

Johannes-Gutenberg-Universität Mainz

Im Rahmen des Seminars

„Ausgewählte höhere Kurven“

im WS 2016/17

Bei Prof. Dr. Duco van Straten

Aus der fünften Gruppe

Doppelleinie
Steinersche Hypozykloide

Sarah Lawall

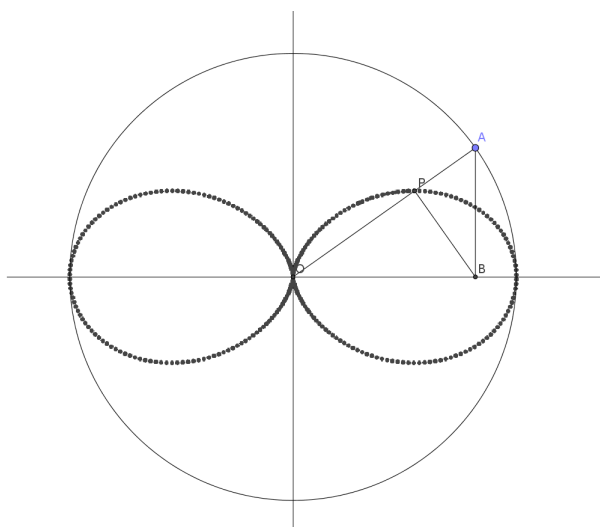
Inhaltsverzeichnis

1	Die Doppelleinie	3
1.1	Erzeugung	3
1.2	Verbindung zur Rosette	4
1.3	Auswertung der Kurvengleichung	5
1.4	Anwendung zur Würfelteilung	6
1.5	Quadratur	7
2	Steinersche Hypozykloide	8
2.1	Jakob Steiner	8
2.2	Erzeugungsweise	8
2.3	Eine weitere Erzeugungsweise	9
2.4	Auswertung der Kurvengleichung	10
2.5	Quadratur	10
3	Quellen	12

1 Die Doppelteinie

1.1 Erzeugung

In einem Koordinatensystem zieht man einen Kreis mit Mittelpunkt O und Radius a . Zeichnet man nun den Radius OA ein und von A das Lot auf die x -Achse, und von diesem Punkt B aus das Lot auf OA , so erhält man einen Punkt auf der Kurve. Dreht man nun die Gerade OA um den Ursprung, so erhält man die Doppelteinie.



Fällt man nun das Lot von P auf die x -Achse, so folgt aus dem Kathetensatz

$$OP^2 = OQ \cdot OB$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = x \cdot OB$$

Es gilt aber auch:

$$OB^2 = OP \cdot OA = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot a$$

$$\Rightarrow OB = \sqrt{a\sqrt{x^2 + y^2}}$$

1 Die Doppeleilinie

Durch einsetzen erhält man:

$$\begin{aligned} OP^2 &= x^2 + y^2 = x\sqrt{a\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \Rightarrow (x^2 + y^2)^4 &= x^4(x^2 + y^2)a^2 \\ \Rightarrow (x^2 + y^2)^3 &= a^2x^4(I) \end{aligned}$$

Führt man jetzt Polarkoordinaten ein ($x = r \sin \varphi, y = r \cos \varphi$), so ergibt sich:

$$(r^2)^3 = a^2r^4 \cos^4 \varphi$$

$$\Rightarrow r^2 = a^2 \cos^4 \varphi$$

$$\Rightarrow r = \pm a \cos^2 \varphi(II)$$

1.2 Verbindung zur Rosette

Erinnerung: Eine Konchoide ist eine Kurve, die von einem bestimmten Punkt aus zu einer gegebenen Kurve immer den gleichen Abstand hat.

Bildet man die Konchoide der Rosette, so erhält man zwei, gegeneinander um 90° verschobene, Doppeleilinen.

