

**Wiederholung.** Jede glatte kubische Kurve  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$  hat neun Wendepunkte. Liegen zwei Wendepunkte auf einer Geraden, so ist der dritte Schnittpunkt von der Geraden mit der Kubik ebenfalls ein Wendepunkt.

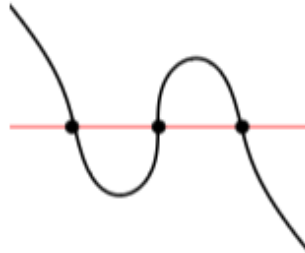


Abbildung 1: Beispiel für drei auf einer Geraden liegenden Wendepunkte auf der Kubik  $x = y^3 + y \cdot x^2 + 2 \cdot x^3$

Die glatte Kubik  $\mathcal{C}$  bildet mit der in (4.10) definierten  $\oplus$  Operation und  $O \in \mathcal{C}$  als neutralem Element eine abelsche Gruppe  $(\mathcal{C}, \oplus, O)$ , wobei für  $P, Q \in \mathcal{C}$

$$P \oplus Q := O * (P * Q)$$

definiert ist. Es gilt

$$\begin{cases} \mathcal{C} \cdot l = P + Q + P * Q \\ \mathcal{C} \cdot l' = O + (P \oplus Q) + P * Q. \end{cases}$$

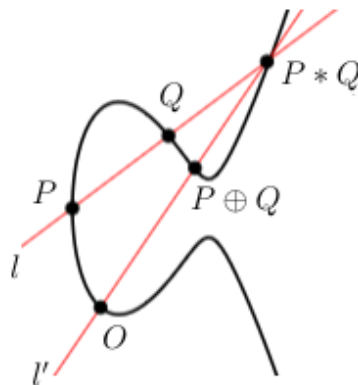


Abbildung 2: Konstruktion an der Kubik  $0.2 \cdot y^2 = 0.2 \cdot x^3 - x + 1$

Wir untersuchen nun den besonderen Fall, dass  $O$  ein Wendepunkt sei. Dann ist  $O * R = \ominus R$  das Negativum von  $R$  in  $(\mathcal{C}, \oplus, O)$ , denn aus

$$O' = O * (R * (O * R)) = R \oplus (O * R)$$

folgt  $O = O'$ .

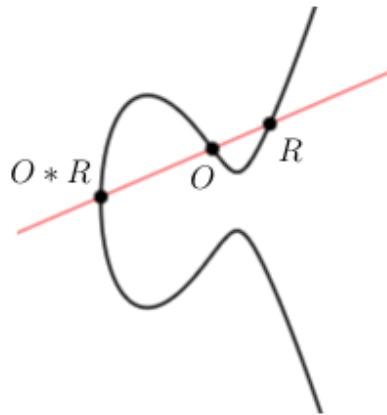


Abbildung 3: Konstruktion an der Kubik  $0.2 \cdot y^2 = 0.2 \cdot x^3 - x + 1$ , wobei  $O$  Wendepunkt sei

Für  $O = (0 : 1 : 0)$  erhalten wir die sogenannte Normalform.

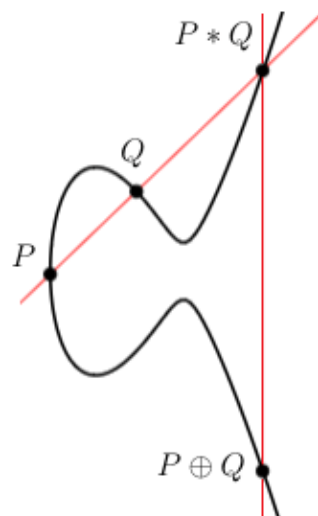
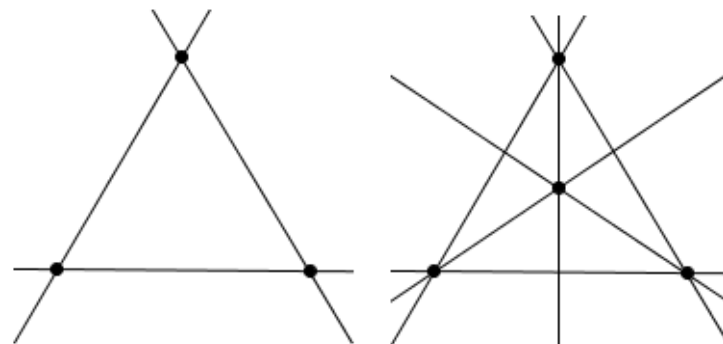


