

Beispiel. Wir betrachten $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]_d$, homogen, vom Grad d und die dazugehörige projektive Kurve $\mathcal{C} = \mathcal{V}(F) = \{(x : y : z) \mid F(x, y, z) = 0\}$:

Dann gibt es folgende zwei Bestandteile:

- die affine Kurve $C = \mathcal{C} \cap (\mathbb{P}^2 \setminus \ell_\infty) = V(F(x, y, 1))$
- die unendlichen Punkte $\mathcal{C} \cap \ell_\infty$ (asymptotische Richtungen);
mit $f = f_0 + f_1 + \dots + f_d$ gilt: $F = 0, z = 0 \Leftrightarrow f_d(x, y) = 0$

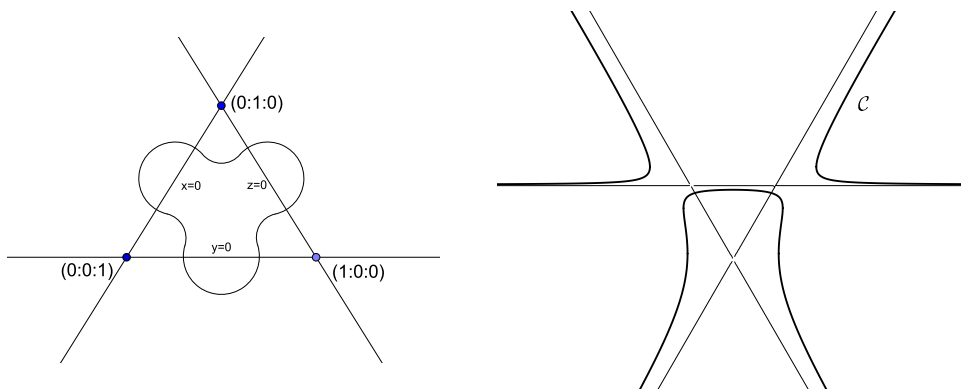


Abbildung 4.1: Zwei Beispiele projektiver Kurven

Alle Begriffe der vorigen Kapitel über affine Kurven lassen sich auf projektive Kurven übertragen:

- $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_n$ Zerlegung in irreduzible Kurven $\mathcal{C}_i = \mathcal{V}(F_i)$, wobei die F_i die irreduziblen Faktoren von F sind
- Reduzierte Gleichung: $Grad(\mathcal{C})$
- Singuläre Punkte, Multiplizität $Mult_P(\mathcal{C})$
- Schnittmultiplizität $I(\mathcal{C}, \mathcal{D}; P)$ ist wohldefiniert

Beispiel. $f = y - x^3$
 $F = f^H = yz^2 - x^3$ die Homogenisierung von f

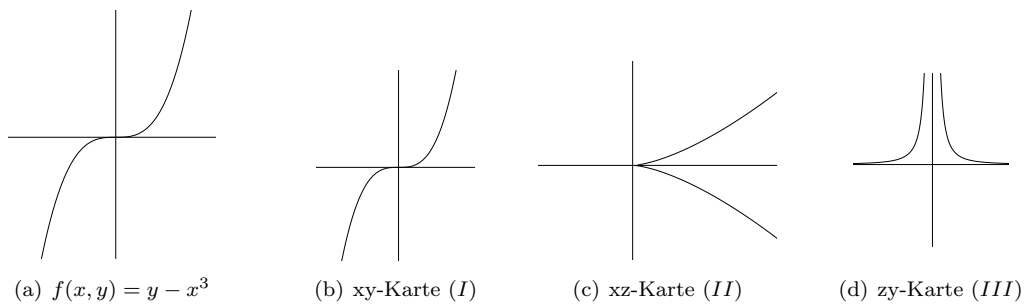


Abbildung 4.2: Die Funktion $f(x, y) = y - x^3$ und ihre Homogenisierung $f^H = F(x, y, z) = yz^2 - x^3$ in drei Karten dargestellt.

