

# Ebene algebraische Kurven - SS 2016 - Vorlesung 17

Dozent: Prof. Dr. Duco van Straten - Protokollant: Darius Schäfer

06.06.2016

## Wiederholung

**Definition.** Zu  $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]_d$  sei

$$\mathcal{H}_F := \det \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{pmatrix}$$

die Determinante der Hesse'schen Matrix, wobei  $F_{xy} := \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} F$  ist.

Nun sei  $\mathcal{C} = \mathcal{V}(F)$  und  $\text{Grad } \mathcal{H}_F \geq 1$ , so setzen wir  $\mathcal{H}_\mathcal{C} = \mathcal{V}(\mathcal{H}_F)$  und bezeichnen dies als Hesse-Kurve von  $\mathcal{C}$ .

**Satz.** Ist  $\mathcal{C}$  eine Kurve ohne Geraden als Komponenten, so haben  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{H}_\mathcal{C}$  keine gemeinsamen Komponenten, und es gilt:

- $p \in \Sigma := \text{Sing}(\mathcal{C}) \Rightarrow p \in \mathcal{H}_\mathcal{C}$
- Ist  $P \in \mathcal{C} \setminus \Sigma$ , dann ist  $p \in \mathcal{H}_\mathcal{C}$  genau dann, wenn  $P$  ein Wendepunkt ist, d.h.  $\mathcal{I}(\mathcal{C}, \mathcal{T}_P \mathcal{C}, \mathcal{P}) \geq 3$ .

Falls  $\mathcal{I}(\mathcal{C}, \mathcal{T}_P \mathcal{C}, \mathcal{P}) = 3$  ist, so handelt es sich um einen einfachen Wendepunkt.

Weiterhin sind gemeinsame irreduzible Komponenten von  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{H}_\mathcal{C}$  immer Geraden.

( $f(x, y) = g(x) + y \cdot h(x, y)$ ,  $\mathcal{T}_0 \mathcal{C} = \mathcal{V}(y)$ ,  $\text{ord}_x g(x) = \mathcal{I}(\mathcal{C}, \mathcal{T}_0 \mathcal{C}, 0)$ )

## 4.8 Wendepunkt einer glatten Kubik

Bei einer glatten Kubik handelt es sich um eine Kurve von Grad 3

**Proposition.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kurve und  $p \in \mathcal{C} \setminus \Sigma$ , dann gilt:

$$\mathcal{I}(\mathcal{C}, \mathcal{T}_P \mathcal{C}, \mathcal{P}) = 3 \Leftrightarrow \mathcal{I}(\mathcal{C}, \mathcal{H}_\mathcal{C}, \mathcal{P}) = 1.$$

Für eine glatte Kubik gilt  $\mathcal{I}(\mathcal{C}, \mathcal{T}_P \mathcal{C}, \mathcal{P}) \leq 3$  und als notwendige Bedingung genau 3 für die Existenz eines Wendepunktes. Daher ist  $\mathcal{I}(\mathcal{C}, \mathcal{H}_\mathcal{C}, \mathcal{P}) = 1$ .

*Beweis.* Es sei  $d \geq 3$  der Grad von  $f$ . Wir kürzen ab:

$$f_i := \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f_{i,j} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad f_{i,j,k} := \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}.$$

Es werde die Tangente  $T_P(\mathcal{C})$  aufgespannt von  $p$  und  $q$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir die Koordinaten so, dass

$$p = (1 : 0 : 0), \quad q = (0 : 1 : 0).$$

Da  $p$  ein Wendepunkt ist folgt

$$f_{0,0}(p) = f_{0,1}(p) = f_{1,1}(p) = 0.$$

Mit der Eulerschen Formel finden wir

$$f_{0,0,1}(p) = \sum_{i,j,k} f_{i,j,k}(p) p_i p_j p_k = (d-2) \sum_{j,k} f_{j,k}(p) p_j p_k = (d-1)(d-2) \sum_k f_k(p) q_k = 0,$$

$$f_{0,1,1}(p) \sum_{i,j,k} f_{i,j,k}(p) p_i q_j q_k = (d-2) \sum_{j,k} f_{j,k}(p) q_j q_k = 0.$$