Abbildung 4: Normalform der Kubik  $0.2 \cdot y^2 = 0.2 \cdot x^3 - x + 1$

#### 4.12 Näheres zu der $9_4 12_3$ Konfiguration von Hesse

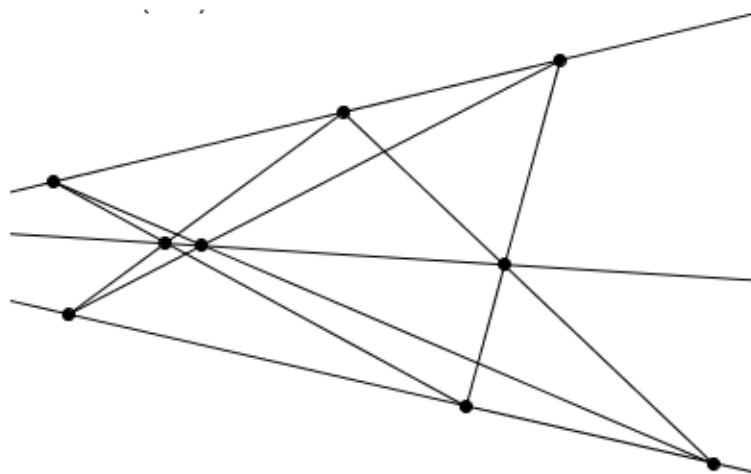
Im Allgemeinen besteht eine Konfiguration aus den  $N$  Punkten  $P_1, \dots, P_N$  und den  $M$  Geraden  $l_1, \dots, l_M$ . Die Konfiguration vom Typ  $N_r M_s$  wird gebildet, wenn durch jeden Punkt  $r$  Geraden gehen und auf jeder Geraden  $s$  Punkte liegen. Offensichtlich gilt  $N \cdot r = M \cdot s$ .

**Beispiel.** Beispiele für Konfigurationen:



(a)  $3_23_2$  Konfiguration

(b)  $4_36_2$  Konfiguration



(c)  $9_39_3$  Konfiguration (Pappos)

Abbildung 5: Beispiele für Konfigurationen

Wir bemerken, dass die  $9_412_3$  Konfiguration nicht in der reellen Ebene realisierbar ist.

**Theorem** (Sylvester-Gallai Theorem). *Gegeben seien endlich viele Punkte in  $\mathbb{R}^2$ . Dann liegen entweder alle auf einer Geraden oder es gibt zwei der Punkte  $P, Q$ , sodass keine weiteren Punkte auf der Geraden  $|PQ|$  liegen.*

*Beweis.* Wir nehmen an, dass nicht alle Punkte auf einer Geraden liegen und behaupten, dass die Aussage falsch sei. Wir wählen zwei Geraden  $p, l$ , wobei  $P \notin l$  der Punkt sei, der den kleinsten Abstand zu einer Geraden, also hier zu  $l$ , habe. Sei nun  $P'$  der Lotfußpunkt von  $P$  auf  $l$ . Ferner gibt es mindestens drei Punkte auf  $l$ , wobei  $A$  auf der einen und  $B, C$  auf der anderen Seite von  $P'$  liege.  $B$  sei der Punkt, welcher sich näher an  $P'$  befinde. Dann gilt  $d(B, |PC|) < d(P, l)$ . Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass  $P$  der Punkt mit kleinstem Abstand zu einer Geraden ist.

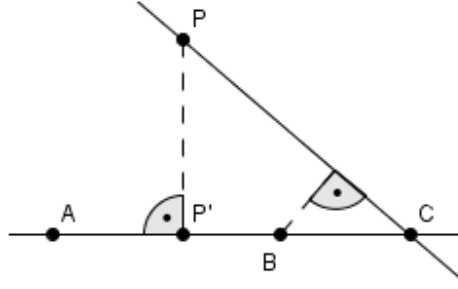


Abbildung 6: Skizze zum Beweis

□

### Genauere Beschreibung der Hesse-Konfiguration

Wir wiederholen, dass das Hesse-Pencil für  $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$  durch