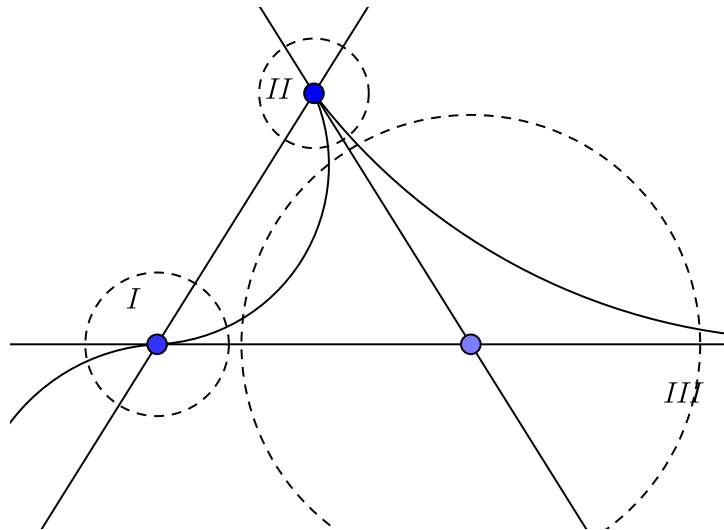


Abbildung 4.3: Projektive Darstellung aller drei Karten der Homogenisierung $F(x, y, z) = yz^2 - x^3$.

4.5 Satz von Bézout

Satz (Satz von Bézout). *Es seien $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subset \mathbb{P}^2$ projektive Kurven mit $|\mathcal{C} \cap \mathcal{D}| < \infty$. Dann gilt*

$$\sum_{P \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}} I(\mathcal{C}, \mathcal{D}; P) = \text{Grad}(\mathcal{C}) * \text{Grad}(\mathcal{D})$$

Beweis. Die Formel ist unabhängig vom Koordinatensystem, daher können wir oBdA voraussetzen, dass $(0 : 1 : 0) \notin \mathcal{C}, \notin \mathcal{D}, \notin |P, Q|$, wobei $|P, Q|$ die Gerade durch die Punkte $P, Q \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ ist.

Projiziere nun die endlich vielen Schnittpunkte von \mathcal{C} und \mathcal{D} aus dem Punkt $(0 : 1 : 0)$ auf die

Gerade $\mathcal{V}(Y) \subset \mathbb{P}^2$:

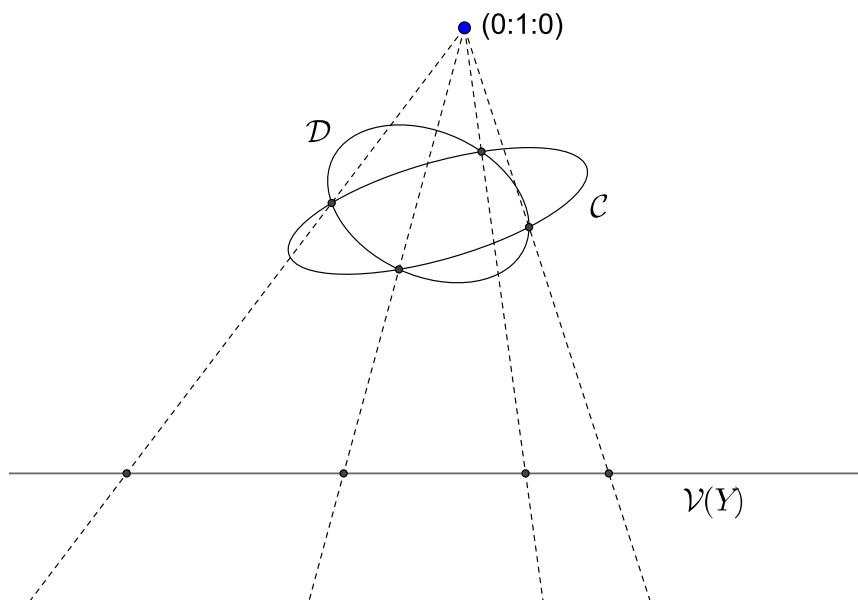


Abbildung 4.4: Projektion der endlich vielen Schnittpunkte von \mathcal{C} und \mathcal{D} auf die Gerade $\mathcal{V}(Y) \subset \mathbb{P}^2$.