Die Gleichung der Rosette ist

$$r = \frac{a}{2} \sin 2\phi$$

Also hat die Konchoide die Form $r = \frac{a}{2} \sin 2\varphi + b$. Wir betrachten den Fall $b = \frac{a}{2}$, also den Radius des Umkreises der Rosette, und drehen die Rosette um 45° .

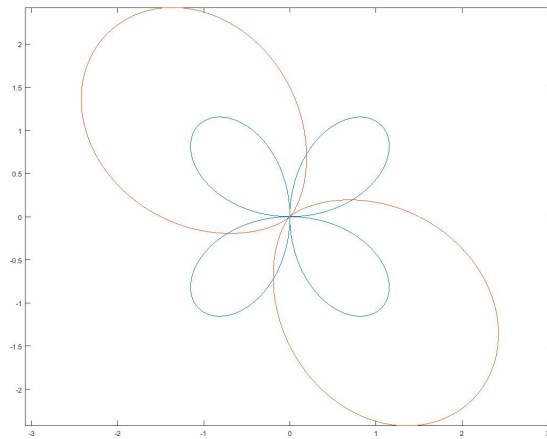
$$\Rightarrow r = \frac{a}{2} \sin 2(\varphi' - 45^\circ) + \frac{a}{2} = \frac{a}{2} (\cos -2\varphi' + 1) = \frac{a}{2} (\cos 2\varphi' + 1)$$

mit $\cos 2\varphi' + 1 = \cos^2 \varphi' - \sin^2 \varphi' + \sin^2 \varphi' + \cos^2 \varphi' = 2 \cos^2 \varphi'$

$$r = a \cos^2 \varphi'$$

Dies ist gerade die Gleichung der Doppeleilinie.

1 Die Doppeleilinie



1.3 Auswertung der Kurvengleichung

1. Aus der Gleichung (I) folgt die Symmetrie zu beiden Achsen.

2. Löst man (I) nach y auf, so erhält man $y^2 = a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} - x^2$ und erkennt, dass $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = \pm a$. Aus der Polargleichung folgt nun, dass O ein Knotenpunkt ist, da $r = a \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

3. Die breiteste Stelle der Doppeleilinie ist bei $x = \pm a$, da:

$$(y^2)' = \frac{4}{3}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}} - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}} = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{27}a^2x = x^3$$

$$\Rightarrow x = \frac{2a}{9}\sqrt{6} \approx \pm 0,54a$$

Also ist die breiteste Stelle der Doppeleilinie nicht in der Mitte der Halbachsen, sondern leicht nach außen verschoben.

Durch einsetzen in y erhält man die Breite der Kurve.

1 Die Doppelelinie

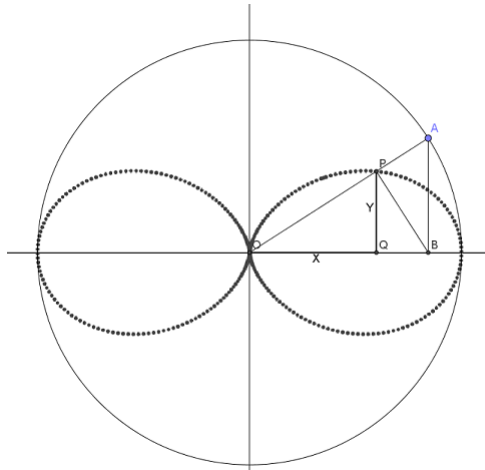
$$\begin{aligned}
 y^2 \left(\sqrt{\frac{8}{27}} a \right) &= a^{\frac{2}{3}} \left(\sqrt{\frac{8}{27}} a \right)^{\frac{4}{3}} - \left(\sqrt{\frac{8}{27}} a \right)^2 \\
 &= a^2 \left(\left(\frac{8}{27} \right)^{\frac{2}{3}} - \frac{8}{27} \right) \\
 &\approx 0,148a^2
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y \left(\sqrt{\frac{8}{27}} a \right) = \sqrt{0,148a^2} \approx \pm 0,38a$$

Also ist die breiteste Stelle der Doppelelinie ungefähr 0,76a breit.