Aber

$$f_{0,2}(p) = \sum_i f_{i,2}(p) p_i = (d-1) f_2(p) \neq 0,$$

weil  $f_2(p)$  der einzige Koeffizient  $\neq 0$  in der Tangentengleichung ist, und

$$f_{1,1,1}(p) = \sum_{i,j,k} f_{i,j,k}(p) q_i q_j q_k \neq 0,$$

weil  $p \in \mathcal{C}$  ein gewöhnlicher Wendepunkt ist. Jetzt entwickeln wir die Einschränkung  $\det(f_{i,j}(p + t \cdot q))$  der Hesse-Determinante auf die Tangente bis zur ersten Ordnung

$$\begin{aligned} \det(f_{i,j}(p + t \cdot q)) &= \det((f_{i,j}(p)) + t \cdot (\sum_k f_{i,j,k}(p) q_k)) \\ &= \det((f_{i,j}(p)) + t \cdot (f_{i,j,1}(p))) \\ &= \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & f_{0,2}(p) \\ 0 & 0 & f_{1,2}(p) \\ f_{0,2}(p) & f_{1,2}(p) & f_{2,2}(p) \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & f_{0,2,1}(p) \\ 0 & f_{1,1,1}(p) & f_{1,2,1}(p) \\ f_{0,2,1}(p) & f_{1,2,1}(p) & f_{2,2,1}(p) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & f_{0,2}(p) + t \cdot f_{0,2,1}(p) \\ 0 & t \cdot f_{1,1,1}(p) & f_{1,2}(p) + t \cdot f_{1,2,1}(p) \\ f_{0,2}(p) + t \cdot f_{0,2,1}(p) & f_{1,2}(p) + t \cdot f_{1,2,1}(p) & f_{2,2}(p) + t \cdot f_{2,2,1}(p) \end{pmatrix} \\ &= t \cdot f_{0,2}(p)^2 + f_{1,1,1}(p) + \dots \end{aligned}$$

Also verschwindet die eingeschränkte hesse'sche Determinante auf  $T_p(\mathcal{C})$  nur von der ersten Ordnung und es ist tatsächlich  $\mathcal{I}(\mathcal{C}, \mathcal{H}_{\mathcal{C}}, \mathcal{P}) = 1$ .  $\square$

Mit Hilfe des Satzes von Bézout können wir die Anzahl der einfachen Wendepunkte einer von Singularitäten freien Kubik bestimmen.

$$\text{Bézout: } \underbrace{\text{Grad}(\mathcal{C})}_{=3} \cdot \underbrace{\text{Grad}(\mathcal{H}_{\mathcal{C}})}_{=3} = \sum_{p \in \mathcal{C} \cap \mathcal{H}_{\mathcal{C}}} \mathcal{I}(\mathcal{C}, \mathcal{T}_p \mathcal{C}, \mathcal{P}) = 9$$

$\Rightarrow$  Es gibt genau 9 einfache Wendepunkte auf einer von singularitätenfreien Kubik

**Beispiel.** Sei die kubische Kurve  $X^3 + Y^3 + Z^3 = F$  gegeben. Dann erhalten wir mit der Hesse'schen Matrix:

$$\mathcal{H}_F := \det \begin{pmatrix} 6X & 0 & 0 \\ 0 & 6Y & 0 \\ 0 & 0 & 6Z \end{pmatrix} = 6^3 XYZ = 216XYZ$$