Nach der Voraussetzung $(0 : 1 : 0) \notin |P, Q|$ haben je zwei verschiedene Punkte $P, Q \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ auch verschiedene Projektionspunkte.

Sei nun

$$\mathcal{C} : F = a_0 y^d + a_1(x, z) y^{d-1} + \cdots + a_d(x, z)$$

$$\mathcal{D} : G = b_0 y^e + b_1(x, z) y^{e-1} + \cdots + b_e(x, z)$$

Dann gilt

$$F(0 : 1 : 0) = a_0 \neq 0, \quad a_i(x, z) \in \mathbb{C}[X, Z]$$

$$G(0 : 1 : 0) = b_0 \neq 0, \quad b_i(x, z) \in \mathbb{C}[X, Z]$$

Wie im Affinen gilt auch im projektiven Fall $Ord_{P'}(R_{F,G}) = I(\mathcal{D}; P)$ und somit

$$\sum I(\mathcal{C}, \mathcal{D}; P) = \sum Ord_{P'}(R_{F,G}) = Grad(R_{F,G}) = d \cdot e = Grad(\mathcal{C}) \cdot Grad(\mathcal{D})$$

□

Beispiel (Rätsel).

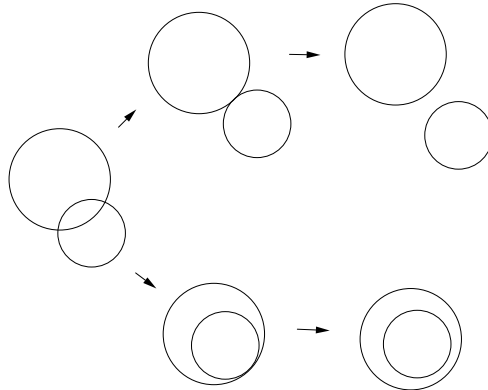


Abbildung 4.5: Die Entwicklung der Schnittpunkte zweier Kreise bei Verschiebungen der Kreise.

Betrachte also:

$$f(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0, \text{ hier ist } \mathcal{C} \subset \mathbb{A}^2$$

$$F(x, y, z) = (x - az)^2 + (y - bz)^2 - r^2 z^2 = 0, \text{ hier ist } \mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$$

$$\mathcal{C} \cap \ell_\infty : \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Daraus ergeben sich die zwei Kreispunkte Isaac $I = (1 : i : 0)$ und Jacob $J = (1 : -i : 0)$. Kreise sind also Kurven von Grad zwei durch die zwei Kreispunkte. Und zwei Kreise schneiden sich in I & J und in zwei weiteren Punkten.

4.6 Singularitäten und Tangenten

Im Affinen: $C = V(f)$ Kurve mit reduzierter Gleichung

Die Menge aller singulären Punkte $\Sigma := \text{Sing}(C)$ ergibt sich aus

$$(a, b) \in \Sigma \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_x f(a, b) = 0 \\ \partial_y f(a, b) = 0 \\ f(a, b) = 0 \end{cases} .$$

Die Tangente an C im Punkt $P = (a, b)$ ist gegeben durch

$$T_P C : (x - a)\partial_x f(a, b) + (y - b)\partial_y f(a, b) = 0.$$

Proposition. Es sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ eine projektive Kurve $\mathcal{C} = \mathcal{V}(F)$.

1. Die singulären Punkte von \mathcal{C} sind Lösungen der Gleichungen $\partial_x F = \partial_y F = \partial_z F = 0$, das heißt $\Sigma_{\mathcal{C}} = \mathcal{V}(\partial_x F, \partial_y F, \partial_z F)$.