1.4 Anwendung zur Würfelteilung

Die Doppelelinie kann auch für die Würfelteilung verwendet werden. Bezeichnet man OB mit z, so folgt, da nach dem Höhensatz $PQ^2 = OQ \cdot QB$ ist:



$$a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} - x^2 = x(z - x)$$

$$\Rightarrow a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} - x^2 = xz - x^2$$

$$\Rightarrow z^3 = a^2 x$$

Setzt man nun $x = \frac{a}{n} \Rightarrow z^3 = \frac{a^3}{n}$, also stellt der Würfel mit der Kantenlänge $z = OB$ den n-ten Teil des Würfels mit der Kantenlänge a (= Kreisradius) dar.

Um aus einer gegebenen Kurve die Seitenlänge des n-ten Teils des Würfels zu finden trägt man also auf der x-Achse den Wert $\frac{a}{n} = OQ$ auf, sucht den Schnittpunkt zwischen

1 Die Doppeleilinie

Lot und Kurve, verlängert die so entstehende Gerade bis zum Schnittpunkt A auf dem Kreis und fällt von da das Lot auf die x-Achse und erhält man die gesuchte Kantenlänge z .

1.5 Quadratur

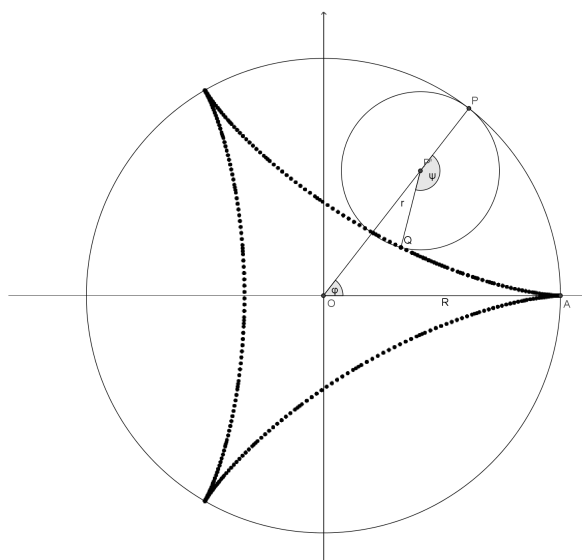
Nach der Sektorformel von Leibniz gilt: $\frac{1}{4}F = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^4(\varphi) d\varphi = \frac{3\pi}{32} a^2$
Also ist der Flächeninhalt der Kurve $\frac{3\pi}{8} a^2$ und damit etwas weniger als die Hälfte der Fläche der Umkreises.

2 Steinersche Hypozykloide

2.1 Jakob Steiner

Geboren am 18.3.1796 in Utzenstorf, gestorben am 1.4.1863 in Bern war ein Schweizer Mathematiker, der als einer der Hauptvertreter der synthetischen Geometrie gilt. Er lernte erst mit 14 Jahren lesen und finanzierte sich sein Studium als Privatlehrer.

2.2 Erzeugungsweise



Die Steinersche Hypozykloide wird durch das Abrollen eines Kreises in einem größeren Kreis erzeugt. Dabei hat der größere Kreis den dreifachen Radius ($R = 3r$) des kleineren Kreises (r). In der Ausgangslage liegt der kleinere Kreis auf der x-Achse und rollt dann auf der Bahn des größeren Kreises. Dadurch gilt für die Bögen:

$$r\psi = QP = AP = R\varphi = 3r\varphi$$

$$\Rightarrow \psi = 3\varphi$$

Wir kennen die Koordinaten des Punktes $P = (R \cos \varphi, R \sin \varphi)$

2 Steinersche Hypozykloide

$$\Rightarrow P' = ((R - r) \cos, (R - r) \sin) = (2r \cos, 2r \sin \varphi)$$

Um die Koordinaten des Punktes Q zu berechnen verschieben wir den Ursprung des Koordinatensystems in den Punkt P'.

