Grades gelöst.

Leicht glaubt man mir, dass freilich jene Gleichung zehnten Grades nicht algebraisch aufgelöst werden kann, aber von dieser anderen:

$$y^{10} - 5qy^8 - 5q^4y^2 + q^5 = p \cdot y^5,$$

welche nur in den Vorzeichen von zwei Koeffizienten von jener abweicht, habe ich diese algebraische Wurzel gefunden:

$$\frac{1}{2}\sqrt[5]{\frac{p + \sqrt{p^2 - 128q^5}}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt[5]{\frac{p - \sqrt{p^2 - 128q^5}}{2}}$$
$$\pm\frac{1}{2}\sqrt[5]{\left(\frac{p + \sqrt{p^2 - 128q^5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{p - \sqrt{p^2 - 128q^5}}{2}\right)^2} = y.$$

IV. Über die Anzahl der Wurzeln, die innerhalb gegebener Grenzen liegen

Descartes hat einst eine Regel angegeben, mit welcher nach Vorgabe einer algebraischen Gleichung aus den Vorzeichen der Koeffizienten die Grenzen erkannt werden, welche die Anzahl der positiven Wurzeln und die Anzahl der negativen Wurzeln nicht übersteigen kann. Grenzen von solcher Art hat der hoch geehrte Herr Fourier für reelle Wurzeln angegeben, welche zwischen beliebigen gegebenen reellen Größen a und b enthalten sind. Aber ich bemerke, dass dasselbe aus der Descartes'schen Regel abgeleitet werden kann. Es sei nämlich x eine Wurzel der vorgelegten Gleichung, man setze

$$y = \frac{b-x}{x-a},$$

y wird die Wurzel der Gleichung derselben Ordnung sein, welche so viele positive Wurzeln hat wie Werte von x zwischen a und b liegen. Daher wird nach Anwendung der Descartes'schen Regel auf die transformierte Gleichung die Grenze der Anzahl der Wurzeln der vorgelegten Gleichung bekannt sein, welche zwischen a und b enthalten sind. Die Angelegenheit wird hier sogar mit den Vorzeichen einer Reihe von $n+1$ Größen abgehandelt, wenn n der Grad der Gleichung ist, während der hoch geehrte Herr Fourier zwei Reihen verwendet. Aber die vom illustren Herrn vorgetragene Regel ist zum einen unter vielen anderen Namen bekannt und erlaubt zum anderen eine schnelle Rechnung.

Mit derselben Beobachtung kann auch die berühmte Sturm'sche Regel, mit welcher die Anzahl der Wurzeln genauer bestimmt wird, welche sich innerhalb gegebener Grenzen befinden, auf den Fall zurückgeführt werden, in welchem die Anzahl der positiven oder negativen Wurzeln gesucht wird.

V. Wie die Bernoulli'sche Regel auf das Finden der Wurzeln, welche der grössten oder kleinsten folgen, ausgedehnt werden kann

Es sei X eine beliebige gegebene ganz rationale Funktion n–ten Grades von x, weiter sei P eine andere ganz rationale Funktion von geringerem Grad derselben Variable; man entwickle den Bruch $\frac{P}{X}$ nach schrumpfenden Potenzen von x, je zwei aufeinander folgende Terme welcher Entwicklung

$$\frac{p_{m-1}}{x^m} + \frac{p_m}{x^{m+1}}$$

seien, vor einiger Zeit hat Daniel Bernoulli gelehrt, dass der Quotient $\frac{p_m}{p_{m-1}}$ zum größten Wert der Gleichung

$$X = 0$$

konvergiert. Wenn der Bruch $\frac{P}{X}$ nach aufsteigenden Potenzen von x entwickelt wird, je zwei aufeinander folgende Terme welcher Entwicklung

$$q_m x^m + q_{m+1} x^{m+1}$$

seien, wird der Quotient $\frac{q_m}{q_{m+1}}$ zum kleinsten Wert der Wurzel konvergieren. Der Grund dieser Regel ist bekanntermaßen der, dass im allgemeinen Ausdruck von p_m