NB: Betrachten wir $x\partial_x F + y\partial_y F + z\partial_z F = d \cdot F$ (Euler-Gleichung), dann gilt

$$\partial_x F(P) = \partial_y F(P) = \partial_z F(P) = 0 \Rightarrow F(P) = 0.$$

2. Ist $P \in \mathcal{C} \setminus \Sigma$, so ist $\mathcal{V}(x\partial_x F(P) + y\partial_y F(P) + z\partial_z F(P))$ projektiver Abschluss von $T_P C$.

Beweis. Ist $f(x, y) = 0$ eine Gleichung für C , dann ist nach der Formel für die Homogenisierung $f^H = F(x, y, z) = z^d f(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$ eine Gleichung für \mathcal{C} . Es gilt

$$\begin{aligned}\partial_x F(x, y, z) &= z^{d-1} \partial_x f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \\ \partial_y F(x, y, z) &= z^{d-1} \partial_y f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \\ \partial_z F(x, y, z) &= dz^{d-1} f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) + z^d \left(-\frac{x}{z^2} \partial_x f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) - \frac{y}{z^2} \partial_y f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)\right).\end{aligned}$$

Ab jetzt betrachten wir $P = (a : b : 1)$. (Dies darf nach einer Koordinatentransformation immer angenommen werden!) Es gilt

$$\begin{cases} \partial_x F(P) = \partial_x f(a, b) \\ \partial_y F(P) = \partial_y f(a, b) \end{cases} \\ \partial_z F(P) = df(a, b) - a\partial_x f(a, b) - b\partial_y f(a, b). \quad (\text{Euler Formel})$$

Wir betrachten nun die Tangentengleichung $T_{(a,b)}C$ in (a, b) :

$$\begin{aligned}0 &= (x - a)\partial_x f(a, b) + (y - b)\partial_y f(a, b) \\ \Leftrightarrow 0 &= x\partial_x f(a, b) + y\partial_y f(a, b) - a\partial_x f(a, b) - b\partial_y f(a, b) \\ \Leftrightarrow 0 &= x\partial_x F(P) + y\partial_y F(P) + \partial_z F(P).\end{aligned}$$

Homogenisieren führt zu

$$x\partial_x F(P) + y\partial_y F(P) + z\partial_z F(P) = 0.$$

□

Beispiel. 1. $F(x, y, z) = z^2y - x^3$ (siehe auch früheres Beispiel)

$$\begin{cases} 0 = \partial_x F(x, y, z) = -3x^2 \\ 0 = \partial_y F(x, y, z) = z^2 \\ 0 = \partial_z F(x, y, z) = 2yz \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow (0 : 1 : 0) \in \Sigma$$

2. $F(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 = 0$ ist glatt

$$\begin{cases} 0 = \partial_x F(x, y, z) = 4x^3 \\ 0 = \partial_y F(x, y, z) = 4y^3 \\ 0 = \partial_z F(x, y, z) = 4z^3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \Sigma = \emptyset$$

4.7 Polare einer Kurve bezüglich $P \in \mathbb{P}^2$

Beispiel (Einführendes Beispiel).

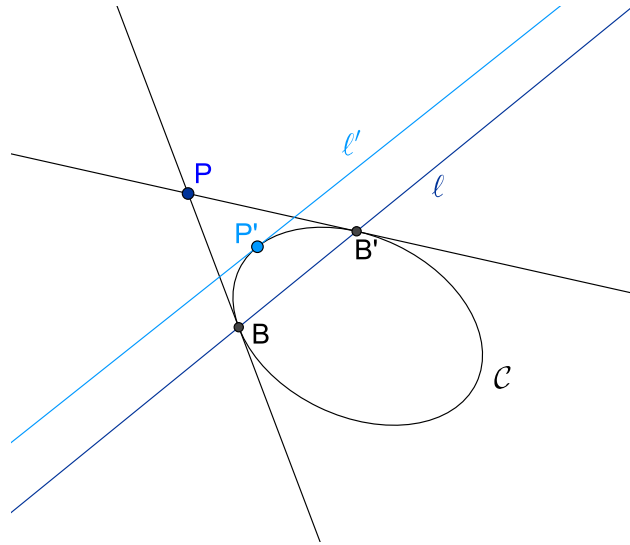


Abbildung 4.6: Polare ℓ von \mathcal{C} bezüglich P , sowie Polare ℓ' von \mathcal{C} bezüglich P' .