$$\Rightarrow Q = P' + (r \cos -2\varphi, r \sin -2\varphi) = (2r \cos, 2r \sin \varphi) + (r \cos 2\varphi, -r \sin 2\varphi)$$

$$Q = r(2 \cos \varphi + \cos 2\varphi, 2 \sin \varphi - \sin 2\varphi)$$

Der Winkel ψ dabei negativ gerechnet, da sich der Winkel in negative Richtung dreht. Mit $b^2 = x^2 + y^2$ erhält man die Gleichung für den Fahrstrahl b.

$$\begin{aligned} b^2 &= r^2((2 \cos \varphi + \cos 2\varphi)^2 + (2 \sin \varphi - \sin 2\varphi)^2) \\ &= r^2(4 \cos^2 \varphi + 4 \cos \varphi \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi + 4 \sin^2 \varphi - 4 \sin \varphi \sin 2\varphi + \sin^2 \varphi) \\ &= r^2(4 + 4(\cos \varphi \cos 2\varphi - \sin \varphi \sin 2\varphi) + 1) \\ &= r^2(5 + 4 \cos 3\varphi) \end{aligned}$$

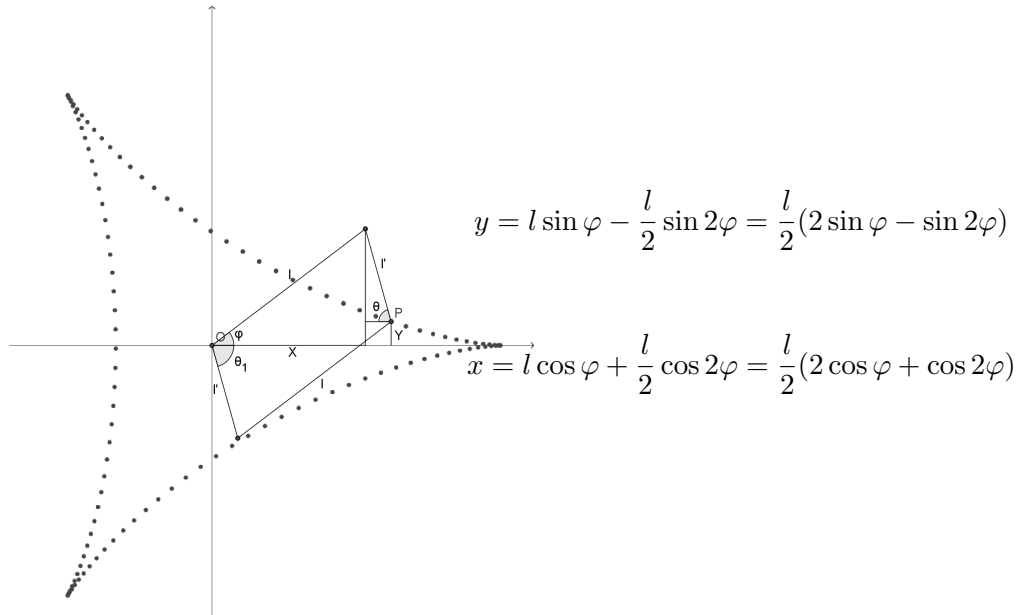
2.3 Eine weitere Erzeugungsweise

2 Strecken der Länge l und $\frac{l}{2}$ drehen sich in entgegengesetzte Richtung um den Ursprung, wobei die kürzere Strecke sich doppelt so schnell bewegt wie die längere. Ergänzt man diese beiden Strecken nun zu einem Parallelogramm, so beschreibt die entstehende Ecke eine Steinersche Kurve.

Wählt man andere Seitenverhältnisse und Geschwindigkeitsverhältnisse, so entstehen andere Kurven, wie z.B. die Rosette (alle Seiten gleich lang, eine Seite drei Mal so schnell wie die andere), oder die Astroide (Seitenlängen l und $\frac{l}{3}$, die kürzere bewegt sich drei Mal so schnell wie die längere).

