Beweis des Fermat'schen Lehrsatzes, dass jede Primzahl der Form $4n + 1$ die Summe zweier Quadrate ist *

Leonhard Euler

§1 Nachdem ich neulich die Zahlen betrachtet hatte, die aus der Addition zweier Quadrate entspringen, habe ich mehrere Eigenschaften bewiesen, mit denen solche Zahlen versehen sind; und dennoch war es nicht möglich, meine Gedanken bis dorthin zu führen, dass ich die Gültigkeit dieses Lehrsatzes, welchen Fermat einst den Geometern zu beweisen vorgelegt hat, schick zu beweisen gekonnt hätte. Ich habe dennoch damals einen Beweisversuch dargelegt, woher die Gewissheit dieses Lehrsatzes sich um Vieles glänzender zeigt, auch wenn er von den Kriterien eines strengen Beweises keine Unterstützung erfährt, und ich habe nicht gezweifelt, dass, indem denselben Spuren gefolgt wird, schließlich der gewünschte Beweis leichter erhalten werden kann; es ist mir selbst freilich dies zu der Zeit passiert, so dass jener Versuch, wenn eine andere gewisse leichte Beobachtung hinzukommt, in einen strengen Beweis übergeht. Ich kann mich freilich nicht rühmen, bei dieser Sache etwas Neues geleistet zu haben, weil Fermat sich offenlich bekennt, schon einen Beweis dieses Lehrsatzes gefunden zu haben; aber weil er ihn nie öffentlich gemacht hat, hat sein Verlust genauso wie der vieler anderer außerordentlicher gefundener

*Originaltitel: „Demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum primum formae 4n+1 esse summam duorum quadratorum“, erstmals publizert in „Novi commentarii academicae scientarium Petropolitanae 5, 1760, pp 3-13“, Nachdruck in „Opera Omnia: Series 1, Volume 2, pp. 328 - 337“ und „Commentat. arithm. 1, 1849, pp. 210-215 [E241a]“, Eneström Nummer E241, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Jens Becker, im Ramen des Hauptseminars „Euler“ 2013/14

Dinge dieses Heroen bewirkt, dass, was wir nun erst von dieser verlorenen Sachen wiederverlangen, nicht ein Unrecht für neue gefundene Dinge gehalten werden. Weil nämlich niemand so glücklich in die Geheimnisse der Zahlen eingedrungen ist wie Fermat, scheint jede Mühe beim Weiterentwickeln dieser Wissenschaft vergebens aufgebracht zu werden, wenn nicht zuvor, was von diesem vortrefflichem Herrn schon gefunden worden sind, quasi von neuem ans Licht gebracht werden. Auch wenn nämlich nach ihm viele gelehrte Herren in dieser Art von Studien ihre Kräfte erprobt haben, haben sie dennoch meist nicht erreicht, was mit dem Genius dieses Herren verglichen werden könnte.

§2 Um aber den Beweis des Lehrsatzes, welchen ich hier betrachte, zu führen, ist es von Nöten, dass zwei Propositionen zur Hilfe genommen werden, deren Beweis ich schon anderenortes gegeben habe. Die eine ist die, dass alle Zahlen, die Teiler einer Summe zweier einander primer Quadrater sind, selbst die Summe zweier Quadrate sind; wenn so a und b zueinander prim sind und ein Teiler der aus ihnen gebildeten Zahl $aa + bb$ d ist, wird auch d die Summe zweier Quadrate sein; ich habe den Beweis dieses Lehrsatzes in der zuvor erwähnten Schrift gegeben, in welcher ich Zahlen, die Summe zweier Quadrate sind, betrachtet habe. Die andere Proposition, welcher der folgende Beweis bedarf, verhält sich so: Wenn p eine Primzahl ist und a und b irgendwelche durch p nicht teilbare Zahlen, wird immer $a^{p-1} - b^{p-1}$ durch die Primzahl p teilbar sein; den Beweis dieser Sache habe ich schon vor langer Zeit in den „Nov. comment. acad. Petrop. tom. I." gegeben.