Nun muss  $F = 0$  und somit  $\mathcal{H}_F = 0$  gelten. Wir erhalten daher folgende Wendepunkte:

$$X = 0, Y^3 + Z^3 = 0 \Rightarrow (0 : 1 : \omega)$$

$$Y = 0, Y^3 + Z^3 = 0 \Rightarrow (1 : 0 : \omega)$$

$$Z = 0, Y^3 + Z^3 = 0 \Rightarrow (1 : \omega : 0)$$

Für  $\omega$  gilt  $\omega^3 = -1$ , daher existieren eine reelle und zwei komplexe Lösungen für  $\omega$ :

$$\omega_1 = -1 \quad \omega_2 = e^{\frac{2\pi i}{6}} \quad \omega_3 = e^{\frac{-2\pi i}{6}}$$

Es existieren daher 3 reelle und 6 komplexe Wendepunkte. Wir verallgemeinern nun unsere kubische Kurve weiter zu  $X^3 + Y^3 + Z^3 = \lambda XYZ$ . Diese kubische Kurve wird als Hesse-Pencil bezeichnet. Wir erhalten erneut mit der Hesse'schen Matrix:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_F &:= \det \begin{pmatrix} 6X & \lambda Z & \lambda Y \\ \lambda Z & 6Y & \lambda X \\ \lambda Y & \lambda X & 6Z \end{pmatrix} = (216 + 2\lambda^3)XYZ - 6\lambda^2(X^3 + Y^3 + Z^3) \\ &= -6\lambda^2(X^3 + Y^3 + Z^3 - \left(\frac{2016 + 2\lambda^2}{6\lambda^2}\right)XYZ). \end{aligned}$$

$\mathcal{H}_{C_\lambda} = C_\mu$ , wobei  $\mu = -\left(\frac{108 + \lambda^2}{\lambda^2}\right)$ . Wendepunkte von  $C_\lambda$ , wobei  $\lambda \neq \mu$ :

$$\begin{aligned} X^3 + Y^3 + Z^3 + \lambda XYZ &= 0 \\ X^3 + Y^3 + Z^3 + \mu XYZ &= 0 \\ \Rightarrow X^3 + Y^3 + Z^3 &= 0 \text{ und } XYZ = 0 \end{aligned}$$

Nun können wir weiter wie im vorherigen Beispiel vorgehen. Das heißt, alle glatten Kubiken  $C_\lambda$  haben die gleichen 9 Wendepunkte, welche wir oben bereits berechnet haben.

## 4.9 Normalform für kubische Kurven

Angenommen  $p \in \mathcal{C}$  sei ein Wendepunkt einer kubischen Kurve. Nach einer geeigneten Koordinatentransformation kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass  $P = (0 : 1 : 0)$  und die Tangente an  $\mathcal{C}$  in  $P$  ist die unendliche Gerade  $l_\infty = \mathcal{V}(z)$ .

Wir leiten nun die Normalform für kubische Kurven her. Da es sich um eine Kurve von Grad 3 handelt  $f(x, y) = F(X, Y, Z)^D$ , können nur folgende Monome auftreten:

$$\{y^3, y^2, x^2y, x^3, y^2x, xy, x^2, y, x, 1\}$$

Da wir eine geeignete Koordinatentransformation durchgeführt haben, befindet sich  $P = (0 : 1 : 0) \in \mathcal{C}$  und die Tangente an  $\mathcal{C}$  in  $P$  ist die unendliche Gerade  $l_\infty$ . Daher ist der Koeffizient von  $y^3 = 0$ . Wir erhalten:

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + f_3, \text{ wobei } f_3 = 0 \cdot y^3 + \alpha xy^2 + \beta x^2y + \gamma x^3$$

Da  $l_\infty$  Tangente in  $(0 : 1 : 0) \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$ . Daher haben wir:

$$\tilde{\alpha}y^2 + \tilde{\beta}xy + \gamma y + g_3(x) = f(x, y)$$

Ohne Einschränkung nehmen wir  $\alpha = 1$  an und erhalten:

$$y^2 + y(\tilde{\beta}x + \gamma) + g_3(x) = (y + (\tilde{\beta}x + \gamma))^2 + g_3(x) - (\tilde{\beta}x + \gamma)^2$$