$$p_m = C_1 x_1^m + C_2 x_2^m + C_3 x_3^m + \cdots + C_n x_n^m,$$

in welchem x_1, x_2, $\cdots$, x_n die Wurzeln der vorgelegten Gleichung, C_1, C_2, $\cdots$, C_n hingegen Konstanten oder vom Exponenten m unabhängige Größen sind, in Bezug auf einen mit einer m–ten Potenz der Wurzel multiplizierten Term alle übrigen weggelassen werden können, wenn freilich die Zahl m hinreichend groß festgelegt wird. Analoges gilt für das Finden der kleinsten Wurzel.

Wir wollen die Wurzeln, nach der *betragsmäßigen* Größe geordnet, festlegen

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \cdots, \quad x_n$$

zu sein, sodass x_1 die größte und x_n die kleinste ist. Imaginäre Wurzeln wollen wir nach deren Modulus einschätzen, oder wenn die imaginäre Wurzel $r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)$ ist, während r, φ reelle Größen bedeuten, nach der Größe r. Die vorgestellte Regel für das Finden der größten Wurzel versagt, wenn zwei einander gleiche größte Wurzeln vorhanden sind, oder sooft zwei größte imaginäre Wurzeln vorhanden sind, wenn beide denselben Modulus haben. In diesem Fall ist die vorherige Regel so zu erweitern, dass gleichzeitig die zwei größten Wurzeln ausfindig gemacht werden. Das hat schon Euler für den Fall getan, in welchem die zwei größten Wurzeln imaginäre von der Form $r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)$, $r(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)$ sind, siehe Kapitel XVII von Band 1 der *Introductionis*. Mit den wenigen folgenden Schritten werde ich zeigen, wie mit denselben Prinzipien eine Gleichung von k–ter Ordnung gefunden wird, deren k Wurzeln den ebenso vielen größten Wurzeln der vorgelegten Gleichung näherungsweise gleich sind. Diese Verallgemeinerung hat der hoch geehrte Herr Fourier in der Einleitung des Werks über Gleichungen angedeutet.

Im allgemeinen Ausdruck von p_m vernachlässigen wir in Bezug auf die mit den größten k zur m–ten Potenz erhobenen Wurzeln multiplizierten Terme alle übrigen; das lässt sich mit umso mehr Berechtigung tun, je größer die Zahl m ist. Daher setzen wir näherungsweise:

$$p_m = C_1 x_1^m + C_2 x_2^m + \cdots + C_k x_k^m$$

oder nach Setzen von

$$C_1 x_1^m = B_1, \quad C_2 x_2^m = B_2, \quad \cdots, \quad C_k x_k^m = B_k,$$

setzen wir auch näherungsweise

$$\begin{aligned}
p_m &= B_1 + B_2 + \cdots + B_k \\
p_{m+1} &= B_1 x_1 + B_2 x_2 + \cdots + B_k x_k \\
p_{m+2} &= B_1 x_1^2 + B_2 x_2^2 + \cdots + B_k x_k^2 \\
\cdots & \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
p_{m+k} &= B_1 x_1^k + B_2 x_2^k + \cdots + B_k x_k^k.
\end{aligned}$$

Wir wollen

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_k) = x^k + A_1 x^{k-1} + A_2 x^{k-2} + \cdots + A_k$$

festlegen, welcher Ausdruck klarerweise verschwindet, wenn anstelle von x die k Werte $x_1, x_2, \cdots, x_k$ gesetzt werden. Daher folgt aus den vorherigen Gleichungen diese:

$$0 = p_{m+k} + A_1 p_{m+k-1} + A_2 p_{m+k-2} + \cdots + A_k p_m$$

In dieser, wenn wir anstelle von m entsprechend $m+1$, $m+2$ etc. setzen, haben wir das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
0 &= x^k + A_1 x^{k-1} + A_2 x^{k-2} + \cdots + A_k \\
0 &= p_{m+k} + A_1 p_{m+k-1} + A_2 p_{m+k-2} + \cdots + A_k p_m \\
0 &= p_{m+k+1} + A_1 p_{m+k} + A_2 p_{m+k-1} + \cdots + A_k p_{m+1} \\
0 &= p_{m+k+2} + A_1 p_{m+k+1} + A_2 p_{m+k} + \cdots + A_k p_{m+2} \\
& \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
0 &= p_{m+2k-1} + A_1 p_{m+2k-2} + A_2 p_{m+2k-3} + \cdots + A_k p_{m+k-1}
\end{aligned}$$