§3 Wenn daher nun $4k + 1$ eine Primzahl ist, werden durch sie alle in dieser Form $a^{4n} - b^{4n}$ enthaltenen Zahlen teilbar sein, wenn freilich keine der beiden Zahlen a und b durch $4n + 1$ teilbar war. Daher, wenn a und b kleinere Zahlen als $4n + 1$ (die Null dennoch ausgenommen) sind, wird die daher gebildete Zahl $a^{4n} - b^{4n}$ ohne jegliche Einschränkung durch die vorgelegte Primzahl $4n + 1$ teilbar sein. Weil aber $a^{4n} - b^{4n}$ das Produkt dieser Faktoren $a^{2n} + b^{2n}$ und $a^{2n} - b^{2n}$ ist, ist es notwendig, dass einer der beiden dieser Faktoren durch $4n + 1$ teilbar ist; es kann nämlich nicht geschehen, dass entweder keiner der beiden oder jeder der beiden zugleich den Teiler $4n + 1$ hat. Wenn daher nun bewiesen werden könnte, dass Fälle gegeben sind, in denen die Form $a^{2n} + b^{2n}$ durch $4n + 1$ teilbar ist, weil ja $a^{2n} + b^{2n}$ wegen des geraden Exponenten $2n$ die Summe zweier Quadrate ist, von denen keiner der beiden einzeln durch $4n + 1$ teilbar ist, würde daher folgen, dass diese Zahl $4n + 1$ die Summe zweier Quadrate ist.

§4 Aber die Summe $a^{2n} + b^{2n}$ wird sooft durch $4n + 1$ teilbar sein, wie die Differenz $a^{2n} - b^{2n}$ durch dieselbe Zahl nicht teilbar ist. Daher ist der, der verneint hat, dass eine Primzahl $4n + 1$ die Summe zweier Quadrate ist, gezwungen zu verneinen, dass eine Zahl von dieser Form $a^{2n} + b^{2n}$ durch $4n + 1$ teilbar ist; es ist aber deshalb von Nöten, dasselbe zu bestätigen, dass alle in dieser Form $a^{2n} - b^{2n}$ enthaltenen Zahlen durch $4n + 1$ teilbar sind, wenn freilich weder a noch b durch $4n + 1$ teilbar ist. Deswegen habe ich hier zu beweisen, dass nicht alle in dieser Form $a^{2n} - b^{2n}$ enthaltenen Teiler durch $4n+1$ teilbar sind; wenn ich dieses nämlich geleistet haben werde, wird es gewiss sein, dass Fälle oder für a und b einzusetzende Zahlen gegeben sind, durch welche die Form $a^{2n}-b^{2n}$ nicht durch $4n+1$ teilbar ist; in jenen Fällen wird also die andere Form $a^{2n}+b^{2n}$ notwendig durch $4n+1$ teilbar sein. Daher weil a^{2n} und b^{2n} Quadratzahlen sind, wird das zustande gebracht werden, was vorgelegt wird, natürlich, dass jede Zahl $4n+1$ die Summe zweier Quadrate ist.

§5 Um also zu beweisen, dass nicht alle in dieser Form $a^{2n}-b^{2n}$ enthaltenen Zahlen oder nicht alle Differenzen zwischen zwei Potenzen des Exponenten $2n$ durch $4n+1$ teilbar sind, werde ich die Reihe dieser Potenzen von der Einheit an bis hin zu der betrachten, die von der Wurzel $4n$ gebildet werden,

$$1, 2^{2n}, 3^{2n}, 4^{2n}, 5^{2n}, 6^{2n}, ..., (4n)^{2n} \tag{1}$$

und ich sage nun, dass nicht alle Differenzen zwischen je zwei Termen dieser Reihe durch $4n+1$ teilbar sind. Wenn nämlich die einzelnen ersten Differenzen

$$2^{2n}-1, 3^{2n}-2^{2n}, 4^{2n}-3^{2n}, 5^{2n}-4^{2n}, ..., (4n)^{2n}-(4n-1)^{2n} \tag{2}$$

durch $4n+1$ teilbar wären, wären auch die Differenzen dieser Progression, die die zweiten Differenzen jener Reihe sind, durch $4n+1$ teilbar; und desselben Grundes wegen wären die dritten, vierten, fünften etc. Differenzen alle durch $4n+1$ teilbar und schließlich auch die Differenzen der Ordnung $2n$, die, wie bekannt ist, einander alle gleich sind. Aber die Differenz der Ordnung $2n$ sind $= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot 2n$, die also durch die Primzahl $4n+1$ nicht teilbar sind, woher umgekehrt folgt, dass nicht einmal alle ersten primen Differenzen durch $4n+1$ teilbar sind.