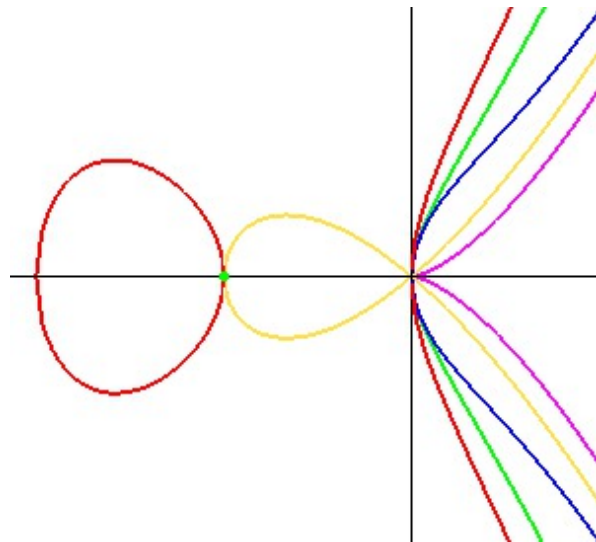
Wir führen nun folgende Koordinatentransformation durch:

$$x \mapsto x \text{ und } y \mapsto y + \tilde{\beta}x + \gamma$$

Daher erhalten wir:

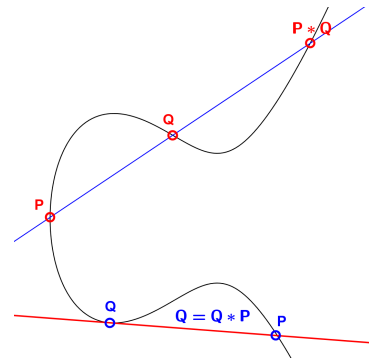
$$y^2 = f_3(x) \text{ und } f_3 = -g_3(x) + (\tilde{\beta}x + \gamma)^2$$

Die Kurven dieses Typs nannte Newton *divergierende Parabeln*. Je nachdem, wie die Nullstellen der Funktion verteilt sind, ergibt sich eine zusammenhängende, glockenförmige Kurve (blau), eine Kurve mit einer Spitze (violett), einer Schlinge (gelb), einem Oval (rot) oder einem isolierten Punkt (grün).



## 4.10 Kubische Kurve als abelsche Gruppe

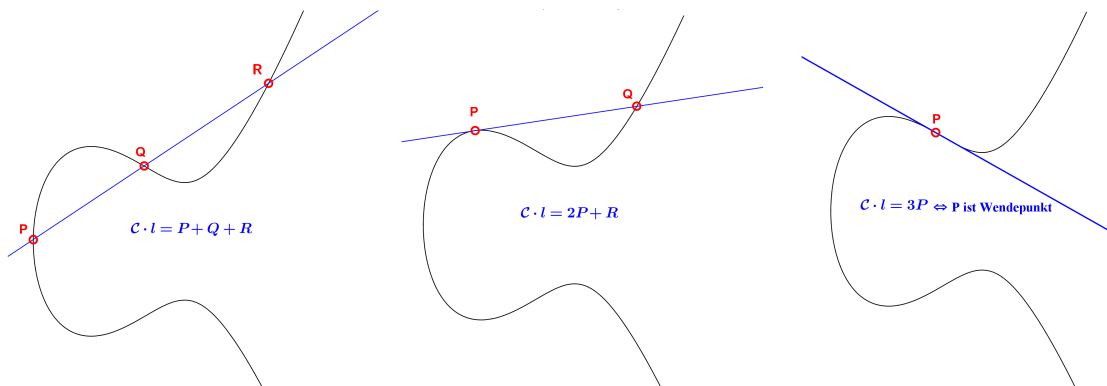
Sei nun  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$  eine glatte Kubik. Wir definieren für zwei beliebige Punkte  $P, Q \in \mathcal{C}$  den dritten Schnittpunkt von  $\mathcal{C}$  mit der Gerade durch die beiden Punkte  $P$  und  $Q$  als  $P * Q$ . Wir bezeichnen von nun an die Gerade durch  $P$  und  $Q$  mit  $l$ . Jedoch werden wir sehen, dass die Annahme  $\mathcal{C} \cup l = \{P, Q, P * Q\}$  nicht korrekt ist, da noch Schnittpunkte im Komplexen existieren.