\mathcal{C} sei eine Quadrik, $P \in \mathbb{P}^2$ ein Punkt mit $P \notin \mathcal{C}$. Durch P lassen sich zwei Tangenten an \mathcal{C} anlegen, deren Berührungspunkte wir mir $B, B' \in \mathcal{C}$ bezeichnen.

Die *Polare* von \mathcal{C} bezüglich P ist hier die Verbindungsgerde ℓ von B und B' . Ist $P' \in \mathcal{C}$, so wird die Polare zur Tangente an \mathcal{C} in P' .

Eine formale Definition der Polaren ist in Definition 4.7 zu finden.

Frage: Wie viele Tangenten kann man hier durch P an \mathcal{C} anlegen?

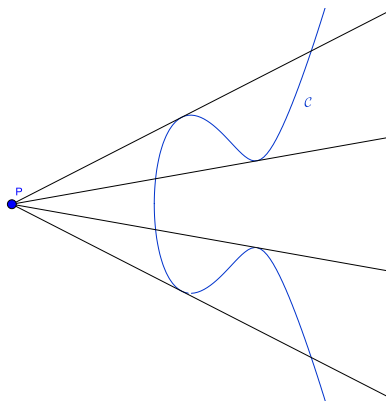


Abbildung 4.7: Anregung: Wie viele Tangenten können durch P an die Kurve \mathcal{C} angelegt werden?

Aus dem Bild wird ersichtlich, dass es mindestens vier sind. Später sehen wir, dass man sogar sechs Tangenten findet.

Definition. Seien $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]_d$ und $P = (a, b, c)$. Dann ist

$$\nabla_P F := a\partial_x F(x, y, z) + b\partial_y F(x, y, z) + c\partial_z F(x, y, z) = "(P \cdot \nabla F)" \in \mathbb{C}[X, Y, Z]_{d-1}.$$

Bemerkung. $\nabla_P F$ kann das Nullpolynom sein. OBdA sei $P = (1, 0, 0)$, dann gilt

$$\begin{aligned} \nabla_P F \equiv 0 &\Leftrightarrow \partial_x F(x, y, z) \equiv 0 \\ &\Leftrightarrow x \text{ kommt nicht vor, also } F \in \mathbb{C}[Y, Z]_d \end{aligned}$$

Dann ist $\mathcal{V}(F)$ die Vereinigung aller Geraden durch P . ("Stern")

Definition (Polare). Es seien $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ eine Kurve, $P \in \mathbb{P}^2$ und \mathcal{C} nicht ein "Stern" mit Zentrum P . Dann heißt

$$\nabla_P \mathcal{C} = \mathcal{V}(\nabla_P F)$$

Polare von \mathcal{C} bezüglich P .

Proposition. \mathcal{C} und $\nabla_P \mathcal{C}$ haben keine gemeinsamen Komponenten.

Beweis. Sei F die reduzierte Gleichung für \mathcal{C} und oBdA $P = (1, 0, 0)$.

Angenommen $F = G \cdot H$ mit H irreduzibel und $H | \partial_x F$. Dann ist $\partial_x F = \partial_x G \cdot H + G \cdot \partial_x H$. Falls $H | \partial_x F$ gilt also insbesondere auch $H | G \cdot \partial_x H$.

Es gilt aber H irreduzibel und $\text{Grad}(\partial_x H) < \text{Grad}(H)$

$\Rightarrow H | G \Rightarrow H^2 | F$.