§6 Damit die Kraft dieses Beweises besser erkannt wird, ist es anzumerken, dass die Differenz der Ordnung $2n$ aus $2n+1$ Termen der vorgelegten Reihe hervorgebracht wird, die, wenn sie vom Anfang aus genommen werden, alle so beschaffen sind, dass die Differenzen von je zweien durch $4n+1$ teilbar sein müssen, wenn die Gültigkeit des Lehrsatzes verneint wird. Wenn aber mehr Terme, um diese letzte Differenz festzulegen, zusammenliefen und sie über den Term $(4n)^{2n}$ hinaus fortschritten, weil sich ja vom folgenden Term $(4n+1)^2$ aus entspringenden Differenzen sich auf die behaupteten Dinge des Lehrsatzes nicht beziehen, behielte der Beweis keine Kraft bei. Daher aber, weil die letzte Differenz, welche wir betrachtet haben, nur von

$2n+1$ Termen abhängt, ist die Folgerung, welche wir daher abgeleitet haben, vollkommen legitim; und daher folgt, dass prime Differenzen gegeben sind, wie beispielsweise $a^{2n}-(a-1)^{2n}$, die nicht durch $4n+1$ teilbar sind und zwar so, dass a nicht größer als $2n+1$ ist. Daher wird aber weiter rechtens eingebracht, dass die Summe $a^{2n}+(a-1)^{2n}$ und daher die Summe der zwei Quadrate notwendig durch $4n+1$ teilbar ist und daher die Primzahl $4n+1$ eine Summe zweier Quadrate ist.

§7 Weil ja die Differenz der Ordnung $2n$ von $2n+1$ Termen der Reihe der Potenzen abhängt, wollen wir nur genauso viele vom Anfang aus genommen betrachten

$$1, 2^{2n}, 3^{2n}, 4^{2n}, 5^{2n}, 6^{2n}, ...(2n)^{2n}, (2n+1)^{2n} \tag{3}$$

woher die ersten Differenzen sein werden

$$2^{2n}-1, 3^{2n}-2^{2n}, 4^{2n}-3^{2n}, 5^{2n}-4^{2n}, ..., (2n+1)^{2n}-(2n)^{2n} \tag{4}$$

die Anzahl der Terme welcher Progression $=2n$ ist. Aus dem vorhergehenden Beweis tritt es zutage, dass nicht alle Terme dieser Progression der Differenzen durch die Primzahl $4n+1$ teilbar sind; und dennoch sehen wir daher nicht ein, wie viele und welche jene durch $4n+1$ nicht teilbare Terme sind. Für den Beweis genügt es nämlich, wenn nur ein einziger Term, welcher auch immer es ist, durch $4n+1$ nicht teilbar ist. Wenn wir daher aber spezielle Fälle entwickeln wollen, in denen $4n+1$ eine Primzahl ist, werden wir aus diesen Differenzen, deren Anzahl $2n$ ist, auffinden, dass immer die Hälfte durch $4n+1$ teilbar ist, die andere Hälfte hingegen nicht teilbar ist; auch wenn diese Beobachtung sich nicht auf die Kraft des Beweises bezieht, trägt sie dennoch, um sie ans Licht zu bringen, nicht wenig bei, woher es förderlich sein wird, einige spezielle Fälle auf die Untersuchung zurückbezogen zu haben.