Wir definieren nun den Schnittdivisor zwischen zwei Kurven  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  mit:

$$\mathcal{C} \cdot \mathcal{D} := \sum_{p \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}} I(\mathcal{C}, \mathcal{D}; P) \cdot P$$

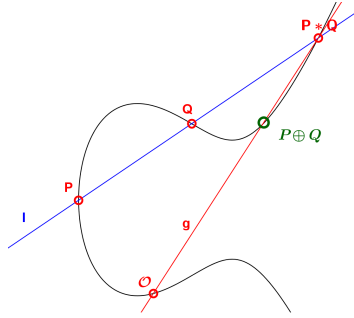
Daher bedeutet  $P * Q = R \Rightarrow \mathcal{C} \cdot l = P + Q + R$ . Nun folgen zur Veranschaulichung ein paar Beispiele.



Wir können nun auf einer kubischen Kurve ein Gruppengesetz definieren.

**Definition.** Es sei  $\mathcal{C}$  eine kubische Kurve. Für zwei verschiedene Punkte  $P$  und  $Q$  in  $\mathcal{C}$  definieren wir einen Punkt  $P \oplus Q$  in  $\mathcal{C}$  wie folgt: Wir legen eine projektive Gerade  $l$  durch  $P$  und  $Q$ . Diese schneidet

die Kurve  $\mathcal{C}$  in einem weiteren Punkt, den wir bereits  $P * Q$  bezeichnet haben. Nun legen wir eine projektive Gerade  $g$  durch  $P * Q$  und den Punkt  $\mathcal{O}$ , der in  $\mathcal{C}$  liegt. (Falls  $P * Q = \mathcal{O}$  sein sollte, so nehmen wir die Tangente an  $\mathcal{C}$  in  $\mathcal{O}$ .) Die Gerade  $g$  schneidet  $\mathcal{C}$  nun ebenfalls in einem dritten Punkt, das sei der gesuchte Punkt  $P \oplus Q$ . Im Endeffekt bedeutet dies:  $P \oplus Q := \mathcal{O} * (P * Q)$ .



**Satz.** Es sei  $\mathcal{C}$  eine kubische Kurve. Die vorhin definierte Verknüpfung

$$\oplus : (P, Q) \rightarrow P \oplus Q$$

macht  $(\mathcal{C}, \oplus)$  zu einer abelschen Gruppe mit neutralem Element  $\mathcal{O}$ .

*Beweis.* 1.  $P \oplus \mathcal{O} = P$  für alle  $P \in \mathcal{C}$ :

Wir nehmen einen Punkt  $P \neq \mathcal{O}$  und legen eine projektive Gerade  $l$  durch  $P$  und  $\mathcal{O}$ , die  $\mathcal{C}$  in einem dritten Punkt  $P * \mathcal{C}$  schneidet. Da  $l$  eine Gerade durch  $\mathcal{O}$  und  $P * Q$  ist, muss  $l = g$ , also der dritte Schnittpunkt von  $g$  mit  $\mathcal{C}$  gleich  $P$  sein:

$$P \oplus \mathcal{O} = P$$

2. Für alle  $P \in \mathcal{C}$  existiert ein inverses  $Q$ , sodass  $P \oplus Q = \mathcal{O}$ :

Definitionsgemäß ist  $Q$  ein Punkt in  $\mathcal{C}$ , der mit  $\mathcal{O}$  und  $P$  auf einer gemeinsamen Geraden liegt. Es gilt daher:

$$\mathcal{O} = (P \oplus \mathcal{O}) \oplus Q = P \oplus Q$$

3.  $P \oplus Q = Q \oplus P$  für alle  $P, Q \in \mathcal{C}$ :

Dies folgt sofort aus der Definition von  $P \oplus Q$ .