⚡ zur Reduziertheit von F . □

Folgerung. Der Satz von Bézout sagt, dass sich \mathcal{C} und $\nabla_P \mathcal{C}$ (mit Vielfachheiten gezählt) in $d(d-1)$ Punkten schneiden. Es ergibt sich also folgende Beziehung zu den Tangenten an \mathcal{C} durch $P = (a, b, c)$:

Polare $\nabla_P \mathcal{C}$: $a\partial_x F + b\partial_y F + c\partial_z F$

1. $Q \in \Sigma(\mathcal{C}) \Rightarrow Q \in \nabla_P \mathcal{C}$
2. $Q \in \mathcal{C} \setminus \Sigma(\mathcal{C})$, dann gilt
 $Q \in \nabla_P \mathcal{C} \Leftrightarrow a\partial_x F(Q) + b\partial_y F(Q) + c\partial_z F(Q) = 0 \Leftrightarrow P \in T_Q \mathcal{C}$

Dies besagt, dass die Polare von \mathcal{C} bezüglich P durch alle Punkte $Q \in \mathcal{C}$ mit $P \in T_Q \mathcal{C}$ geht.

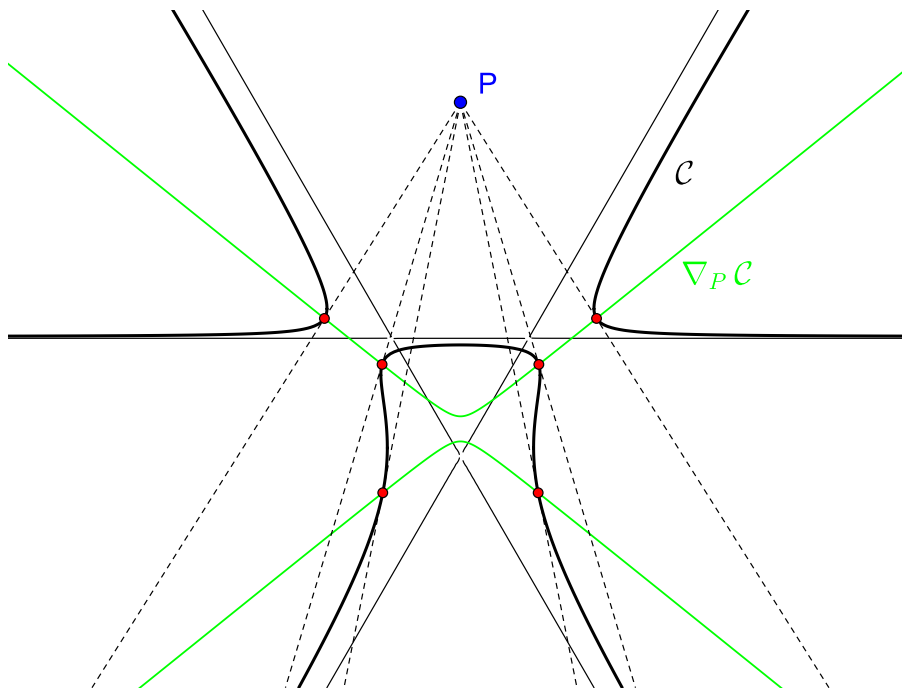


Abbildung 4.8: Die Polare $\nabla_P \mathcal{C}$ von \mathcal{C} bezüglich P geht durch alle Berührungspunkte der Tangenten an \mathcal{C} durch P .

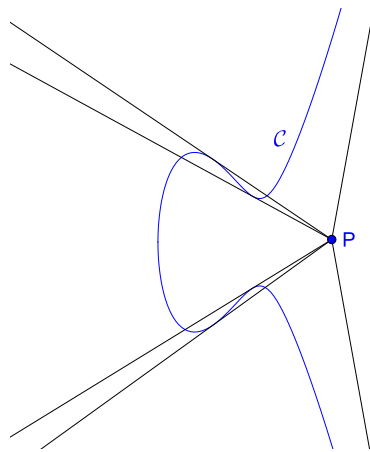


Abbildung 4.9: Wie in Beispiel 4.7 angedeutet, lassen sich nun die sechs Tangenten, die durch P an die Kurve \mathcal{C} angelegt werden können, bestimmen.