Von den Gleichungen, deren Anzahl $k+1$ ist, geht nach Elimination von k Größen $A_1, A_2, \cdots, A_k$ eine Gleichung von dieser Art hervor:

$$P x^k + P_1 x^{k-1} + P_2 x^{k-2} + \cdots + P_k = 0,$$

in welcher P, P_1, P_2, $\cdots$, P_k durch die Terme p_m, p_{m+1}, $\cdots$, p_{m+2k-1} ausgedrückt sind, und deren Wurzeln den k größten der vorgelegten Gleichung, $X = 0$, näherungsweise gleich sind.

Es sei $k = 2$, man hat

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 + A_1 x + A_2 \\
0 &= p_{m+2} + A_1 p_{m+1} + A_2 p_m \\
0 &= p_{m+3} + A_1 p_{m+3} + A_2 p_{m+1},
\end{aligned}$$

woher man nach Elimination von A_1, A_2 die Größen x_1, x_2 näherungsweise den Wurzeln dieser quadratischen Gleichung gleich findet:

$$(p_{m+1}^2 - p_m p_{m+2})^2 x^2 + (p_m p_{m+3} - p_{m+1} p_{m+2}) x - p_{m+2}^2 - p_{m+1} p_{m+3} = 0;$$

so ist es bekannt und stimmt mit Eulers Formeln überein.

Es sei $k = 3$, man hat

$$\begin{aligned}
0 &= x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 \\
0 &= p_{m+3} + A_1 p_{m+2} + A_2 p_{m+1} + A_3 p_m \\
0 &= p_{m+4} + A_1 p_{m+3} + A_2 p_{m+2} + A_3 p_{m+1} \\
0 &= p_{m+5} + A_1 p_{m+4} + A_2 p_{m+3} + A_3 p_{m+2},
\end{aligned}$$

woher nach Elimination von A_1, A_2, A_3 hervorgeht:

$$P x^3 + P_1 x^2 + P_2 x + P_3 = 0$$

mit

$$\begin{aligned}
P &= p_{m+2}^3 + p_{m+1}^2 p_{m+4} + p_m p_{m+3}^2 - 2 p_{m+1} p_{m+2} p_{m+3} - p_m p_{m+2} p_{m+4} \\
P_1 &= P_{m+1} p_{m+3}^2 + p_{m+1} p_{m+2} p_{m+4} + p_m p_{m+2} p_{m+5} - p_{m+2}^2 p_{m+3} - p_{m+1}^2 p_{m+5} - p_m p_{m+3} p_{m+4} \\
P_2 &= p_m p_{m+4}^2 + p_{m+2} p_{m+3}^2 + p_{m+1} p_{m+2} p_{m+5} - p_{m+2}^2 p_{m+1} - p_m p_{m+3} p_{m+5} - p_{m+1} p_{m+3} p_{m+4} \\
P_3 &= 2 p_{m+2} p_{m+3} p_{m+4} + p_{m+1} p_{m+3} p_{m+5} - p_{m+3}^3 - p_{m+2}^2 p_{m+5} - p_{m+1} p_{m+4}^2
\end{aligned}$$