$$\mathcal{C}_{(\lambda:\mu)} : \lambda(x^3 + y^3 + z^3) - \mu \cdot xyz = 0$$

gegeben ist. Für die Wendepunkte gilt  $xyz = 0 = x^3 + y^3 + z^3$ . Wir erhalten folglich die neun Wendepunkte

$$\begin{pmatrix} 0 : 1 : -1 \\ 1 : 0 : -1 \\ 1 : -1 : 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 : 1 : -\omega \\ 1 : 0 : -\omega \\ 1 : -\omega : 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 : 1 : -\omega^2 \\ 1 : 0 : -\omega^2 \\ 1 : -\omega^2 : 0 \end{pmatrix},$$

wobei  $\omega$  eine primitive dritte Einheitswurzel ist.

Wir untersuchen nun die Singularitäten von  $\mathcal{C}_{(\lambda:\mu)}$ .

$$\begin{cases} \partial_x : 3\lambda x^2 - \mu \cdot yz = 0 \\ \partial_y : 3\lambda y^2 - \mu \cdot xz = 0 \\ \partial_z : 3\lambda z^2 - \mu \cdot xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda x^3 - \mu \cdot xyz = 0 \\ 3\lambda y^3 - \mu \cdot xyz = 0 \\ 3\lambda z^3 - \mu \cdot xyz = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda x^3 = \lambda y^3 = \lambda z^3$$

1. Fall: Sei  $\lambda = 0$ . Dann gilt  $\mathcal{C}_{(0:1)} = -xyz$ .

$\Rightarrow$  Koordinatendreieck, denn  $\mathcal{C}_{(0:1)} = 0$  für  $(1 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 1 : 0)$ ,  $(0 : 0 : 1)$ .

2. Fall: Sei  $\lambda \neq 0$ . Wir wählen  $\lambda = 1$ . Dann gilt  $x^3 = y^3 = z^3$  und  $3x^2 = \mu \cdot yz$ ,  $3y^2 = \mu \cdot xz$ ,  $3z^2 = \mu \cdot xy$ .

$\Rightarrow x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ .

Wir setzen  $z = 1$ . Daraus folgt, dass  $x = 1, \omega, \omega^2$  und  $y = 1, \omega, \omega^2$  gilt.

$\Rightarrow \mu = 3, 3 \cdot \omega, 3 \cdot \omega^2$ . Sonst ist  $\mathcal{C}_{(1:\mu)}$  singularitätenfrei.

Sei  $\mu = 3$ , dann gilt

$$\begin{cases} x^2 = yz \\ y^2 = xz \\ z^2 = xy \end{cases}$$

für  $(1 : 1 : 1)$ ,  $(\omega : \omega^2 : 1)$ ,  $(\omega^2 : \omega : 1)$ .

Sei  $\mu = 3 \cdot \omega$ , dann gilt

$$\begin{cases} x^2 = \omega \cdot yz \\ y^2 = \omega \cdot xz \\ z^2 = \omega \cdot xy \end{cases}$$

für  $(1 : \omega^2 : 1)$ ,  $(\omega : \omega : 1)$ ,  $(\omega^2 : 1 : 1)$ .

Sei  $\mu = 3 \cdot \omega^2$ , dann gilt

$$\begin{cases} x^2 = \omega^2 \cdot yz \\ y^2 = \omega^2 \cdot xz \\ z^2 = \omega^2 \cdot xy \end{cases}$$

für  $(1 : \omega : 1)$ ,  $(\omega : 1 : 1)$ ,  $(\omega^2 : \omega^2 : 1)$ .

Das heißt, für die vier Werte  $(\lambda : \mu) = (0 : 1)$ ,  $(1 : 3)$ ,  $(1 : 3 \cdot \omega)$ ,  $(1 : 3 \cdot \omega^2)$  ist die Kubik  $\mathcal{C}_{(\lambda:\mu)}$  eine Vereinigung von drei Geraden. Wir haben jetzt alle neun Wendepunkte und alle zwölf Geraden und erhalten somit folgendes Inzidenz-Diagramm.