§8 Die kleinste Primzahl $4n+1=5$, die entspringt, wenn $n=1$ ist; daher wird man die zwei Differenzen 2^2-1 und 3^2-2^2 haben, deren erste nicht durch 5 teilbar ist, die zweite hingegen teilbar ist. Für die übrigen Fälle wollen wir das Zeichen d gebrauchen, um die Differenzen anzuzeigen, die teilbar sind, aber mit dem Zeichen O wollen wir die kennzeichnen, die nicht teilbar sind; diese Zeichen wollen wir für jeden Fall unter die Differenzen schreiben:

4n+1	Differenzen					
13	2^6-1	3^6-2^6	4^6-3^6	5^6-4^6	6^6-5^6	7^6-6^6
	O	O	d	O	d	d
17	2^8-1	3^8-2^8	4^8-3^8	5^8-4^8		
	d	O	O	O		
	6^8-5^8	7^8-6^8	8^8-7^8	9^8-8^8		
	d	d	O	d		
29	$2^{14}-1$	$3^{14}-2^{14}$	$4^{14}-3^{14}$	$5^{14}-4^{14}$	$6^{14}-5^{14}$	
	O	d	O	d	d	
	$7^{14}-6^{14}$	$8^{14}-7^{14}$	$9^{14}-8^{14}$	$10^{14}-11^{14}$	$11^{14}-10^{14}$	
	d	O	O	O	d	
	$12^{14}-11^{14}$	$13^{14}-12^{14}$	$14^{14}-13^{14}$	$15^{14}-14^{14}$		
	d	O	O	d		

Daher tritt es klar zutage, dass die teilbaren und nichtteilbaren Terme in keinem bestimmten Gesetz enthalten sind, auch wenn beide von der Menge sind; dennoch ist es per se klar, dass der letzte Term $(2n+1)^{2n}-(2n)^{2n}$ immer durch $4n+1$ teilbar ist, weil er den Faktor $(2n+1)^2-4nn=4n+1$ hat; aber über die übrigen kann nichts Gewisses festgelegt werden.

§9 Weiter ist es auch von Nöten, um die Kraft des Beweises vollständiger zu erkennen, bemerkt zu werden, dass dieser Beweis nur dann Geltung hat, wenn die Zahl $4n+1$ prim ist, völlig wie es die Natur des Lehrsatzes erfordert. Denn wenn $4n+1$ keine Primzahl wäre, könnte über sie weder versichert werden, dass sie die Summe zweier Quadrate ist, noch wäre die Form $a^{4n}-b^{4n}$ notwendig durch sie teilbar. Ja sogar die letzte Schlussfolgerung wäre falsch, in welcher wir ausgesprochen haben, dass jene Differenzen der Ordnung $2n$, die $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot..\cdot2n$ sind, nicht durch $4n+1$ teilbar sind. Wenn nämlich $4n+1$ keine Primzahl wäre, sondern Faktoren hätte, welche kleiner als $2n$ wären, dann enthielte natürlich das Produkt $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot..\cdot2n$ diese Faktoren und wäre deshalb durch $4n+1$ teilbar. Aber wenn $4n+1$ eine Primzahl ist, ist es erst dann möglich zu bestätigen, dass das Produkt $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot..\cdot2n$ klarerweise nicht durch $4n+1$ teilbar ist, weil dieses Produkt durch keine anderen Zahlen geteilt werden kann, außer die als Faktoren in jenes eingehen.

§10 Weil schließlich der gegebene Beweis auf dieses Fundament gestützt ist, dass die Differenzen der Ordnung $2n$ der Reihe der Potenzen $1, 2^{2n}, 3^{2n}, 4^{2n}$ etc konstant und alle $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot .. \cdot 2n$ sind, scheint dies umfassender zu erklären auch es überall verstreut in Büchern der Analysis solide dargelegt aufgefunden wird. Zuerst ist es also anzumerken, wenn der allgemeine Term irgendeiner Reihe, oder der, der dem unbestimmten Index n entspricht, $= Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3}+$etc, dass diese Reihe zum Grad m gezählt wird, weil m der Exponent der größten Potenz von x ist. Darauf, wenn dieser allgemeine Term von folgenden $A(x+1)^m + B(x+1)^{m-1} + C(x+1)^{m-2}+$ etc. subtrahiert wird, wird der allgemeine Terme der Differenzen hervorgehoben, in welchem der Exponent der höchsten Potenz von $x = m-1$ sein wird, und daher wird sich die Reihe der Differenzen auf den geringen Grad $m-1$ beziehen. Auf die gleiche Weise wird aus dem allgemeinen Term der Reihe der ersten Differenzen der allgemeine Term der Reihe der zweiten Differenzen erschlossen werden, welcher sich also auf den niederer gelegenen Grad $m-2$ beziehen wird.