Die Methode des hoch geehrten Herrn Daniel Bernoulli ist auf das Prinzip gestützt, dass die vom Anfang hinreichend weit entfernten Terme einer rekurrenten Reihe wie die Terme einer geometrischen Reihe betrachtet werden können. Die in den vorherigen Ausführungen verallgemeinerte Methode nimmt nur an, dass die vom Anfang hinreichend weit entfernten Terme der rekurrenten Reihe näherungsweise den Termen einer anderen rekurrenten Reihe gleich sind, deren Relationsskala aus einer kleineren Anzahl an Termen besteht. Diese Skala und daher auch die Gleichung, deren Wurzeln den größten Wurzeln der vorgelegten Gleichung näherungsweise gleich sind, lässt sich also auch mit der Methode finden, welche vor einiger Zeit der illustre Herr Lagrange für das Finden des Gesetzes von rekurrenten Reihen in der Mitteilung *Recherches sur la manière de forme des tables des planètes d'après les seules obervations* vorgelegt hat. Natürlich, wenn wir die rekurrente Reihe, deren Relationsskala aus $n+1$ Termen besteht, festlegen vom Term p_m an mit einer anderen übereinzustimmen, deren Skala nur $k+1$ Terme hat, wollen wir

$$p_m + p_{m+1}y + p_{m+2}y^2 + \cdots + p_{m+2k-1}y^{2k-1} = s$$

setzen; es sei weiter

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s} &= a_1 + b_1 y + y^2 s_1, \\
\frac{1}{s_1} &= a_2 + b_2 y + y^2 s_2, \\
\frac{1}{s_2} &= a_3 + b_3 y + y^2 s_3, \\
\cdots & \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
\frac{1}{s_{k-1}} &= a_k + b_k y + y^2 s_k.
\end{aligned}$$

Wir wollen die Reihe s_1 bis hin zur Potenz y^{2k-3} fortsetzen, die Reihe s_2 bis hin zur Potenz y^{2k-5} und so weiter, bis schließlich die Reihe s_k ganz verworfen wird. Wenn man dann den Kettenbruch

$$\cfrac{1}{a_1 + b_1 y + \cfrac{y^2}{a_2 + b_2 y + \cfrac{y^2}{a_3 + b_3 y + \cfrac{\cdots}{\cdots + \cfrac{y^2}{a_k + b_k y}}}}}$$

in einen gewöhnlichen Bruch $\frac{P}{Q}$ umwandelt und im Nenner $y = \frac{1}{x}$ setzt, wird

$$Q = 0$$

die gesuchte Gleichung sein, deren Wurzeln $x = \frac{1}{y}$ den k größeren Wurzeln der vorgelegten Gleichung, $X = 0$, näherungsweise gleich sind. Ich bemerke aber, dass diese Methode wesentlich langwieriger ist als die der Elimination, welche ich oben vorgestellt habe: Denn beim Berechnen des Bruchs $\frac{P}{Q}$ gelangt man zu sehr komplizierten Ausdrücken, von welchen sich sehr viele Terme erst am Ende der Rechnung gegenseitig aufheben, während man durch Elimination sofort zu einfachen Ausdrücken gelangt.

In gänzlich gleicher Art und Weise lassen sich die kleinsten Wurzeln der vorgelegten Gleichung finden; dieses Problem wird durch Setzen von $x = \frac{1}{y}$ auf das vorhergehende zurückgeführt; denn die größten Wurzeln der transformierten Gleichung sind die reziproken Werte der kleinsten Werte der vorgelegten Gleichung. Wenn man also mit der zuvor verallgemeinerten Bernoulli'schen Methode alle Wurzeln der vorgelegten Gleichung finden möchte, sind nur zwei Gleichungen ausfindig zu machen, von denen die eine die k größten, die andere die $n - k$ kleinsten darbietet; und wenn k oder $n - k$ noch zu große Zahlen sind als dass die Lösung mit strengen Methoden geleistet werden kann, lassen sich die einzelnen Gleichungen wiederum auf dieselbe Weise behandeln wie die vorgelegte, bis man schließlich zu den einzelnen Wurzeln der vorgelegten Gleichung oder zu einem hinreichend herabgesenkten Grad der Gleichung gelangt.

Geschrieben am 9. Dezember im Jahr 1834