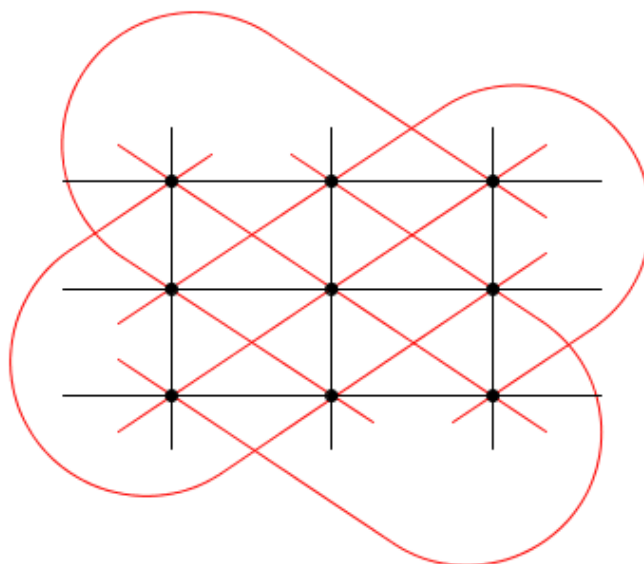


Abbildung 7: Inzidenz-Diagramm

## Elliptische Kurven

Wir betrachten nun das Gitter  $\Lambda = \mathbb{Z} \cdot \omega_1 + \mathbb{Z} \cdot \omega_2 \subset \mathbb{C}$ , wobei  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  linear unabhängig. Eine doppelperiodische Funktion  $f$  besitzt die Eigenschaft  $f(z + \lambda) = f(z)$  für alle  $\lambda \in \Lambda$ .

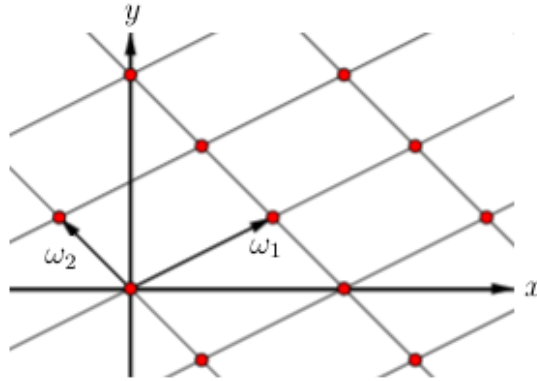


Abbildung 8: Gitter  $\Lambda$

Die einfachste meromorphe doppelperiodische Funktion ist die Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left[ \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right].$$

Wir berechnen

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} - 2 \cdot \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{(z - \omega)^3}$$

und

$$\wp'(z)^2 = 4 \cdot \wp(z)^3 - g_2(\Lambda) \cdot \wp(z) - g_3(\Lambda),$$

wobei  $g_2(\Lambda) = 60 \cdot \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^4}$  und  $g_3(\Lambda) = 140 \cdot \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^6}$ . Das heißt wir können

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ z &\longmapsto (\wp(z), \wp'(z)) \end{aligned}$$

erweitern zu

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{P}^2 \\ z \neq 0 &\longmapsto (\wp(z) : \wp'(z) : 1) \\ z = 0 &\longmapsto (0 : 1 : 0), \end{aligned}$$