§11 So, wenn die vorgelegte Reihe auf den Grad m bezogen wird, wird die Reihe der ersten Differenzen auf den Grad $m-1$ bezogen werden, die Reihe der zweiten Reihe weiter auf den Grad $m-2$, die Reihe der dritten auf den Grad $m-3$, die Reihe der vierten Differenzen auf den Grad $m-4$ und im Allgemeinen wird sich die Reihe der Differenzen der Ordnung n auf den Grad $m-n$ beziehen. Daher werden die Reihen der Differenzen der Ordnung m zum Grad $m-m=0$ gelangen und ihr allgemeiner Term, weil die höchste Potenz von $x = x^0 = 1$ ist wird also eine Konstante Größe sein und daher werden alle Differenzen der Ordnung m einander gleich sein. Daher sind schon die ersten Differenzen der Reihen ersten Grades, deren allgemeiner Term $= Ax + B$ ist, einander gleich, aber die zweiten Differenzen der Reihen zweiten Grades, die in diesem allgemeinen Term $Ax^2 + Bx + C$ enthalten sind, sind gleich, und so weiter.

§12 Wenn wir also irgendeine Reihe von Potenzen betrachten

$$1, 2^m, 3^m, 4^m, 5^m, 6^m, 7^m, 8^m etc. \tag{5}$$

deren allgemeiner Term m oder der, der dem Index x entspricht, $= x^m$ ist, wird die Reihe der Differenzen der Ordnung m aus einander gleichen Termen bestehen. Aber der allgemeine Term der Reihe der ersten Differenzen wird sein

$$(x+1)^m - x^m \tag{6}$$

dieser wird vom folgenden $(x+2)^m - (x+1)^m$ subtrahiert den allgemeinen Term der Reihe der zweiten Differenzen geben, der sein wird

$$(x+2)^m - 2(x+1)^m + x^m \tag{7}$$

Daher wird weiter der allgemeine Term der Reihe der dritten Differenzen sein

$$(x+3)^m - 3(x+2)^m + 3(x+1)^m - x^m \tag{8}$$

und schließlich wird der allgemeine Term der Reihe der Differenzen der Ordnung m gefolgert

$$\begin{aligned}(x+m)^m - m(x+m-1)^m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(x+m-2)^m \\ -\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(x+m-3)^m + etc.\end{aligned} \tag{9}$$

Weil diese Größe konstant ist, wird sie dieselbe sein, welche Zahl auch immer für x eingesetzt wird; es wird also entweder sein

$$m^m - m(m-1)^m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(m-2)^m - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-3)^m + etc. \tag{10}$$

oder

$$(m+1)^m - mm^m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(m-1)^m - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-2)^m + etc. \tag{11}$$

Wo wir in der erstem Form $x = 0$ gesetzt haben, in der zweiten $x = 1$.

§13 Wir wollen nun spezielle Fälle dieser Reihe entwickeln und von den kleinsten Potenzen zu höheren aufsteigen. Und nachdem zuerst $m = 1$ festgelegt worden ist, wird der allgemeine Term der ersten Differenzen der Reihe $1, 2, 3, 4, 5, 6$ etc. der sein
entweder $1^1 - 1\cdot 0 = 1$ oder $2^1 - 1\cdot 1^1 = 1$ Wenn $m = 2$ ist, sind die zweiten Differenzen der Reihe $1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2 etc$