4.  $(P \oplus Q) \oplus R = P \oplus (Q \oplus R)$  für alle  $P, Q, R \in \mathcal{C}$ :

Die letzte Voraussetzung ist nicht trivial. Daher werden wir diese Aussage mit einer geometrischen Skizze zeigen. Den zugrunde liegenden Satz, den wir hierfür verwenden, ist der Satz von Cayley-Bacharach, der Folgendes besagt:

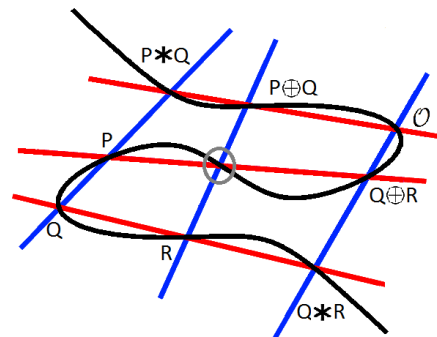
Schneiden sich zwei kubische Kurven in der projektiven Ebene in neun verschiedenen Punkten, so enthält jede kubische Kurve, die durch acht dieser Punkte geht, auch den neunten.

Anhand der Skizze können wir folgendes leicht verifizieren:

$$P * (Q \oplus R) = (P \oplus Q) * R$$

(grauer Kreis)

$$\Rightarrow P \oplus (Q \oplus R) = (P \oplus Q) \oplus R$$



□

## 4.11 Wendepunktconfiguration $(9_4, 12_3)$

**Satz.** Sei  $\mathcal{C}$  weiterhin eine kubische Kurve. Dann schneidet die Verbindungsgerade je zwei verschiedener Wendepunkte in  $\mathcal{C}$  einen dritten Wendepunkt.

*Beweis.* Angenommen  $P$  sei ein Wendepunkt von  $\mathcal{C} \Leftrightarrow P \oplus P = \ominus P \Leftrightarrow P \oplus P \oplus P = 0$ . Nun sei  $Q$  ebenfalls ein Wendepunkt von  $\mathcal{C}$ , dann gilt:

$$\Rightarrow (P \oplus Q) \oplus (P \oplus Q) \oplus (P \oplus Q) = 0$$

$$\Rightarrow P \oplus Q \text{ ist auch ein Wendepunkt}$$

$$\Rightarrow P \oplus Q \text{ Wendepunkt}$$

□

Jetzt zählen wir die Verbindungsgeraden von Wendepunkten ab: Auf jeder dieser Geraden liegen genau drei Wendepunkte. Durch jeden Wendepunkt gehen genau vier dieser Geraden. Die Anzahl möglicher Inzidenzen

$$\text{Wendepunkt} \in \text{Verbindungsgerade}$$

ist deshalb

$$9 \cdot 4 = 36.$$

Andererseits ist diese Zahl auch gleich  $3 \times$  Anzahl der Verbindungsgeraden.

Deswegen gibt es genau 12 Verbindungsgeraden. Wir haben gezeigt:

**Satz.** Die neun Wendepunkte und ihre zwölf Verbindungsgeraden bilden ein System von Punkten und Geraden derart, dass durch jeden Punkt vier Geraden gehen und auf jeder Gerade drei Punkte liegen.

Ein solches System von Geraden nennt man eine Konfiguration. Wir haben es hier genauer mit einer

$$(9_4, 12_3) \text{ Konfiguration}$$

zu tun. Diese Konfiguration heißt Hesse Konfiguration.