Aus der Skizze lässt sich ablesen:

2 Steinersche Hypozykloide



2.4 Auswertung der Kurvengleichung

Die Polargleichung zeigt, dass b^2 , also auch b , alle möglichen Werte im Intervall $[0, \frac{2\pi}{3})$ annimmt. Da $\cos 3\varphi = \cos(2\pi - 3\varphi)$, nimmt b in diesem Intervall alle Werte doppelt an. Den maximalen Wert für b erhält man für $\varphi = 0$ ($b = 3r$), den Minimalen für $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ($b = r$). Die gleichen Werte entstehen in den Intervallen $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ und $[\frac{4\pi}{3}, 0)$, so dass die Kurve aus 3 kongruenten, symmetrischen Zweigen besteht, die in den Spitzen zusammenstoßen. Die Kurve hat also drei Symmetrieachsen. Dabei werden die Hochpunkte immer nach einer vollen Drehung des kleinen Kreises angenommen, die Tiefpunkte immer eine halbe Drehung vorher.

2.5 Quadratur

Nach dem Satz von Green gilt:

$$F = \frac{1}{2} \int x dy - y dx$$

Zuerst berechnen wir dy und dx :

$$\frac{dx}{dt} = r(-2 \sin t - 2 \sin 2t) = -4r \sin \frac{3t}{2} \cos \frac{-t}{2}$$

2 Steinersche Hypozykloide

$$\Rightarrow dx = -4r \sin \frac{3t}{2} \cos \frac{t}{2} dt$$

$$\frac{dy}{dt} = r(2 \cos t - 2 \cos 2t) = -4r \sin \frac{3t}{2} \sin \frac{-t}{2}$$

$$\Rightarrow dy = 4r \sin \frac{3t}{2} \sin \frac{t}{2} dt$$

$$xdy = r(2 \cos t + \cos 2t) 4r \sin \frac{3t}{2} \sin \frac{t}{2} dt = 4r^2 (2 \cos t \sin \frac{3t}{2} \sin \frac{t}{2} + \cos 2t \sin \frac{3t}{2} \sin \frac{t}{2}) dt$$

$$ydx = r(2 \sin t - \sin 2t) (-4r) \sin \frac{3t}{2} \cos \frac{t}{2} = -4r^2 (2 \sin t \sin \frac{3t}{2} \cos \frac{t}{2} - \sin 2t \sin \frac{3t}{2} \cos \frac{t}{2}) dt$$

$$xdy - ydx = 4r^2 \sin \frac{3t}{2} (2 \cos t \sin \frac{t}{2} + \cos 2t \sin \frac{t}{2} + 2 \sin t \cos \frac{t}{2} - \sin 2t \cos \frac{t}{2}) dt$$

Mit den Additionstheoremen folgt:

$$xdy - ydx = 4r^2 \sin \frac{3t}{2} (2 \sin \frac{3t}{2} - \sin \frac{3t}{2}) = 4r^2 \sin \frac{3t}{2}$$

Für ein Drittel der Fläche:

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} xdy - ydx = 2r^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{3t}{2} dt = \frac{2r^2 \pi}{3}$$

Also ist die Gesamtfläche der Steinerschen Hypozykloide $2r^2$ und somit gerade das Doppelte des Scheitelkreises, oder etwas weniger als der Flächeninhalt eines Stückes zwischen Kreis und Kurve.

Die Länge der Kurve ist $16r$.

3 Quellen

Grundlage ist das Buch „**Ausgewählte höhere Kurven**“ von Hermann Schmidt, die Seiten 175 - 188.

Der Abschnitt über Jakob Steiner basiert auf:

https://de.wikipedia.org/wiki/Jakob_Steiner

Die Konstruktion der Steinerschen Kurve basiert auf dem Buch „**Ebene algebraische Kurven**“ von Gerd Fischer, Seiten 6-7