entweder $2^2 - 2 \cdot 1^2$ oder $3^2 - 2 \cdot 2^2 + 1 \cdot 1^2$
aber es ist $2^2 - 2 \cdot 1^2 = 2(2^1 - 1 \cdot 1^1)$, woher die zweiten Differenzen sind

$$= 2 - 1 \tag{12}$$

Es sei $m = 3$ und die dritten Differenzen der Reihe $1, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3$ etc werden sein
entweder $3^3 - 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 1^3$ oder $4^3 - 3 \cdot 3^3 + 3 \cdot 2^3 - 1 \cdot 1^3$
aber es ist $3^3 - 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 1^3 = 3(3^2 - 2 \cdot 2^2 + 1 \cdot 1^2) = 3 \cdot 2 \cdot 1$ weil aus dem vorhergehenden Fall $3^2 - 2 \cdot 2^2 + 1 \cdot 1^2 = 2 \cdot 1$ ist. Auf die gleiche Weise, wenn $m = 4$ ist, werden die vierten Differenzen der Reihe $1, 2^4, 3^4, 4^4, 5^4$ etc sein entweder $4^4 - 4 \cdot 3^4 + 6 \cdot 2^4 - 4 \cdot 1^4$ oder $5^4 - 4 \cdot 4^4 + 6 \cdot 3^4 - 4 \cdot 2^4 + 1 \cdot 1^4$ aber es ist
$4^4 - 4 \cdot 3^4 + 6 \cdot 2^4 - 4 \cdot 1^4 = 4(4^3 - 3 \cdot 3^3 + 3 \cdot 2^3 - 1 \cdot 1^3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

§14 Damit dieses Fortschreiten besser erkannt wird, seien die Differenzen der Ordnung m der Reihe $1, 2^m, 3^m, 4^m, 5^m, etc = P$, die Differenzen der Ordnung $m+1$ der Reihe $1, 2^{m+1}, 3^{m+1}, 4^{m+1}, 5^{m+1}, etc = Q$; es wird sein
$P = (m+1)^m - mm^m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}(m-1)^m - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(m-2)^m + etc$
$Q = (m+1)^{m+1} - (m+1)m^{m+1} + \frac{(m+1)m}{1 \cdot 2}(m-1)^{m+1} - \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(m-2)^{m+1} + etc$
wo wir P aus der zweiten Form, aber Q aus der ersten Form ausgedrückt haben. Hier tritt es zuerst klar zutage, dass in jedem der beiden Ausdrücke, die Anzahl der Terme gleich ist und die einzelnen Terme des Ausdruckes P zu den einzelnen Termen des Ausdruckes Q wie 1 zu $m+1$ sind. Denn es ist
$(m+1)^m : (m+1)^{m+1} = 1 : m+1$
$mm^m : (m+1)m^{m+1} = 1 : m+1$
$\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}(m-1)^m : \frac{(m+1)m}{1 \cdot 2}(m-1)^{m+1} = 1 : m+1$
$\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(m-2)^m : \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(m-2)^{m+1} = 1 : m+1$
etc.
Dieser Sache wegen wird sein
$P : Q = 1 : m+1$ und daher $Q = (m+1)P$

§15 Daher tritt es also klar zutage, dass sein werden

der Reihe	die ... Differenzen
$1, 2, 3, 4, 5$, etc.	ersten $= 1$
$1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2$, etc.	zweiten $= 1 \cdot 2$
$1, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3$, etc.	dritten $= 1 \cdot 2 \cdot 3$
$1, 2^4, 3^4, 4^4, 5^4$, etc.	vierten $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$
.	
.	
$1, 2^m, 3^m, 4^m, 5^m$, etc.	der Ordnung m $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m$
also $1, 2^{2n}, 3^{2n}, 4^{2n}, 5^{2n}$, etc.	der Ordnung 2n $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2n$

und so haben wir auch bewiesen, dass die Differenzen der Ordnung $2n$ der Reihe der Potenzen $1, 2^{2n}, 3^{2n}, 4^{2n}, 5^{2n}$ etc. nicht nur konstant sind, sondern auch dem Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2n$ gleich wird, wie wir im Beweis des vorgelegten Lehrsatzes angenommen haben.