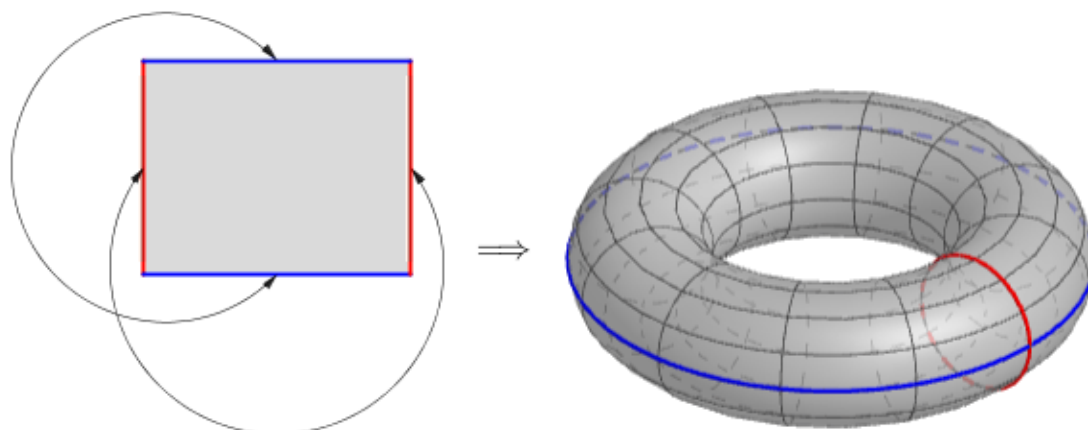
da für  $z = 0$

$$\begin{aligned} &\left( \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left[ \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right] : -\frac{2}{z^3} - 2 \cdot \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{(z - \omega)^3} : 1 \right) \\ &= \left( z + z^3 \cdot \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left[ \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right] : -2 - 2z^3 \cdot \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{(z - \omega)^3} : z^3 \right) \\ &= (0 : -2 : 0) = (0 : 1 : 0) \end{aligned}$$

gilt.  $\varphi$  ist doppelperiodisch. Wir betrachten nun  $\psi : \mathbb{C}/\Lambda \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ , das heißt  $\varphi$  steigt ab zur Abbildung  $\psi$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C}/\Lambda \\ \searrow \varphi & & \swarrow \psi \\ & \mathbb{P}^2 & \end{array}$$

Wir betrachten die folgende Konstruktion eines Torus.



(a) Identifizieren der gegenüberliegenden Seiten des Rechtecks

(b) Torus

Abbildung 9: Konstruktion eines Torus

Das heißt, unsere kubische Kurve  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$  ist ein Torus!

**Bemerkung.** Aus  $(\mathbb{C}, +)$  ist eine abelsche Gruppe und  $(\Lambda, +)$  ist eine Untergruppe folgt  $\mathbb{C}/\Lambda$  ist eine Gruppe. Das neutrale Element ist  $O$ .  $\psi(O) = (0 : 1 : 0)$  ist ein Wendepunkt der Kubik.

Wir betrachten  $(\mathbb{C}/\Lambda, +) \xrightarrow{\sim} (\varphi, \oplus)$ . Die Wendepunkte sind Punkte der Ordnung 3, das heißt alle Punkte mit

$$k \cdot \frac{\omega_1}{3} + l \cdot \frac{\omega_2}{3},$$

für  $0 \leq k, l \leq 2$ .

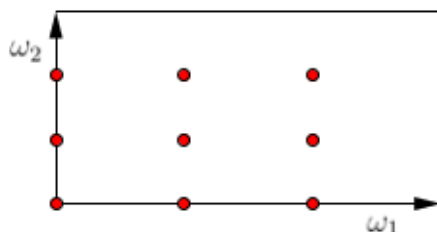


Abbildung 10: Wendepunkte

### 4.13 Divisorenklassengruppe

Sei  $\mathcal{C}$  eine singularitätenfreie Kurve in  $\mathbb{P}^2$  mit beliebigem Grad. Wir definieren

$$\text{Div}(\mathcal{C}) = \left\{ \sum_{i \in I} n_i \cdot P_i \mid n_i \in \mathbb{Z}, P_i \in \mathcal{C}, I \text{ endlich} \right\}.$$

Elemente  $D \in \text{Div}(\mathcal{C})$  nennen wir Divisoren auf  $\mathcal{C}$ .

Sei  $D = P + 2 \cdot Q - R$ ,  $D' = 2 \cdot P - Q + R + S \in \text{Div}(\mathcal{C})$ . Dann ist  $D + D' = 3 \cdot P + Q + S$  etc., das heißt  $\text{Div}(\mathcal{C})$  ist eine freie abelsche Gruppe.

Weiterhin definieren wir den Schnittdivisor  $\mathcal{C}$  mit  $\mathcal{D}$  durch

$$\mathcal{C} \cdot \mathcal{D} = \sum_{P \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}} I(\mathcal{C}, \mathcal{D}; P) P.$$

Sind alle Koeffizienten nicht negativ, so nennen wir den Divisor einen effektiven Divisor. Wir definieren den Grad eines Divisors  $D \in \text{Div}(\mathcal{C})$  durch  $\text{Grad}(D) := \sum_{i \in I} n_i$ . Dabei ist

$$\begin{aligned} \text{Div}(\mathcal{C}) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ D &\longmapsto \text{Grad}(D) \end{aligned}$$

ein Gruppenhomomorphismus. Also folgt aus Bézout

$$\text{Grad}(\mathcal{C} \cdot \mathcal{D}) = \text{Grad}(\mathcal{C}) \cdot \text{Grad}(\mathcal{D}).$$